Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 9
Lösungsvorschläge

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	
Tutor*in:	

Ausgabe: 13. Januar 2021

Abgabe: 26. Januar 2021, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 9:	/ 17
Blätter 7 – 9:	/ 58

Aufgabe 9.1 (1.5 + 1 + 1 + 1 + 1.5 = 6 Punkte)
$\texttt{R}$ sei ein zweistelliges Relationssymbol. Zudem seien die folgenden prädikatenlogischen Formeln gegeben:

$$F = \forall \texttt{x}\,(\texttt{R}(\texttt{x},\texttt{y}) \to \texttt{R}(\texttt{x},\texttt{z}))$$
$$G = (\exists \texttt{y}\ F) \to \forall \texttt{y}\ F$$

a) Geben Sie eine Interpretation (D, I) sowie Variablenbelegungen β_1 und β_2 an, sodass $val_{D,I,\beta_1}(F) = \mathbf{w}$ und $val_{D,I,\beta_2}(F) = \mathbf{f}$ ist.
b) Geben Sie $\text{fv}(F)$, $\text{bv}(F)$, $\text{fv}(G)$ und $\text{bv}(G)$ explizit an.
c) Gibt es einen Term t, sodass $G \neq \sigma_{\texttt{y}/t}(G)$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort.
d) Geben Sie die Formeln $G_1 = \sigma_{\texttt{z}/\texttt{x}}(G)$ und $G_2 = \sigma_{\texttt{z}/\texttt{y}}(G)$ explizit an.
e) Sind die Formeln G_1 und G_2 aus Teilaufgabe d) logisch äquivalent? Falls ja, erklären Sie, warum das so ist; andernfalls geben Sie eine Interpretation (D, I) sowie eine Variablenbelegung β, für die $val_{D,I,\beta}(G_1) \neq val_{D,I,\beta}(G_2)$ ist.

Lösung 9.1

a) Z. B. $D = \{0, 1\}$, $I(\texttt{R}) = \{(x, x) \mid x \in D\}$ und:
   - $\beta_1(\texttt{y}) = 0$ und $\beta_1(\texttt{z}) = 0$ sowie
   - $\beta_2(\texttt{y}) = 0$ und $\beta_2(\texttt{z}) = 1$.

b) • $\text{fv}(F) = \{\texttt{y}, \texttt{z}\}$ • $\text{bv}(F) = \{\texttt{x}\}$ • $\text{fv}(G) = \{\texttt{z}\}$ • $\text{bv}(G) = \{\texttt{x}, \texttt{y}\}$

c) Nein. Weil $\texttt{y} \notin \text{fv}(G)$ ist, $\sigma_{\texttt{y}/t}(G) = G$ für jeden Term t, da immer nur freie Vorkommen von Variablensymbolen substituiert werden.

d) $G_1 = (\exists \texttt{y}\, \forall \texttt{x}\,(\texttt{R}(\texttt{x},\texttt{y}) \to \texttt{R}(\texttt{x},\texttt{x}))) \to \forall \texttt{y}\, \forall \texttt{x}\,(\texttt{R}(\texttt{x},\texttt{y}) \to \texttt{R}(\texttt{x},\texttt{x}))$ und
$G_2 = (\exists \texttt{y}\, \forall \texttt{x}\,(\texttt{R}(\texttt{x},\texttt{y}) \to \texttt{R}(\texttt{x},\texttt{y}))) \to \forall \texttt{y}\, \forall \texttt{x}\,(\texttt{R}(\texttt{x},\texttt{y}) \to \texttt{R}(\texttt{x},\texttt{y}))$

e) Nein, denn z. B. für $D = \{0, 1\}$, $I(\texttt{R}) = \{(0, 0), (1, 0)\}$ und β beliebig haben wir $val_{D,I,\beta}(G_1) = \mathbf{f} \neq \mathbf{w} = val_{D,I,\beta}(G_2)$.
(Es gilt sogar, dass G_2 allgemeingültig ist, G_1 aber nicht.)

