

Physikalisches Anfängerpraktikum - P1

Elastizität
P1-11

Protokoll von
Tobias Renz und **Raphael Schmager**

Gruppe: Do-28

Versuchsdatum: 19.01.2012

Versuche P1-11:

Elastizität

Raum F1-11

Bei diesem Versuch wird das Verhalten von Festkörpern unter der Einwirkung äußerer Kräfte untersucht und die elastischen Konstanten *Elastizitätsmodul* E und *Schubmodul* G für einige Stoffe ermittelt. Zur Bestimmung von E werden zwei Methoden einander gegenübergestellt: Messung der Balkenbiegung bei Belastung als statische Meßmethode und Messung der Schallgeschwindigkeit in Stäben als dynamische Meßmethode. G wird dynamisch aus der Schwingungsdauer von Torsionsschwingungen bestimmt.

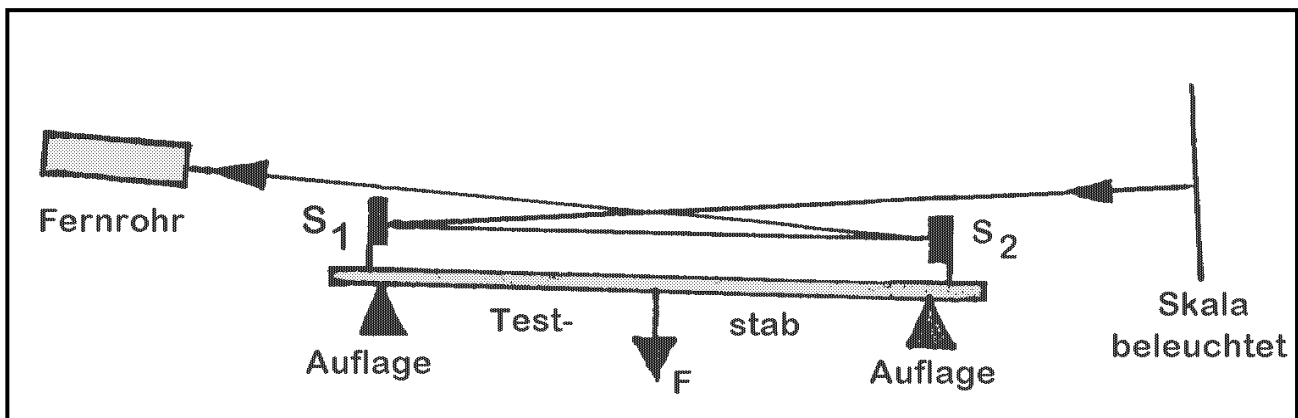
Achtung: Die bei Aufgabe 2 verwendeten Detektoren für Schallsignale sind sehr zerstörungsgefährdet! Beachten Sie die entsprechenden Hinweise im Aufgabentext.

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie für einige Stoffe den Elastizitätsmodul E aus der Biegung zweiseitig aufgelagerter und in der Mitte belasteter flacher Stäbe. Gemessen wird dabei die Kippung α der Stabenden bei Belastung. Dazu sind nahe den Stabenden leicht gegeneinander geneigte Spiegel montiert, über die der Lichtweg von einer beleuchteten Skala zu einem Beobachtungsfernrohr führt. Aus der Änderung s der Skalenablesung mit und ohne Belastung sowie einfach meßbaren Längen kann α berechnet werden. Der Zusammenhang $\alpha(s)$ soll vor Versuchsbeginn verstanden sein. α ist mit dem Abstand L zwischen den Auflageschnitten, der Breite b und der Höhe h des rechteckigen Stabquerschnitts, der belastenden Gewichtskraft F und dem Elastizitätsmodul E verknüpft.

$$\alpha = \frac{3 \cdot F \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot b \cdot h^3}$$

Diese Formel sollten Sie herleiten können.



