Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 2

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.	Name des Tutors:

Ausgabe: 9. November 2016

Abgabe: 24. November 2016, 16:00 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 2:	/ 38	(4 ECTS: 38)
Blätter 1 – 2:	/ 57	(4 ECTS: 57)

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)
Es sei $A = \{a, b, c, d\}$. Eine Folge formaler Sprachen L_n sei wie folgt definiert:

$$L_0 = \{\epsilon\}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : L_{n+1} = \{ab\} \cdot L_n \cdot \{cd\}$$

Außerdem sei $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Aussage:
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : (ab)^i(cd)^i \in L$

Lösung 2.1
Induktionsanfang: Sei n=0. Dann gilt: $(ab)^0(cd)^0 = \epsilon\epsilon = \epsilon \in \{\epsilon\} = L_0$
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass gilt: $(ab)^n(cd)^n \in L$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$, so dass gilt: $(ab)^n(cd)^n \in L_k$. Dann gilt, gemäß der Definition von L_i, $ab(ab)^n(cd)^n cd = (ab)^{n+1}(cd)^{n+1} \in L_{k+1} \subset L$ und somit auch $(ab)^{n+1}(cd)^{n+1} \in L$.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)
Es sei Var_{AL} eine Menge von Aussagevariablen und es sei For_{AL} die Menge aller aussagenlogischen Formeln über Var_{AL}. Beweisen Sie, dass für alle $G, H \in For_{AL}$ die aussagenlogische Formel

$$(\neg H \to \neg G) \to (G \to H)$$

eine Tautologie ist. Verwenden Sie nicht das aussagenlogische Kalkül, sondern arbeiten Sie mit der Definition der Auswertung von aussagenlogischen Formeln und den boolschen Funktionen.

Lösung 2.2
Es seien $G, H \in For_{AL}$. Es ist zu zeigen, dass für jede Interpretation $I\colon Var_{AL} \to \mathbb{B}$ gilt:

$$val_I((\neg H \to \neg G) \to (G \to H)) = \mathbf{w}.$$

Dazu sei $I\colon Var_{AL} \to \mathbb{B}$ eine Interpretation. Nach den Äquivalenzen aus der Vorlesung gilt:

$$val_I((\neg H \to \neg G) \to (G \to H)) = \neg val_I(\neg H \to \neg G) \vee val_I(G \to H).$$

Ferner gilt dann:

$$\begin{aligned} val_I(\neg H \to \neg G) &= \neg val_I(\neg H) \vee val_I(\neg G) \\ &= \neg(\neg val_I(H)) \vee \neg(val_I(G)) \\ &= val_I(H) \vee \neg val_I(G). \end{aligned}$$

Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned} val_I(G \rightarrow H) &= \neg val_I(G) \vee val_I(H) \\ &= \neg(\neg val_I(H)) \vee \neg(val_I(G)) \\ &= val_I(H) \vee \neg val_I(G). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$val_I((\neg H \rightarrow \neg G) \rightarrow (G \rightarrow H)) = \neg(val_I(H) \vee \neg val_I(G)) \vee (val_I(H) \vee \neg val_I(G)).$$

Fall 1: $val_I(H) \vee \neg val_I(G) = \mathbf{w}$. Nach Definition der Abbildung $\vee$ gilt dann

$$\neg(val_I(H) \vee \neg val_I(G)) \vee (val_I(H) \vee \neg val_I(G)) = \neg\mathbf{w} \vee \mathbf{w} = \mathbf{w}.$$

Fall 2: $val_I(H) \vee \neg val_I(G) = \mathbf{f}$. Nach Definition der Abbildung $\neg$ gilt dann $\neg(val_I(H) \vee \neg val_I(G)) = \mathbf{w}$. Und nach Definition der Abbildung $\vee$ gilt somit

$$\neg(val_I(H) \vee \neg val_I(G)) \vee (val_I(H) \vee \neg val_I(G)) = \mathbf{w} \vee \mathbf{f} = \mathbf{w}.$$

