Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 3
Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	

Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: 18. November 2020

Abgabe: 1. Dezember 2020, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie
- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 3:	/ 22	Blätter 1 – 3, Stud. 1:	/ 60
		Blätter 1 – 3, Stud. 2:	/ 60

Aufgabe 3.1 (1 + 1 + 1.5 + 1.5 = 5 Punkte)
Es seien $\mathtt{P}$ und $\mathtt{Q}$ aussagenlogische Variablen. Betrachten Sie die folgende aussagenlogische Formel:

$$F = (\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to (\mathtt{Q} \to \mathtt{P}).$$

a) Stellen Sie eine Wahrheitstabelle zu F auf. Führen Sie für jedes aussagenlogische Konnektiv von F eine dazu zugehörige Spalte auf.
b) Ist F erfüllbar? Ist F eine Tautologie? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Geben Sie eine zu F logisch äquivalente Formel G an, die höchstens ein Negationszeichen enthält und in der kein Implikationszeichen vorkommt.
d) Geben Sie eine zu F logisch äquivalente Formel H an, in der die Formel $\neg F$ vorkommt.

Lösung 3.1

a)

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$	$\mathtt{Q} \to \mathtt{P}$	F
f	f	w	w	w
f	w	w	f	f
w	f	f	w	w
w	w	w	w	w

oder

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$(\mathtt{P}$	$\to$	$\mathtt{Q})$	$\to$	$(\mathtt{Q}$	$\to$	$\mathtt{P})$
f	f	f	w	f	w	f	w	f
f	w	f	w	w	f	w	f	f
w	f	w	f	f	w	f	w	w
w	w	w	w	w	w	w	w	w

b) F ist erfüllbar, wie man z. B. an der Interpretation $I(\mathtt{P}) = I(\mathtt{Q}) = \mathbf{f}$ sieht. Jedoch ist F keine Tautologie, wie man an der Interpretation $I(\mathtt{P}) = \mathbf{f}$ und $I(\mathtt{Q}) = \mathbf{w}$ sieht (und eigentlich nur an der).
c) z. B. $G = \mathtt{P} \vee \neg \mathtt{Q}$ oder $G = \neg \mathtt{Q} \vee \mathtt{P}$
(In der Tabelle sieht man, dass F logisch äquivalent zu $\mathtt{Q} \to \mathtt{P}$ ist.)
d) z. B. $H = F \wedge (F \vee \neg F)$

Aufgabe 3.2 (2 Punkte)
Zu einer aussagenlogischer Formel F sei $V(F)$ die Menge der aussagenlogischen Variablen, die in F vorkommen. Gibt es Formeln F_1 und F_2, die zwar keine gemeinsame Variable enthalten (also $V(F_1) \cap V(F_2) = \emptyset$) aber zueinander logisch äquivalent sind? Falls ja, geben Sie solche F_1 und F_2 an; andernfalls begründen Sie, warum das nicht der Fall sein kann.

Lösung 3.2
Ja, z. B. $\mathtt{P} \vee \neg \mathtt{P}$ und $\mathtt{Q} \vee \neg \mathtt{Q}$.

Aufgabe 3.3 (2 + 2 = 4 Punkte)
Es seien $\mathtt{P}$ und $\mathtt{Q}$ aussagenlogische Variablen und F eine aussagenlogische Formel. Wir bezeichnen die Anzahl aussagenlogischer Konnektive in F durch $K(F)$, wobei die Negation „$\neg$“ dabei als ein aussagenlogisches Konnektiv mitgezählt wird. F heißt *minimal*, wenn es keine Formel G gibt, sodass $G \equiv F$ und $K(G) < K(F)$ ist.

a) Geben Sie eine minimale Formel G an, die zu der folgenden Formel F äquivalent ist:

$$F = (\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \wedge (\mathtt{P} \vee \neg \mathtt{Q}) \wedge (\neg \mathtt{P} \vee \neg \mathtt{Q}).$$

b) Gibt es zu jeder beliebigen Formel $F \in For_{AL}$ eine *eindeutige* minimale Formel G, die dazu äquivalent ist? (Das heißt, ist G' eine weitere minimale Formel, die du F

äquivalent ist, so gilt $G' = G$.) Falls ja, beschreiben Sie, wie man G aus F herleiten kann; andernfalls geben Sie eine Formel F samt minimalen Formeln G_1 und G_2 an, für die $G_1 \equiv F \equiv G_2$ aber $G_1 \neq G_2$ ist.

Lösung 3.3

a) $G = \neg(\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{Q})$ bzw. $G = \mathtt{P} \wedge \neg\mathtt{Q}$

b) Nein. Gegenbeispiel ist etwa $F = \neg(\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{Q})$ (dazu ist z. B. $\mathtt{P} \wedge \neg\mathtt{Q}$ äquivalent) oder $F = \mathtt{P} \vee \neg\mathtt{P}$ (dazu ist z. B. $\neg\mathtt{P} \vee \mathtt{P}$ äquivalent).

Aufgabe 3.4 (2 + 2 = 4 Punkte)

Es sei F eine aussagenlogische Formel. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Wenn $F \rightarrow \neg F$ eine Tautologie ist, dann ist F unerfüllbar.

b) Wenn $F \rightarrow \neg F$ erfüllbar ist, dann ist F unerfüllbar.