Prinzipskizze zu Aufgabe 1

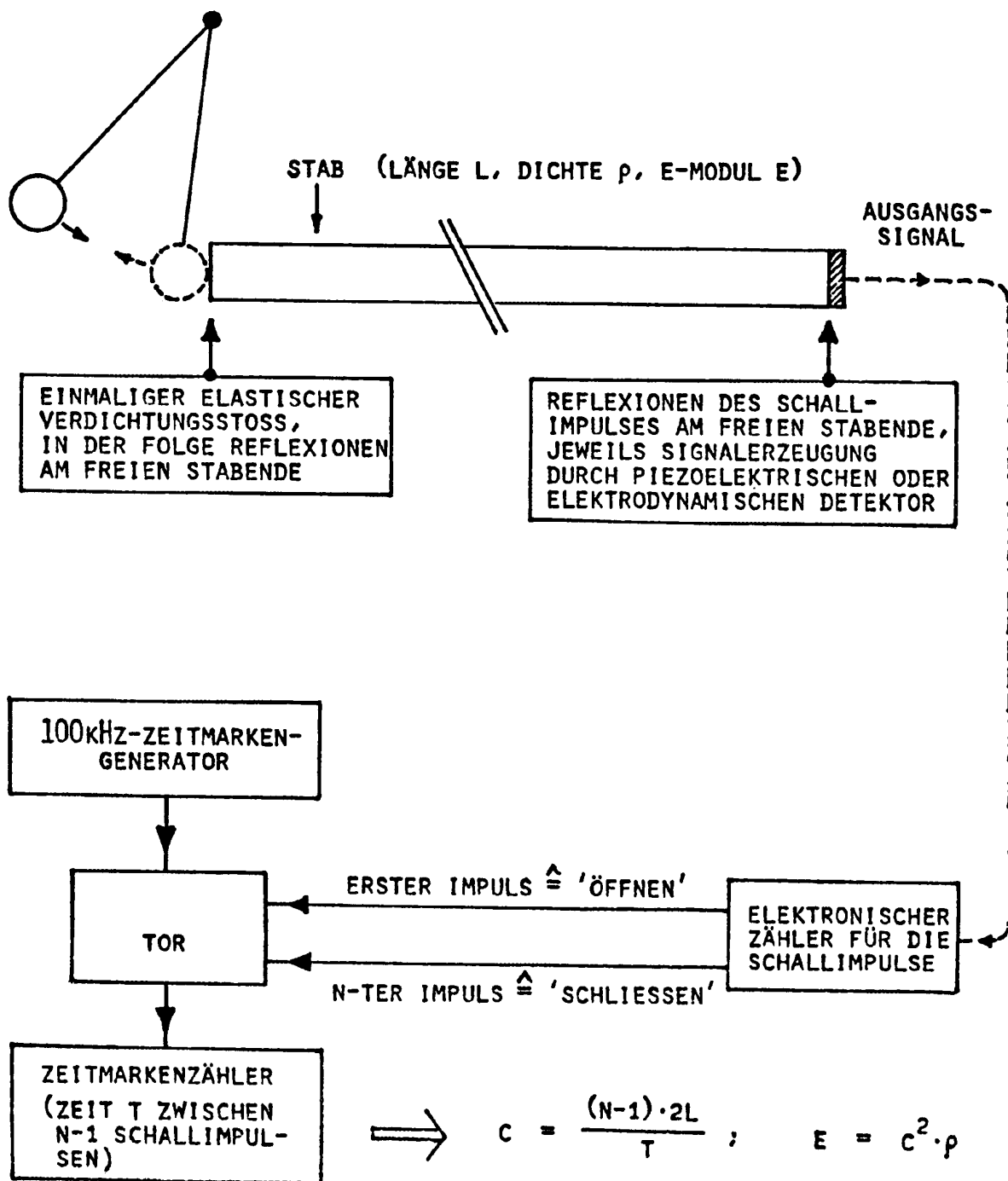
2. Bestimmen Sie für einige Stoffe den Elastizitätsmodul E aus der Geschwindigkeit v von Longitudinalwellen in Stäben. Gemessen wird dabei die Zeit T , die ein Verdichtungsstoß (axiales Anschlagen einer Pendelkugel am Stabende) braucht, um n -mal im Stab der Länge L hin- und herzulaufen, wobei er jeweils an den freien Stabenden reflektiert wird. Die Schallsignale am entfernten Stabende werden mit Hilfe eines Piezokristalls oder eines elektrodynamischen Systems aufgenommen. Ein an den Detektor angeschlossenes elektronisches Gerät (siehe Blockschaltbild) mißt die Zeit T , die zwischen dem Eintreffen des ersten und des m -ten Signals vergeht ($m = 2, 4, 6, 8$). Aus v und der Materialdichte ρ ergibt sich E . Messen Sie T in Abhängigkeit von m und ermitteln Sie v als Steigung der resultierenden Geraden.

Frage: Warum soll v nicht aus einem (m, T) -Paar berechnet werden?

Achtung: Der Piezodetektor verträgt wegen der leicht aufbrechenden Klebungen keine harten Stöße. Die Pendelkugel soll aus höchstens 8cm Entfernung vom Stabende losgelassen werden.

Das elektrodynamische Mikrophon wird durch einen prinzipiell gleichartigen kleinen elektrodynamischen Lautsprecher realisiert. Der wird mit einer an die Membran angeklebten Hülse am Stab befestigt. Der

Lautsprecherkorb samt Permanentmagnet wird von der Membran getragen. In diesem Zustand Lautsprecherkorb und Magnet nicht anfassen! Vorsicht beim Montieren! Betreuer hinzuziehen!