In beiden Fällen gilt

$$val_I((G \rightarrow H) \rightarrow (\neg H \rightarrow \neg G)) = \neg(val_I(H) \vee \neg val_I(G)) \vee (val_I(H) \vee \neg val_I(G)) = \mathbf{w}.$$

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)
Stellen Sie für folgende aussagenlogische Formel eine Wahrheitstabelle auf:

$$((\neg A \rightarrow B) \wedge (\neg(C \leftrightarrow B) \vee A))$$

Lösung 2.3

A	B	C	$((\neg A \rightarrow B) \wedge (\neg(C \leftrightarrow B) \vee A))$
f	**f**	**f**	**f**
f	**f**	**w**	**f**
f	**w**	**f**	**w**
f	**w**	**w**	**f**
w	**f**	**f**	**w**
w	**f**	**w**	**w**
w	**w**	**f**	**w**
w	**w**	**w**	**w**

Aufgabe 2.4 (1+6+1+3+1=12 Punkte)
Sei A ein Alphabet. Die Abbildung $R\colon A^* \rightarrow A^*$ sei wie folgt definiert:

$$R(\epsilon) = \epsilon$$
$$\forall x \in A : R(x) = x$$
$$\forall w \in A^* \; \forall x \in A \; \forall y \in A : R(xwy) = yR(w)x$$

a) Berechnen Sie $R(cbffddbcab)$.
b) Beweisen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in A^n : |R(w)| = |w|$
c) Geben Sie ein Wort e der Länge 9 an, so dass gilt: $R(w) = w$
d) Für ein bestimmtes Alphabet A, wieviele Wörter der Länge 9 gibt es, für die gilt: $R(w) = w$
e) Geben Sie eine umgangssprachliche Beschreibung dessen an, was die Abbildung R macht.

Lösung 2.4

a) $R(cbffddbcab) = bR(bffddbca)c = baR(ffddbc)bc = bacR(fddb)fbc = bacbR(dd)ffbc = bacbdR(\epsilon)dffbc = bacbddffbc$
b) Beweis durch vollständige Funktion über die Länger der Wörter k.
Induktionsanfang: Sei $k = 0$. Dann muss $w = \epsilon$ sein, weil es das einzige Wort der Länge 0 ist. Nach Definition von R gilt dann $|R(w)| = |R(\epsilon)| = |\epsilon| = 0$. Also gilt die Aussage für alle Wörter der Länge 0. Sei $k = 1$. Die einzigen Wörter der Länge 1 sind diejenigen, die nur aus einem Zeichen aus dem Alphabet A bestehen, d.h.: $w \in A$. Sei also $w \in A$, dann gilt Nach Definition von R: $|R(w)| = |w|$. Also gilt die Aussage für alle Wörter der Länge 1.
Induktionsschritt: Es gelte die Aussage für alle Wörter der Länge $n >= 1$. Sei w ein Wort der Länge $n + 1$, d.h., $|w| > 1$. Dann gibt es ein $x \in A$, ein $y \in A$ und ein $w' \in A^*$, so dass $w = xw'y$. Damit ist $|w'| = n - 1$. Dann gilt: $|R(w)| = |R(xw'y)| = |yR(w')x| = |y| + |R(w')| + |x| = 1 + n - 1 + 1 = n + 1$.
c) z.B. $w = abcdedcba$ oder $w = aabbcbbaa$
d) Sei $w \in A^*$, dann ist $w = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9$ mit $x_i \in A$ für $i \in \mathbb{N}_0$ mit $1 <= i <= 9$. Dann gilt $R(x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9) = x_9R(x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8)x_1 = x_9x_8R(x_3x_4x_5x_6x_7)x_2x_1 = x_9x_8x_7R(x_4x_5x_6)x_3x_2x_1 = x_9x_8x_7x_6R(x_5)x_4x_3x_2x_1 = x_9x_8x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1$
Jetzt ist $w = R(w)$ gdw. $x_1 = x_9, x_2 = x_8, x_3 = x_7, x_4 = x_6$. D.h., x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 können frei aus A gewählt werden, die anderen Zeichen werden durch die Belegung der ersten 4 Zeichen festgelegt. D.h., es gibt $|A|^5$ Möglichkeiten.
e) R spiegelt Wörter.

