Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 5

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	
Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: 2. Dezember 2020

Abgabe: 15. Dezember 2020, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 5:	/ 17	Blätter 1 – 5, Stud. 1:	/ 97
		Blätter 1 – 5, Stud. 2:	/ 97

Hinweis: Auf den ersten 6 Aufgabenblättern wird man insgesamt genau 120 Punkte erreichen können. Wer den Übungsschein erwerben will, kann dies also nur dann sicher schaffen, wenn auf den ersten 6 Aufgabenblättern mindestens 60 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 5.1 (2 Punkte)
Es seien A, B, und C Alphabete und $h_1 \colon A^* \to B^*$ sowie $h_2 \colon B^* \to C^*$ Homomorphismen. Zeigen Sie, dass $h_3 = h_2 \circ h_1$ ebenfalls ein Homomorphismus ist.

Aufgabe 5.2 (1 + 3 = 4 Punkte)
Es seien A und B beliebige Alphabete. Ein *Anti-Homomorphismus* sei eine Abbildung $h \colon A^* \to B^*$ mit folgender Eigenschaft: Für jede $x, y \in A^*$ gilt $h(xy) = h(y)h(x)$.

a) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass ein *surjektiver* Anti-Homomorphismus h auch ein Homomorphismus ist. In Ihrer Bedingung darf dabei das Zeichen „h" nirgends vorkommen.
   Tipp. Ihre Bedingung darf nicht nur von h, sondern auch von A bzw. B abhängen.
b) Beweisen Sie, dass Ihre Bedingung die in a) verlangte Eigenschaft hat.

Aufgabe 5.3 (1 + 1.5 + 1.5 + 2 = 6 Punkte)
Es sei $b \in \mathbb{N}_+$, $b \geq 2$. Zudem sei die Abbildung $f \colon Z_b^* \to \mathbb{N}_0$ wie folgt induktiv definiert:

$$f(\varepsilon) = 0 \qquad\qquad \forall w \in Z_b^* \; \forall x \in Z_b : f(wx) = f(w) + \mathrm{num}_b(x)$$

a) Es sei $b = 16$. Rechnen Sie $f(\texttt{3A73})$ schrittweise aus. Bei jedem Rechnungsschritt dürfen Sie dabei die Definition von f höchstens einmal benutzen.

Es sei nun die Funktion $g \colon Z_b^* \to Z_b^*$ für jedes $w \in Z_b^*$ wie folgt gegeben: $g(w) = \mathrm{Repr}_b(f(w))$.

b) Sei $b = 3$ und $w = \texttt{2020}$. Geben Sie $g^i(w)$ und $f(g^i(w))$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ an.
   Hinweis. Dabei steht g^i für die i-fache Komposition von g mit sich selber. Das heißt, für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ ist $g^0 = \mathrm{I}_{Z_b^*}$ und $g^{i+1} = g^i \circ g$.
c) Es sei $b \in \mathbb{N}_+$, $b \geq 2$, wieder beliebig. Ein $w \in Z_b^*$ heißt *Fixpunkt* von g, falls $g(w) = w$ ist.
   Geben Sie alle Fixpunkte von g an.
d) Es sei $x \in \mathbb{N}_0$, $x < b^2$, und $w = \mathrm{Repr}_b(x)$. Zeigen Sie, dass $f(w) \leq x$ ist.
   Tipp 1. Sie dürfen ohne Beweis die Tatsache benutzen, dass (wie in Aufgabe 5.4 unten gezeigt wird) die Darstellung von x zur Basis b höchstens 2 Ziffern lang (d.h., $|w| \leq 2$) ist.
   Tipp 2. Wenn $x < b$ ist, dann dürfte Ihre Antwort aus c) behilflich sein.

Aufgabe 5.4 (5 Punkte)
Es sei $b \in \mathbb{N}_+$ und $b \geq 2$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ Folgendes gilt:

$$|\mathrm{Repr}_b(n)| \leq 1 + \log_b n.$$

Tipp 1. Versuchen Sie nicht, die Behauptung so wie sie da steht direkt mit Induktion über n zu zeigen. Wandeln Sie sie stattdessen in eine äquivalente Aussage um, die sich zwar noch durch Induktion zeigen lässt, aber mit der Definition von Repr_b und den Eigenschaften des Logarithmus kompatibler ist.

Tipp 2. Für alle $x, y \in \mathbb{N}_+$ gilt $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$. Zudem ist $\log_b$ injektiv und monoton steigend.