Prinzipskizze und Blockschaltbild zu Aufgabe 2

Vergleichen Sie bei wenigstens einem Stoff die Ergebnisse, die mit den unterschiedlichen Detektoren gemessen werden. Machen Sie sich die Funktionsweise der Detektoren klar. Es ist bei jeder Messung nötig, in einem Vorversuch zunächst etwa die Mitte jenes Bereichs der Anschlagstärke zu suchen, in dem die Ergebnisse für T reproduzierbar und vernünftig sind. Störsignale, z.B. von unvermeidlichen andersartigen Anregungsmoden, dürfen nicht registriert werden, aber die durch Dämpfung nach mehrmaligem Hin- und Herlaufen abgeschwächten Sollsignale müssen noch registriert werden. Ein solcher Kompromiß ist bei Hart-PVC nur mühsam zu erreichen. Sie sollten es dennoch probieren und dabei kürzere Stäbe und kleine m-Werte wählen. Die von den Detektoren aufgenommenen Signale können an einem Oszilloskop beobachtet werden.

3. Bestimmen Sie für wenigstens einen Stoff den Schubmodul G aus der Schwingungsdauer T von Torsionsschwingungen. Ein zylindrischer Stab aus dem zu untersuchenden Stoff ist am oberen Ende fest eingespannt und trägt am unteren Ende eine Drehscheibe. Die Drehscheibe wird um einen kleinen Winkel (ca. 10^0 ; warum so klein?) ausgelenkt und führt dann, losgelassen, Drehschwingungen aus. Verwenden Sie die Scheibe ohne, mit zwei und mit vier Zusatzmassen. Bestimmen Sie aus den zugehörigen Schwingungsdauern sowie den berechenbaren Zusatzträgheitsmomenten das Trägheitsmoment der Scheibe.
Frage: Wie könnte man G für einen Probekörper gleicher Geometrie statisch bestimmen?

Zubehör:

Zu 1: Zeischiene mit Reitern; beleuchtete mm-Skala; Auflagevorrichtung für Stäbe; 2 aufsteckbare Planspiegel; Waagschale für Gewichtsstücke, mit Hängevorrichtung für die Stäbe; Satz Gewichtsstücke; diverse Probestäbe mit rechteckigem Querschnitt; Bandmaß; Schieblehre.

Zu 2: Zeischiene mit Reitern; Stativmaterial; Pendel mit Stahlkugel; 2 Tischchen mit Schaumstoffauflage zum weichen Auflegen der Stäbe; Probestäbe (Messing, 984g; Edelstahl, 926g; Aluminium, 327g; Kupfer, 1032g; Hart-PVC, 167g); aufsteckbarer Lautsprecher mit Vorverstärker als Detektor; Aufsteckhülse mit Piezokeramikscheibe als Detektor; Gerät zur Zeitmessung in $10\mu\text{s}$ -Schritten zwischen 2, 4, 6, 8 konsekutiven Signalen vom Detektor; Oszilloskop.

Zu 3: Wandaufhängung für Torsionsstäbe; zylindrische Probestäbe aus verschiedenen Stoffen; Drehscheibe mit Befestigungsmöglichkeit an den Stäben; vier Zusatzmassen (Masse jeweils 837g, Abstände ihrer Schwerpunkte von der Drehachse jeweils 110mm); Mikrometerschraube; Stoppuhr.

Literatur:

(BB: Zu Balkenbiegung; SG: Zu Schallgeschwindigkeit; TS: Zu Torsionsschwingungen)

Westphal: *Physikalisches Praktikum* (BB, TS)

Gerthsen, Kneser, Vogel: *Physik* (BB, TS)

Bergmann, Schaefer: *Experimentalphysik*, Bd.1 (BB, TS, SG)

Feynman: *Lectures on Physics* (BB, TS)

Hammer: *Grundkurs der Physik* (SG)

Walcher: *Praktikum der Physik* (BB, TS)

Macherauch: *Werkstoffkunde* (allgemein)

Physikalisches Anfängerpraktikum - P1

Elastizität
P1-11

Versuchsvorbereitung von
Raphael Schmager

Gruppe: Do-28

Durchgeführt am 19. Januar 2012

Vorbemerkung

Im Versuch Elastizität geht es um das Verhalten von Festkörpern unter der Einwirkung äußerer Kräfte. Dabei werden das **Elastizitätsmodul E** und **Schubmodul G** für einige Stoffe ermittelt.

Der Versuch besteht im wesentlichen aus drei Aufgaben. In der ersten Aufgabe wird das Elastizitätsmodul E durch Balkenbiegung, in der zweiten durch Logitudinalwellen bestimmt. In der dritten Aufgabe geht es um Torsionsschwingungen; und damit um das Schubmodul G.