Aufgabe 2.5 (1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte)

Gegeben sei eine Abbildung $g : X \to Y$ mit $g(x) = x^2$. Wählen Sie geeignete Räume $X, Y \in \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$, so dass gilt:

a) g ist injektiv, aber nicht surjektiv.
b) g ist surjektiv, aber nicht injektiv.
c) g ist weder injektiv noch surjektiv.
d) g ist bijektiv.

Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Lösung stimmt.

Lösung 2.5
Mögliche Abbildungen sind

a) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
   - g ist nicht surjektiv, da es kein $x \in \mathbb{N}$ gibt mit $g(x) = 3$.
   - Seien $x_1, x_2, y \in \mathbb{N}$ mit $g(x_1) = y$ und $g(x_2) = y$, also gilt $x_1^2 = x_2^2$. Da $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ gilt nun $x_1 = \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} = x_2$. Also ist g injektiv.

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
   - g ist nicht injektiv, da $g(1) = 1^2 = 1 = (-1)^2 = g(-1)$.
   - Sei $y \in \mathbb{R}^+$ beliebig. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x = |\sqrt{y}|$ dass $g(x) = x^2 = |\sqrt{y}|^2 = y$. Wegen $x \in \mathbb{R}^+$ gilt auch $x \in \mathbb{R}$. Daher ist g surjektiv.

c) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
   - g ist nicht surjektiv, da es kein $x \in \mathbb{Z}$ gibt mit $g(x) = 3$.
   - g ist nicht injektiv, da $g(1) = 1^2 = 1 = (-1)^2 = g(-1)$, aber $1 \neq -1$.

d) $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
   - Seien $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^+$ mit $g(x_1) = y$ und $g(x_2) = y$, also gilt $x_1^2 = x_2^2$. Da $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ gilt nun $x_1 = \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} = x_2$. Also ist g injektiv.
   - Sei $y \in \mathbb{R}^+$ beliebig. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x = |\sqrt{y}|$ dass $g(x) = x^2 = |\sqrt{y}|^2 = y$. Daher ist g surjektiv.
   - Da g injektiv und surjektiv ist, ist g bijektiv.

Aufgabe 2.6 (1,5 + 1,5 + 4 = 7 Punkte)
Sind X und Y zwei Mengen und $f\colon X \to Y$ eine bijektive Abbildung, so ist die Relation

$$R_f = \{(f(x), x) \mid x \in X\}$$

eine bijektive Abbildung von Y nach X, die wir mit f^{-1} bezeichnen, *Umkehrabbildung von f* oder *Inverse von f* nennen, und für die für jedes $x \in X$ und jedes $y \in Y$ gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ und } f(f^{-1}(y)) = y.$$

Es sei A das Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, es sei γ die bijektive Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathbb{Z}_3 &\to A, \\ 0 &\mapsto \mathtt{a}, \\ 1 &\mapsto \mathtt{b}, \\ 2 &\mapsto \mathtt{c}, \end{aligned}$$

und es sei $\odot$ die binäre Operation

$$\odot\colon A^* \times A^* \to A^*,$$
$$(u, v) \mapsto \begin{cases} u, & \text{falls } u = \epsilon \text{ oder } v = \epsilon, \\ \gamma((\gamma^{-1}(x) + \gamma^{-1}(y)) \bmod 3) \cdot (\mu \odot \kappa), & \text{falls } u = x \cdot \mu \text{ und } v = y \cdot \kappa \\ & \text{für } x, y \in A \text{ und } \mu, \kappa \in A^*, \end{cases}$$

wobei für jede nicht-negative ganze Zahl z der Ausdruck $z \bmod 3$ den Rest der ganzzahligen Division von z mit 3 bezeichne und bei Bedarf Zeichen in A als Wörter der Länge 1 in A^1 aufzufassen sind.