Aufgabe 9.2 (1 + 2 = 3 Punkte)
Es sei $A = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}$. Für $w \in A^*$ und $x \in A$ seien die Abbildungen $\text{rcar}, \text{rcdr} \colon A^* \to A^*$ wie folgt definiert:

$$\text{rcar}(\varepsilon) = \varepsilon \qquad \text{rcdr}(\varepsilon) = \varepsilon$$
$$\text{rcar}(wx) = x \qquad \text{rcdr}(wx) = w$$

a) Was ist $\text{rcar}(\text{rcdr}^2(w))$, wenn $w \in A^*$ beliebig ist?
b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion über n, dass Folgendes gilt:
$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in A^n : \text{rcdr}^{|w|}(w) = \varepsilon$.

Lösung 9.2

a) Wenn $|w| \leq 2$ ist, dann ist $\text{rcar}(\text{rcdr}^2(w)) = \varepsilon$. Für $|w| \geq 3$ ist $\text{rcar}(\text{rcdr}^2(w))$ das drittletzte Symbol von w, das heißt, $\text{rcar}(\text{rcdr}^2(w)) = w(|w| - 3)$

b) **IA:** Wenn $n = 0$ ist, dann ist $w \in A^0$ zwingend gleich ε. Es gilt dann $\text{rcdr}^0(\varepsilon) = \text{I}_{A^*}(\varepsilon) = \varepsilon$.

IS: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig und es gelte die

IV: $\forall w \in A^n : \text{rcdr}^{|w|}(w) = \varepsilon$.

Sei $w' \in A^{n+1}$. Dann gibt es $w \in A^n$ und $x \in A$ mit $w' = wx$. Damit gilt:

$$\operatorname{rcdr}^{|w'|}(w') = \operatorname{rcdr}^{|w|+1}(wx) = \operatorname{rcdr}^{|w|}(\operatorname{rcdr}(wx)) = \operatorname{rcdr}^{|w|}(w) \overset{\text{IV}}{=} \varepsilon.$$

Aufgabe 9.3 (2 + 1.5 + 1.5 + 3 = 8 Punkte)

A, rcar und rcdr seien wie in Aufgabe 9.2. Zudem sei folgender Algorithmus B gegeben, der $x, y \in A^*$ mit $|x| = |y|$ als Eingabe bekommt und $z \in A^*$ als Ausgabe liefert, wobei w_x und w_y Variablen mit Wertebereich gleich A^* sind:

$z \leftarrow \varepsilon$
$w_x \leftarrow x$
$w_y \leftarrow y$
while $w_x \neq \varepsilon \land w_y \neq \varepsilon$ **do**
  $z \leftarrow \operatorname{rcar}(w_x) \cdot \operatorname{rcar}(w_y) \cdot z$
  $w_x \leftarrow \operatorname{rcdr}(w_x)$
  $w_y \leftarrow \operatorname{rcdr}(w_y)$
od

a) Für $i \in \mathbb{N}_+$ bezeichne x_i, y_i bzw. z_i den Wert der Variable w_x, w_y bzw. z unmittelbar nach der i-ten Ausführung der **while** Schleife in B. Führen Sie B für $x =$ `abc` und $y =$ `cba` aus und geben Sie x_i, y_i, und z_i für jedes $i \in \mathbb{N}_+$ tabellarisch an. Wird die Schleife echt weniger als i-mal ausgeführt, so müssen Sie nichts angeben.
b) Wird B für beliebige Eingaben x und y stets terminieren? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Welche Werte haben die Variablen w_x, w_y und z nach Ausführung von B im Allgemeinen?
Tipp. Aufgabe 4.1
d) Zeigen Sie mittels des Hoare-Kalküls, dass Ihre Antwort zu Teilaufgabe c) korrekt ist. Genauer: Angenommen, Sie haben bei Teilaufgabe c) s_x, s_y bzw. s_z als Werte für w_x, w_y bzw. z angegeben; zeigen Sie, dass das Hoare-Tripel

$$\{|x| = |y|\}\ B\ \{w_x = s_x \land w_y = s_y \land z = s_z\}$$

gültig ist.
Geben Sie vorweg explizit die Formel an, die Sie in Ihrem Beweis als Schleifeninvariante benutzen.
Tipp. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\forall w \in A^* : w = \operatorname{rcdr}(w)\operatorname{rcar}(w)$ gilt.