1 Elastizitätsmodul E durch Balkenbiegung

Als erstes soll das Elastizitätsmodul E aus der Biegung zweiseitig aufgelegter und in der Mitte belasteter flachen Stäbe bestimmt werden. Dazu messen wir die Kippung α der Stabenden.

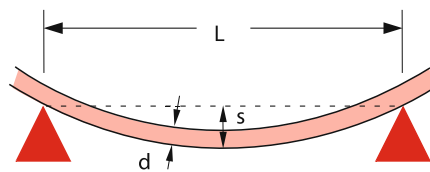


Abbildung 1: Durchbiegung eines Balkens, der an bei den Enden gelagert ist

Die Prinzipskizze aus der Versuchsvorbereitung zur Aufgabe 1 zeigt sehr schön die im Versuch benötigten Anordnung. An den Stabenden steht jeweils ein Spiegel (S_1 und S_2). Mit dem Fernrohr lässt sich nun im ungebogenen sowie im belasteten Zustand die Skala ablesen. Man kann dort die Änderung s ablesen.

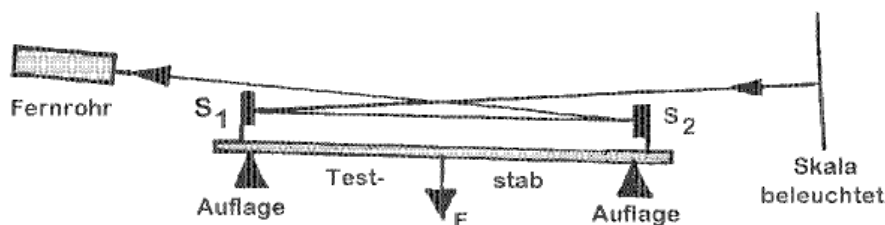


Abbildung 2: Prinzipskizze aus der Versuchsvorbereitung zur Aufgabe 1

Aus diesem Wert und den einfach messbaren Längen kann die Kippung α berechnet werden. Dazu gehen wir von der Beziehung $\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A}$ für die Dehnung bzw Stauchung in Abhängigkeit des Elastizitätskoeffizient $\frac{1}{E}$ aus. Daraus ergibt sich:

$$dF = \frac{\Delta L}{L} E \cdot dA$$

Nun legen wir das Koordinatensystem so, dass die Neutrale Faser des Stabes (dies ist die gedachte Linie im Stab, die weder gedehnt noch gestaucht wird) entlang der x-Achse liegt. Die z-Achse zeige senkrecht nach oben. Bei konstanter Breite b des Stabes gilt:

$$dA = b \cdot dz$$

Betrachten wir nun infinitesimale Scheibchen überhalb oder unterhalb der Neutralen Faser so ändert sich dort die Länge $L = dx$ in Abhängigkeit vom Abstand zur x-Achse. Es ergibt sich für die Längenänderung also:

$$\Delta L = z \cdot \tan(d\alpha) \approx z \cdot d\alpha$$

Setzt man dies alles in die Formel für die Kraftänderung ein so erhält man:

$$dF = z \cdot E \cdot b \cdot \frac{dz}{dx} \cdot d\alpha$$

Durch die Kraft dF entsteht ein Drehmoment:

$$dM = z \cdot dF$$

Damit ergibt sich:

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \cdot dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 b E \frac{d\alpha}{dx} dz = \frac{1}{12} h^3 b E \frac{d\alpha}{dx}$$

Überlegt man sich das Drehmoment nocheinmal, vereinfacht an einem Stab der Länge $\frac{L}{2}$ auf den eine Kraft $\frac{F}{2}$ am Ende senkrecht nach unten wirkt, so hängt dieses von der Entfernung x vom Auflagepunkt auf dem Stab ab. An der Stelle $x = 0$ ist $M_0 = 0$. In der Mitte, also bei $x = \frac{L}{2}$ ist es $\frac{F}{2} \frac{L}{2}$. Diese Überlegung ist Äquivalent zu einem ganzen Stab, welcher an beiden Seiten aufliegt und auf dessen Mitte die Kraft F wirkt. Wir setzten also die Drehmomente gleich und erhalten für die Kippung α :

$$M = \frac{F}{2} \cdot x = \frac{1}{12} h^3 b E \frac{d\alpha}{dx} \quad \Rightarrow \quad d\alpha = \frac{F}{2} \frac{12x}{b E h^3} dx$$

Nun integrieren wir noch vom Stabanfang bis in die Mitte des Stabes $\frac{L}{2}$.

$$\alpha = \int d\alpha = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{F}{2} \frac{12x}{b E h^3} dx = \frac{3 \cdot F \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot b \cdot h^3}$$