a) Berechnen Sie die Wörter $\mathtt{baac} \odot \mathtt{bbbb}$, $\mathtt{caab} \odot \mathtt{bbbbbb}$ und $\mathtt{baacc} \odot \mathtt{cc}$.

b) Es sei

$$\begin{aligned} \delta\colon A &\to A, \\ \mathtt{a} &\mapsto \mathtt{a}, \\ \mathtt{b} &\mapsto \mathtt{c}, \\ \mathtt{c} &\mapsto \mathtt{b}. \end{aligned}$$

Geben Sie für jedes $u \in A^*$ ein $v \in A^*$ so an, dass $u \odot v = \mathtt{a}^{|u|}$ gilt.

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Für jedes } w \in A^n\colon w \odot \mathtt{a}^n = w.$$

Lösung 2.6

a) $\mathtt{baac} \odot \mathtt{bbbb} = \mathtt{cbba}$, $\mathtt{caab} \odot \mathtt{bbbbbb} = \mathtt{abbc}$ und $\mathtt{baacc} \odot \mathtt{cc} = \mathtt{acacc}$.

b) Es sei $u \in A^*$ und es sei B der Zielbereich von u. Das Wort

$$\begin{aligned} v\colon \mathbb{Z}_{|u|} &\to \delta(B), \\ i &\mapsto \delta(u(i)), \end{aligned}$$

hat die gewünschte Eigenschaft.

c) *Induktionsanfang*: Es sei $w \in A^0$. Dann ist $w = \epsilon$. Nach Definition von $\odot$ gilt somit $w \odot \mathtt{a}^0 = w$. Insgesamt gilt:

$$\text{Für jedes } w \in A^0\colon w \odot \mathtt{a}^0 = w.$$

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } u \in A^n\colon u \odot \mathtt{a}^n = u. \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)}$$

Weiter sei $w \in A^{n+1}$. Dann gibt es ein $x \in A$ und ein $u \in A^n$ so, dass $x \cdot u = w$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} w \odot \mathtt{a}^{n+1} &= (x \cdot u) \odot (\mathtt{a} \cdot \mathtt{a}^n) \\ &= \gamma((\gamma^{-1}(x) + \gamma^{-1}(\mathtt{a})) \bmod 3) \cdot (u \odot \mathtt{a}^n). \end{aligned}$$

Nach Definition von γ, γ^{-1} und mod gilt:

$$\begin{aligned} \gamma((\gamma^{-1}(x) + \gamma^{-1}(\mathtt{a})) \bmod 3) &= \gamma((\gamma^{-1}(x) + 0) \bmod 3) \\ &= \gamma(\gamma^{-1}(x) \bmod 3) \\ &= \gamma(\gamma^{-1}(x)) \\ &= x. \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $u \odot \mathtt{a}^n = u$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} w \odot \mathtt{a}^{n+1} &= \gamma((\gamma^{-1}(x) + \gamma^{-1}(\mathtt{a})) \bmod 3) \cdot (u \odot \mathtt{a}^n) \\ &= x \cdot u \\ &= w. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt:

$$\text{Für jedes } w \in A^{n+1} \colon w \odot \mathtt{a}^{n+1} = w.$$

Schlussworte: Gemäßdes Prinzips der vollständigen Induktion gilt die Behauptung.

Aufgabe 2.7 (3 Punkte)
Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $2^n > n^2$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$.

Lösung 2.7
Induktionsanfang: $n = 5$: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$
Induktionsschritt: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n > n^2 + n^2 = n^2 + n \cdot n \geq n^2 + 5n > n^2 + 3n > n^2 + 2n + n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$