Lösung 3.4

Es gilt $F \rightarrow \neg F \equiv \neg F \vee \neg F \equiv \neg F$.

a) Die Behauptung ist **wahr**. Denn wenn $val_I(\neg F) = \mathbf{w}$ für jedes I gilt, dann muss $val_I(F) = \mathbf{f}$ für jedes I gelten, das heißt, F muss unerfüllbar sein.

b) Die Behauptung ist **falsch**. Z. B. sind $F = \mathtt{P}$ und $\neg F = \neg\mathtt{P}$ beide erfüllbar.

Aufgabe 3.5 (1.5 + 1 + 2.5 + 2 = 7 Punkte)

Es sei $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. In Aufgabe 2.3 haben Sie die Relation $\preceq \subseteq A^k \times A^k$ für $k \in \mathbb{N}_+$ kennengelernt. Zur Erinnerung: Sie ist für jede $x, y \in A^k$ wie folgt definiert: Es gilt $x \preceq y$ genau dann, wenn

$$\forall i \in \mathbb{Z}_k : \quad \text{wenn } x(i) \neq y(i), \text{ dann } x(i) = \mathtt{0} \text{ und } y(i) = \mathtt{1}.$$

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Man nennt eine Funktion $f \colon A^n \to A$ *monoton*, falls für jede $x, y \in A^n$ gilt: Wenn $x \preceq y$ ist, dann ist auch $f(x) \preceq f(y)$.

a) Geben Sie für $n = 3$ zwei Funktionen $f, g \colon A^n \to A$ an, sodass f zwar monoton ist aber g nicht. Begründen Sie Ihre Antwort.

Es sei jetzt $Var_{AL} = \{\mathtt{P}_0, \ldots, \mathtt{P}_{n-1}\}$ ein Alphabet aussagenlogischer Variablen. Zu $w \in A^n$ sei $I_w \colon Var_{AL} \to \mathbb{B}$ die Interpretation, die durch folgende Eigenschaft gegeben ist: Es ist $w(i) = \mathtt{1}$ genau dann, wenn $I_w(\mathtt{P}_i) = \mathbf{w}$ ist.

b) Geben Sie für $n = 3$ und $F = (\mathtt{P}_0 \vee \neg\mathtt{P}_1) \wedge \mathtt{P}_2$ ein Wort $w \in A^n$ an, sodass $val_{I_w}(F) = \mathbf{w}$ ist.

Zu jeder Formel $F \in For_{AL}$ gehört dann eine Funktion $\Phi_F \colon A^n \to A$, die wie folgt eindeutig festgelegt ist: Es gilt $\Phi_F(w) = \mathtt{1}$ genau dann, wenn $val_{I_w}(F) = \mathbf{w}$.

c) Geben Sie für $n = 2$ und jede der Formeln $F_1 = \mathtt{P}_0$, $F_2 = \neg\mathtt{P}_0$, $F_3 = \mathtt{P}_0 \wedge \mathtt{P}_1$, $F_4 = \mathtt{P}_0 \vee \mathtt{P}_1$, und $F_5 = \mathtt{P}_0 \rightarrow \mathtt{P}_1$ an, ob die dazugehörige Funktion Φ_{F_i} (wobei $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) monoton ist. Sollte Φ_{F_i} nicht monoton sein, geben Sie ein Gegenbeispiel an, das die Monotonie von Φ_{F_i} widerlegt.

d) Es sei n wieder beliebig und $F \in For_{AL}$ eine aussagenlogische Formel. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass Φ_F monoton ist. Sie müssen nicht begründen, dass Ihre Bedingung die gewünschten Eigenschaften hat.

Lösung 3.5

a)
- monoton: z. B. $f(x) = \mathtt{0}$ für jedes $x \in A^n$
  Dann ist stets $f(x) = \mathtt{0} \preceq \mathtt{0} = f(y)$.
- nicht monoton: $g(\mathtt{1}^n) = \mathtt{0}$ und $g(x) = \mathtt{1}$ für $x \in A^n \setminus \{\mathtt{1}^n\}$
  Dann ist zwar $\mathtt{0}^n \preceq \mathtt{1}^n$ aber $g(\mathtt{0}^n) = \mathtt{1} \not\preceq \mathtt{0} = g(\mathtt{1}^n)$.

b) $w = \mathtt{001}$ oder $w = \mathtt{101}$ oder $w = \mathtt{111}$

c) Φ_{F_i} ist monoton nur für $i \in \{1, 3, 4\}$. Φ_{F_2} und Φ_{F_5} sind nicht monoton, weil z. B. $\Phi_{F_2}(\mathtt{00}) = \Phi_{F_5}(\mathtt{00}) = \mathtt{1}$ aber $\Phi_{F_2}(\mathtt{10}) = \Phi_{F_5}(\mathtt{10}) = \mathtt{0}$.

d) Φ_F ist genau dann monoton, wenn F eine Tautologie oder unerfüllbar ist oder eine zu F logisch äquivalente Formel G gibt, in der keine Negations- und Implikationszeichen vorkommen.