Die Kippung α lässt sich nun wie oben erwähnt mit Hilfe der Änderung s welche man durch das Fernrohr auf der beleuchteten Skala ablesen kann, bestimmen. Bei einem Biegungswinkel von α ändert sich jedoch aufgrund des Aufbaus (siehe Skizze oben) der Einfallswinkel des "Stahls" um 2α . Somit trifft der Strahl um $2\alpha \cdot L$ verschoben auf den Spiegel S_1 . Hier wird er erneut um 2α verschoben. Also ändert sich dort der Winkel auf 4α . Der Strahl wird hier um $4\alpha \cdot (L + l)$ verschoben. Dabei bezeichnet l den Abstand von S_2 zur Skala. Es ergibt sich somit eine Gesamtverschiebung von

$$s \approx 2\alpha \cdot L + 4\alpha(L + l) \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx \frac{s}{6L + 4l}$$

Zu beachten ist, dass hier überall die Kleinwinkelnäherung verwendet wurde.

2 Elastizitätsmodul E durch Logitudinalwellen

Im zweiten Teil soll das Elastizitätsmodul E noch einmal bestimmt werden. Nun jedoch aus der Geschwindigkeit v von Logitudinalwellen im Stab, welche wir erzeugen werden. Dabei wird die Zeit T gemessen, die ein Verdichtungsstoß braucht, um n -mal im Stab der Länge L durch Reflexion an den Stabenden hin- und herzulaufen. Solch ein Verdichtungsstoß kann durch axiales Anschlagen einer Pendelkugel am Stabende realisiert werden.

Die Signale werden beispielsweise mit einem Piezokristall gemessen. An ein an einen Detektor angeschlossenes "elektrisches Gerät" misst dann die Zeit, welche zwischen Eintreffen des ersten und des n -ten Signales vergeht.

$$s = \frac{s}{T} = \frac{(n-1) \cdot 2L}{T}$$

Dazu soll die Zeit T in Abhängigkeit von n gemessen werden. Daraus lässt sich dann Die Geschwindigkeit v als Steigung der daraus resultierenden Geraden ermittelt werden. Durch die Regression(sgerade) verringern wie den statistischen Fehler.

Mit der Geschwindigkeit können wir nun das Elastizitätsmodul E bestimmen. Dazu betrachten wir ein Stabelement der Länge Δx mit der Masse $\Delta m = A \cdot \Delta x \cdot \rho$. Es ergibt sich für die Beschleunigende Kraft auf dieses Stabelement:

$$F = m \cdot a = \Delta m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \rho \cdot A \cdot \Delta x \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

Führen wir auch das elastische Gesetz über in die Infinitesimalschreibweise, so ergibt sich:

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad \Rightarrow \quad F = E \cdot A \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \cdot x$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich die Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

Man erkennt nun, dass der Term $\frac{E}{\rho}$ gerade dem Quadrat der Geschwindigkeit entspricht. Es ergibt sich somit für das Elastizitätsmodul:

$$E = v^2 \cdot \rho$$

Außer dem Piezodetektor soll auch noch ein "elektrodynamisches System" verwendet werden. Dies besteht aus einem Lautsprecher, welcher durch einen angeklebten Stab auf Membran und Stab als Mikrophon wirkt und so die Stöße in ein elektrisch gut messbares Signal umwandelt.

3 Schubmodul G durch Torsionsschwingungen

Im letzten Teil, soll noch für wenigstens einen Stoff der Schubmodul G aus der Schwingungsdauer T von Torsionsschwingungen bestimmt werden.

Dazu befindet sich an einem zylindrischen Stab, welcher am oberen Ende fest eingespannt ist, eine Drehscheibe am (unteren) Ende. Die Drehscheibe wird um kleine Winkel ausgelenkt. Lässt man die Scheibe los, so führt sie Drehschwingungen aus. Wir wählen den Winkel $\varphi < 10^\circ$, damit wir im linearen Bereich der elastische Verformung bleiben und das Material einerseits nicht (dauerhaft) Verformen oder Zerstören.

Greift nun eine Kraft F tangential an einer Fläche A an (siehe Skizze), so wirkt eine Scherkungskraft. Als Scherspannung definiert man nun die pro Flächeneinheit wirkende Kraft.

$$\tau = \frac{F}{A}$$

Zwischen der angreifenden Kraft und der Scherwinkel α findet man bei kleinen Auslenkungen α einen linearen Zusammenhang:

$$F = A \cdot G \cdot \alpha$$

Dabei bezeichnet man die (materialspezifische) Konstante G als Schubmodul.

