Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 5

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.	Name des Tutors:
Ausgabe:	23. Dezember 2016
Abgabe:	19. Januar 2017, 16:00 Uhr im GBI-Briefkasten im Untergeschoss von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 5:	/ 34	(4 ECTS: 28)
Blätter 1 – 5:	/ 171,5	(4 ECTS: 134,5)

Aufgabe 5.1 **(2 + 2 + 2 = 6 Punkte)**
Formulieren Sie die folgenden Aussagen als Formeln in Prädikatenlogik:

a) Wenn ein Vogel nicht fliegen kann, dann können nicht alle Vögel fliegen.
b) Was Donald Ervin Knuth nicht kann, kann keiner.
c) John mag jeden, der älter als 22 Jahre und der niemanden mag, der jünger als 22 Jahre ist.

Anmerkung: Die Alphabete der Konstantensymbole, Variablensymbole, Funktionssymbole und Relationssymbole müssen Sie nicht explizit angeben, da diese implizit aus den Formeln hervorgehen.

Lösung 5.1

a)
$$\exists \mathtt{x}(\mathtt{Vogel(x)} \land \neg \mathtt{flugfaehig(x)}) \to \neg \forall \mathtt{x}(\mathtt{Vogel(x)} \to \mathtt{flugfaehig(x)})$$

b)
$$\forall \mathtt{x}((\neg \mathtt{kann(Donald\ Ervin\ Knuth, x)}) \to \neg \exists \mathtt{y}(\mathtt{kann(y, x)}))$$

c)
$$\forall \mathtt{x}(\mathtt{aelterals(x, 22)} \land \neg \exists \mathtt{y}(\mathtt{juengerals(y, 22)} \land \mathtt{mag(x, y)}) \to \mathtt{mag(John, x)})$$

Aufgabe 5.2 **(1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte)** **[nicht Physik]**
Es seien $Const_{PL} = \{\}$, $Var_{PL} = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$, $Fun_{PL} = \{\mathtt{f}\}$ und $Rel_{PL} = \{\mathtt{E}\}$ mit $\mathrm{ar}(\mathtt{E}) = 2$, $\mathrm{ar}(\mathtt{f}) = 2$ und es sei F die prädikatenlogische Formel

$$\forall \mathtt{x}(\mathtt{E(x,y)} \to \neg \exists \mathtt{z}(\mathtt{E(f(x,z),y)} \land \mathtt{E(y,z)}))$$

a) Geben Sie all jene Variablen an die frei und all jene die gebunden in F vorkommen.
b) Geben sie eine Substitution σ an, die *nicht* kollisionsfrei für F ist.
c) Geben Sie eine Interpretation (D_1, I_1) und eine Variablenbelegung β_1 so an, dass $val_{D_1,I_1,\beta_1}(F) = \mathbf{w}$ gilt.
d) Geben Sie eine Interpretation (D_2, I_2) und eine Variablenbelegung β_2 so an, dass $val_{D_2,I_2,\beta_2}(F) = \mathbf{f}$ gilt.

Lösung 5.2

a) Nur die Variable $\mathtt{y}$ kommt frei in F vor. Genau die Variablen $\mathtt{x}$ und $\mathtt{z}$ kommen gebunden in F vor.
b) Die Substitution $\sigma_{\{(\mathtt{y}/\mathtt{x})\}}$ leistet das Gewünschte.
c) Die Interpretation $(D_1, I_1) = (\{0,1\}, \{\{<\}, \{f(x,y) = max(1, x+y)\}\})$ und die Variablenbelegung $\beta_1 \colon Var_{PL} \to D$, $\beta_1(x) = 0$, $\beta_1(y) = 1$, $\beta_1(z) = 0$ leisten das Gewünschte.
d) Die Interpretation $(D_1, I_1) = (\{0,1\}, \{\{\leq\}, \{f(x,y) = max(1, x+y)\}\})$ und die Variablenbelegung $\beta_1 \colon Var_{PL} \to D$, $\beta_1(x) = 0$, $\beta_1(y) = 1$, $\beta_1(z) = 0$ leisten das Gewünschte.