Lösung 9.3

a)

i	x_i	y_i	z_i
1	`ab`	`cb`	`ca`
2	`a`	`c`	`bbca`
3	ε	ε	`acbbca`

b) Ja, denn rcdr macht den Wert von w_x bzw. w_y bei jedem Schleifendurchlauf um ein Symbol kürzer. Weil die Länge eines Wortes endlich ist, kann es auch nur endlich viele Schleifendurchläufe geben.

c) Zur Erinnerung: In Aufgabe 4.1 haben wir die binäre Operation $\sqcup\colon A^* \times A^* \to A^*$ wie folgt induktiv definiert:

$$\begin{aligned} \forall w \in A^* : &\qquad \varepsilon \sqcup w = w \sqcup \varepsilon = w \\ \forall w_1, w_2 \in A^*\ \forall x_1, x_2 \in A : &\qquad (w_1 x_1) \sqcup (w_2 x_2) = (w_1 \sqcup w_2) x_1 x_2 \end{aligned}$$

Nach Ausführung von B haben die Variablen w_x und w_y den Wert ε, und z den Wert $x \sqcup y$.

d) Schleifeninvariante: $|w_x| = |w_y| \wedge (w_x \sqcup w_y) \cdot z = x \sqcup y$
Beweis:

$\{|x| = |y|\}$
$z \leftarrow \varepsilon$
$\{|x| = |y| \wedge (x \sqcup y) \cdot z = x \sqcup y\}$
$w_x \leftarrow x$
$\{|w_x| = |y| \wedge (w_x \sqcup y) \cdot z = x \sqcup y\}$
$w_y \leftarrow y$
$\{|w_x| = |w_y| \wedge (w_x \sqcup w_y) \cdot z = x \sqcup y\}$
while $w_x \neq \varepsilon \wedge w_y \neq \varepsilon$ **do**
    $\{|w_x| = |w_y| \wedge (w_x \sqcup w_y) \cdot z = x \sqcup y\}$
    $\{|\mathrm{rcdr}(w_x)| = |\mathrm{rcdr}(w_y)| \wedge (\mathrm{rcdr}(w_x)\mathrm{rcar}(w_x) \sqcup \mathrm{rcdr}(w_y)\mathrm{rcar}(w_y)) \cdot z = x \sqcup y\}$
    $\{|\mathrm{rcdr}(w_x)| = |\mathrm{rcdr}(w_y)| \wedge (\mathrm{rcdr}(w_x) \sqcup \mathrm{rcdr}(w_y)) \cdot \mathrm{rcar}(w_x) \cdot \mathrm{rcar}(w_y) \cdot z = x \sqcup y\}$
    $z \leftarrow \mathrm{rcar}(w_x) \cdot \mathrm{rcar}(w_y) \cdot z$
    $\{|\mathrm{rcdr}(w_x)| = |\mathrm{rcdr}(w_y)| \wedge (\mathrm{rcdr}(w_x) \sqcup \mathrm{rcdr}(w_y)) \cdot z = x \sqcup y\}$
    $w_x \leftarrow \mathrm{rcdr}(w_x)$
    $\{|w_x| = |\mathrm{rcdr}(w_y)| \wedge (w_x \sqcup \mathrm{rcdr}(w_y)) \cdot z = x \sqcup y\}$
    $w_y \leftarrow \mathrm{rcdr}(w_y)$
    $\{|w_x| = |w_y| \wedge (w_x \sqcup w_y) \cdot z = x \sqcup y\}$
od
$\{(w_x = \varepsilon \vee w_y = \varepsilon) \wedge |w_x| = |w_y| \wedge (w_x \sqcup w_y) \cdot z = x \sqcup y\}$
$\{w_x = \varepsilon \wedge w_y = \varepsilon \wedge (w_x \sqcup w_y) \cdot z = x \sqcup y\}$
$\{w_x = \varepsilon \wedge w_y = \varepsilon \wedge z = x \sqcup y\}$