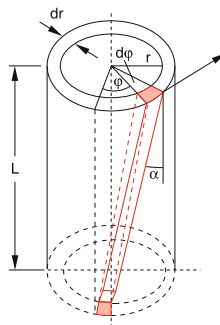


Abbildung 3: Torsion eines Kreiszylinders

Wir teilen einen Holzzylinder gedanklich in viele Hohlzylinder mit der Länge L , Dicke dr und Radius r . Auf so einen Hohlzylinder wirkt dann ein Drehmoment dM , wodurch er um den Winkel φ verdreht wird.

$$dM = r \cdot dF$$

Für den Scherwinkel ergibt sich:

$$\tan(\alpha) = \frac{r \cdot \varphi}{L} \quad \text{mit } r \cdot \varphi \ll L \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx r \cdot \frac{\varphi}{L}$$

Damit folgt:

$$dM = r \cdot dF = r^2 G \frac{\varphi}{L} \cdot dA = r^2 G \frac{\varphi}{L} \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi r^3 G \varphi}{L} dr$$

Durch Integration über r von 0 bis R , erhält man:

$$M = \int dM = \int_0^R \frac{2\pi r^3 G \varphi}{L} dr = \frac{\pi G R^4}{2L} \varphi$$

Das Ziel ist es nun anhand der gemessenen Periodendauer T das Schubmodul G , sowie das Trägheitsmoment M der Drehscheibe zu bestimmen.

Aus dem Drehmoment ergibt sich auch die Winkelrichtgröße D^* :

$$M = D^* \cdot \varphi \quad \Rightarrow \quad D^* = \frac{\pi G R^4}{2L}$$

Die vorliegende Schwingung gehorcht der Differentialgleichung des harmonischen Oszillators.

$$\ddot{\varphi} + \frac{D^*}{\theta} \varphi = 0$$

Aus dieser können wir auf die Kreisfrequenz w schließen und aus ihr erhalten wir die Schwingungsdauer T .

$$w = \sqrt{\frac{D^*}{\theta}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{D^*}}$$

Damit ergibt sich das Schubmodul in Abhängigkeit der Schwingungsdauer zu:

$$G = \frac{8\pi L \theta}{R^4 T}$$

Dabei ist θ das Trägheitsmoment der Anordnung. Dieses ergibt sich aus dem Trägheitsmoment θ_0 der Anordnung ohne Gewichte auf der Drehscheibe und den beiden Trägheitsmomenten θ_1 und θ_2 mit den unterschiedlichen Massen m_1 und m_2 auf der Drehscheibe.

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \quad \text{mit} \quad \theta_{1,2} = \frac{m_i}{2} d^2 + m a^2$$

Der Abstand der Gewichte soll $a = 110 \text{ mm}$ vom Schwerpunkt betragen. Der Radius d der Gewichte muss im Versuch noch gemessen werden.

Da leider θ_0 nicht bekannt ist, werden wir die Messungen mit den Zusatzgewichten durchführt und jeweils die zugehörige Schwingungsdauer T gemessen. Aus den Differenzen ΔT und $\Delta \theta$ wird dann das Schubmodul gemessen.

$$G = \frac{8\pi L}{R^4} \frac{\Delta \theta}{\Delta T^2}$$

Das G-Modul lässt sich auch statisch bestimmen. Dies könnte man durch Auslenken des Stabes um einen bekannten Winkel bewerkstelligen. Dazu müsste man nur die Kraft messen, die zur Auslenkung gebraucht wird und mit obiger Formel ließe sich so auch recht einfach das G-Modul bestimmen.

4 Quelle

- Vorbereitungsmappe zum Versuch "Elastizität"
- H. J. Eichler H.-D. Kronfeldt J. Sahm, Das Neue Physikalische Grundpraktikum, 2. Auflage, Springer-Verlag

Physik Praktikum 1

Elastizität

Tobias Renz

Gruppe: Do 28

19. Januar 2012

Versuchsvorbereitung

Einführung

In diesem Versuch wird das Verhalten von Festkörpern untersucht, wenn auf diese Körper äußere Kräfte, wie Zugkräfte, Druckkräfte oder Scherkräfte, untersucht. Es werden dann die elastischen Konstanten Elastizitätsmodul E und Schubmodul G für einige Stoffe ermittelt. Die folgenden Gesetze gelten nur in einem bestimmten Bereich, werden die Kräfte zu groß, so wird die Elastizitätsgrenze der Körper überschritten und die linearen Annahmen gelten nicht mehr.

E-Modul

Wirken auf einen Körper, der Länge L , Kräfte, so kann der Körper gedehnt bzw. gestaucht werden. Seine Länge verändert sich um ΔL . Das Verhältnis von ΔL zu L wird als Dehnung ϵ bezeichnet:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

Um eine Dehnung zu erreichen müssen auf den Körper mit Querschnittsfläche A Kräfte wirken. Das Verhältnis der Normalkraft F_n zur Querschnittsfläche A wird als Spannung σ bezeichnet:

$$\sigma = \frac{F_n}{A} \quad (2)$$

Nun kann das Elastizitätsmodul E definiert werden. Es gibt das Verhältnis zwischen Spannung σ und Dehnung ϵ wird als E-Modul bezeichnet.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (3)$$

Der Kehrwert $\frac{1}{E}$ wird als Elastizitätskoeffizient bezeichnet.