Aufgabe 5.3 (3 Punkte)
Seien $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}_+$. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $x \equiv_m y$, dann $x \texttt{ mod } m = y \texttt{ mod } m$

Lösung 5.3
Da wir in der Vorlesung die modulo Operation nicht für ganze Zahlen, sondern nur für natürliche Zahlen definiert haben, nehmen wir diese Aufgabe aus dem Gesamtpool der Aufgaben raus. Diejenigen, die die Aufgabe bearbeitet haben, bekommen trotzdem Punkte basierend auf deren Bearbeitung.
Zur Lösung:
Es gibt zwei Definitionen für die Modulo-Operation auf ganzen Zahlen:
$\texttt{mod} : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \mapsto \mathbb{Z}$,

a) $(a, m) \mapsto a \texttt{ mod } m := a - \lfloor \frac{a}{m} \rfloor \cdot m$
b) $(a, m) \mapsto a \texttt{ mod } m := a - m \cdot (d \texttt{ div } m)$

a) heißt machmal die mathematische Definition und für sie gilt für $k \in \mathbb{Z}$ $(a + km) \texttt{ mod } m =$, so wie wir das in der Übung gezeigt haben. Für b) gilt dies allgemein nicht, z.B. $(1-3) \texttt{ mod } 3 = (-2) \texttt{ mod } 3 = -2 \neq 1 = 1 \texttt{ mod } 3$.

Aufgabe 5.4 (3 Punkte)
Für die folgenden, aus der Mathematik bekannten Relationen, geben Sie jeweils an, ob die Relation reflexiv, transitiv, symmetrisch und eine Äquivalenzrelation ist: $<, \leq, >, \geq, =, \neq$

Lösung 5.4

$<$: nicht refelexiv, transitiv, nicht symmetrisch

$\leq$: reflexiv, transitiv, nicht symmetrisch

$>$: nicht reflexiv, transitiv, nicht symmetrisch

$\geq$: reflexiv, transitiv, nicht symmetrisch

$=$: reflexiv, transitiv, symmetrisch (also eine Äquivalenzrelation)

$\neq$: nicht reflexiv, nicht transitiv, symmetrisch

Aufgabe 5.5 (4 Punkte)
Es seien x, y und z drei verschiedene Variablen und es sei a eine ganze Zahlen.

Bestimmen Sie anhand des Hoare-Kalküls eine schwächste Vorbedingung von

$$z \leftarrow x \texttt{ div } y$$
$$u \leftarrow x \texttt{ mod } y$$
$$z \leftarrow z * y + u$$
$$y \leftarrow x - z$$
$$\{x = a \land y = 0 \land z = a\}$$

indem Sie wiederholt das Zuweisungsaxiom und die anderen Regeln des Hoare-Kalküls verwenden.

Lösung 5.5

Lösung alles hintereinander weg geschrieben:

$\{x = a \land y \neq 0\}$

$\{x = a \land x - x = 0 \land x = a \land y \neq 0\}$

$\{x = a \land x - ((x \texttt{ div } y) * y + x \texttt{ mod } y) = 0 \land (x \texttt{ div } y) * y + x \texttt{ mod } y = a \land y \neq 0\}$

$z \leftarrow x \texttt{ div } y$

$\{x = a \land x - (z * y + x \texttt{ mod } y) = 0 \land z * y + x \texttt{ mod } y = a \land y \neq 0\}$

$u \leftarrow x \texttt{ mod } y$

$\{x = a \land x - (z * y + u) = 0 \land z * y + u = a \land y \neq 0\}$

$z \leftarrow z * y + u$

$\{x = a \land x - z = 0 \land z = a \land y \neq 0\}$

$y \leftarrow x - z$

$\{x = a \land y = 0 \land z = a\}$

Aufgabe 5.6 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)

a) Was kann man über den größten und den kleinsten Ausgangsgrad der Knoten eines gerichteten Graphen mit 4 Knoten sagen, bei dem der Knoten mit dem höchstens Eingangsgrad den Eingangsgrad 4 hat?
b) Was kann man über den größten und den kleinsten Ausgangsgrad der Knoten eines gerichteten Graphen mit 4 Knoten sagen, bei dem der Knoten mit dem höchstens Eingangsgrad den Eingangsgrad 3 hat?
c) Was kann man über den größten und den kleinsten Eingangsgrad der Knoten eines gerichteten Graphen mit 3 Knoten sagen, der zwei Kanten hat.