Schubmodul

Wirkt auf einen Körper mit Fläche A eine Kraft F_t , die tangential zur Oberfläche angreift, so wird der Körper verformt. Das Verhältnis dieser sogenannten Scherkraft zur

Fläche A wird als Scherspannung τ bezeichnet:

$$\tau = \frac{F_t}{A} \quad (4)$$

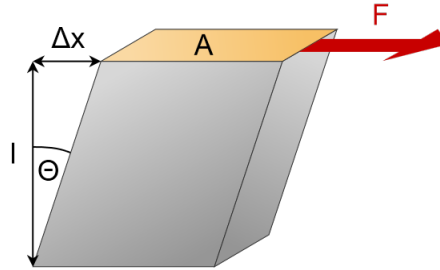


Abbildung 1: Scherung

Die Scherkraft hat eine Verschiebung Δx der Oberfläche zur Folge. Bei einer Höhe L des Körpers ergibt sich der Scherwinkel θ . Der Tangens dieses Winkels wird als Scherung γ bezeichnet:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{L} = \tan \theta \quad (5)$$

Das Verhältnis von Scherspannung zu Scherung wird als Schubmodul G definiert:

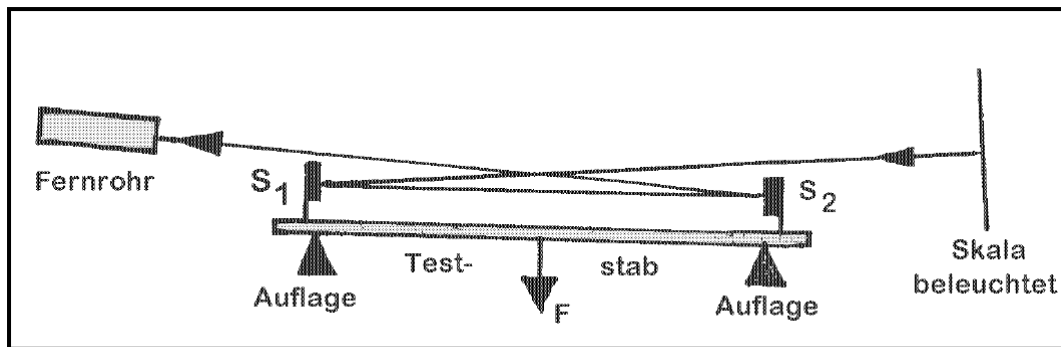
$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (6)$$

Die Grundlegenden Bezeichnungen sind nun eingeführt. Im folgenden werden die einzelnen Aufgaben diskutiert und die benötigten Formeln hergeleitet.

1 Balkenbiegung und E-Modul

In dieser Aufgabe werden für einige Stoffe das Elastizitätsmodul E , aus der Biegung zweiseitiger aufgelagerter und in der Mitte belasteter flacher Stäbe, bestimmt. Es wird dabei die Kippung α der Stabenden bei Belastung gemessen.

Der Versuchsaufbau sieht folgendermaßen aus:



Prinzipskizze zu Aufgabe 1

Abbildung 2: Biegung

Dies entspricht zwei Stäben der Länge $L/2$ die an einem Ende fest eingespannt sind und am anderen Ende durch eine Kraft $F/2$ gebogen werden.

Auf ein Stabelement an der Stelle x wird dann ein Drehmoment:

$$M = \frac{F}{2} \cdot x \quad (7)$$

In der Mittelachse des Stabes verläuft die neutrale Faser, welche weder gedehnt noch gestaucht wird. Das Koordinatensystem wird nun so gelegt, dass die vertikale y Achse dort den Wert 0 hat.

Zur neutralen Ebene parallele Schichten mit Länge dx werden um die Länge dl verlängert:

$$dl = \tan(d\alpha) \cdot y \approx y \cdot d\alpha \quad (8)$$

Hat der Stab die Breite b ergibt sich:

$$dA = b \cdot dy \quad (9)$$

Aus der Definition von E (3) folgt:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F \cdot L}{\Delta L \cdot A} \quad (10)$$

$$\Rightarrow F = \frac{A}{L} \cdot \Delta L \cdot E \quad (11)$$

betrachtet man nun eine infinitesimale Kraft, und benutzt $L = dx$ sowie (8) und (9):

$$\Rightarrow dF = E \cdot \frac{dA}{dx} \cdot y \cdot d\alpha = y \cdot d\alpha \cdot E \cdot b \cdot \frac{dy}{dx} \quad (12)$$