Lösung 5.6

a) Höchster Ausgangsgrad ist mindestens 1 und maximal 4, kleinster Ausgangsgrad ist mindestens 1 und maximal 4.
b) Höchster Ausgangsgrad ist mindestens 1 und maximal 4, kleinster Ausgangsgrad ist mindestens 0 und höchstens 3.
c) Der höchste Eingangsgrad ist entweder 1 oder 2. Der kleinste Eingangsgrad ist 0.

Aufgabe 5.7 (6 Punkte)
Gegeben Sei folgender Algorithmus mit Grundbereich $\mathbb{N}_0$, also $I(n) \in \mathbb{N}_0$

$$
\begin{array}{l}
i \leftarrow 0 \\
j \leftarrow 0 \\
X \leftarrow 1 \\
Y \leftarrow 1 \\
Z \leftarrow 1 \\
C \leftarrow 1 \\
U \leftarrow n \\
\textbf{while } i < n \textbf{ do} \\
\quad i \leftarrow i + 1 \\
\quad j \leftarrow i \\
\quad X \leftarrow X * i \\
\quad Z \leftarrow X \\
\quad Y \leftarrow i + 1 \\
\quad Y \leftarrow X * Y \\
\quad \textbf{while } j < 2 * i \textbf{ do} \\
\quad\quad j \leftarrow j + 1 \\
\quad\quad Z \leftarrow Z * j \\
\quad \textbf{od} \\
\quad C \leftarrow Z \texttt{ div } (X * Y) \\
\textbf{od}
\end{array}
$$

Geben Sie für die äußere und die innere while-Schleife jeweils die Schleifeninvariante an. Was berechnet der Algorithmus?

Lösung 5.7

$i \leftarrow 0$
$j \leftarrow 0$
$X \leftarrow 1$
$Y \leftarrow 1$
$Z \leftarrow 1$
$C \leftarrow 1$
$U \leftarrow n$

$\{X = i! \wedge Y = (i+1)! \wedge Z = (2i)! \wedge C = C_i = \frac{(2i)!}{(i+1)!i!}\}$

while $i < n$ **do**
$\quad i \leftarrow i+1$
$\quad j \leftarrow i$
$\quad X \leftarrow X * i$
$\quad Z \leftarrow X$
$\quad Y \leftarrow i+1$
$\quad Y \leftarrow X * Y$
$\quad \{Z = j!\} \cup \{X = i! \wedge Y = (i+1)! \wedge Z = (2i)! \wedge C = C_{i-1} = \frac{(2(i-1))!}{(i)!(i-1)!}\}$
$\quad$ **while** $j < 2 * i$ **do**
$\quad\quad j \leftarrow j+1$
$\quad\quad Z \leftarrow Z * j$
$\quad$ **od**
$\quad C \leftarrow Z \;\texttt{div}\; X * Y$
od

Der Algorithmus berechnet in C die Catalan-Zahl $C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$. Siehe auch `https://de.wikipedia.org/wiki/Catalan-Zahl`.

Aufgabe 5.8 (3 Punkte)
Sei $G = \neg P \to (P \to P)$ eine aussagenlogische Formel. Leiten Sie im Aussagenkalkül ab: $\vdash G$.

Lösung 5.8

$(P \to P) \to (\neg P \to (P \to P))$	Ax_1
$(P \to P)$	Satz aus Vorlesung
$\neg P \to (P \to P)$	$MP(1,4)$