Nun kann das Drehmoment $dM = y \cdot dF$ berechnet werden durch Integration über y von $-h/2$ bis $h/2$:

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y \cdot dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy \cdot y^2 \cdot E \cdot b \cdot \frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{12} \cdot E \cdot b \cdot h^3 \cdot \frac{d\alpha}{dx} \quad (13)$$

Setzt man nun (7) und (13) gleich, so folgt:

$$d\alpha = \frac{6 \cdot F}{E \cdot b \cdot h^3} \cdot x \cdot dx \quad (14)$$

α erhält man nun durch Integration über x von 0 bis $L/2$ zu:

$$\alpha = \frac{3 \cdot F \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot b \cdot h^3} \quad (15)$$

Nun muss noch geklärt werden, wie der Winkel α über die Änderung s auf der Skala bestimmt wird. Es gilt die Näherung für kleine Winkel.

Der Abstand der an den Enden befestigten Spiegeln beträgt auch L .

Denke man sich eine Strahlenquelle im Fernrohr und verfolgt den Lichtweg vom Fernrohr über die Spiegel zur Skala.

Der Lichtstrahl fällt im Winkel α auf den strahlennahen Spiegel und wird dort im Winkel α reflektiert. Die Auslenkung s_1 am strahlenfernen Spiegel beträgt dann:

$$s_1 = 2 \cdot \alpha \cdot L \quad (16)$$

Am skalenfernen Spiegel wird er erneut reflektiert und die zusätzliche Auslenkung s_2 an der Skala durch den zweiten Spiegel beträgt:

$$s_2 = 4 \cdot \alpha(L + a) \quad (17)$$

wobei a der Abstand vom skalennahen Spiegel zur Skala ist.

Die Gesamtauslenkung s beträgt dann:

$$s = s_1 + s_2 = 2 \cdot \alpha \cdot L + s_2 = 4 \cdot \alpha(L + a) \quad (18)$$

2 Longitudinalwellen und E-Modul

Das E-Modul für einige Stoffe wird nun aus der Geschwindigkeit v von Longitudinalwellen in Stäben bestimmt. Dabei wird die Zeit T gemessen, die ein Verdichtungsstoß braucht um n -mal im Stab der Länge hin-und herzulaufen. Die Geschwindigkeit v ist dann:

$$v = \frac{L \cdot 2(n-1)}{T} = \frac{L \cdot m}{T} \quad (19)$$

Es wird die Zeit T gemessen, die zwischen dem Eintreffen des ersten und des m -ten Signals vergeht.

Nun kann man T in Abhängigkeit von m auftragen:

$$T = \frac{L}{v} \cdot m \quad (20)$$

und aus der Steigung der Geraden kann die Geschwindigkeit v berechnet werden. Eine lineare Regression durchzuführen ist genauer als nur ein Wertepaar zu betrachten, da das Ergebnis durch viele Werte genauer wird.

Die Auslenkung s einer Querschnittsfläche ist sowohl Zeit als auch Ortsabhängig. Betrachten wir ein Stabelement der Länge Δx und der Masse Δm auf den eine Kraft F wirkt.

Es gilt:

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta L}{L} = E \cdot A \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \cdot dx \quad (21)$$

Die Kraft bewirkt aber auch eine Beschleunigung:

$$F = m \cdot a = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \Rightarrow F = \rho \cdot A \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (22)$$

Setzt man beides gleich ergibt sich eine Wellengleichung:

$$E \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (23)$$

$$\text{mit } v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (24)$$

3 Torsionsschwingung und Schubmodul

Ein zylindrischer Stab ist am oberen Ende fest eingespannt und trägt am unteren Ende eine Drehscheibe. Nun wird die Drehscheibe um einen kleinen Winkel ausgelenkt und führt dann Drehschwingungen aus. Der Winkel darf nicht zu groß sein um den linearen Bereich nicht zu verlassen.

Die Scheibe wird ohne, mit zwei und mit vier Zusatzmassen verwendet.

Der Vollzylinder wird gedanklich in viele Hohlzylinder mit Länge L , Radius r und Dicke dr aufgeteilt.

Auf einen solchen Hohlzylinder wirkt dann ein Drehmoment $dM = r \cdot dF$, wodurch er um einen Winkel φ verdreht wird.

Der Scherwinkel ergibt sich dann zu:

$$\tan(\alpha) = \frac{r \cdot \varphi}{L} \Rightarrow \alpha \approx \frac{r \cdot \varphi}{L} \quad (25)$$

Aus der Definition des Schubmoduls folgt dann:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F}{A \cdot \tan(\alpha)} \quad (26)$$

$$\Rightarrow F = G \cdot A \cdot \alpha = G \cdot A \cdot \frac{r \cdot \varphi}{L} \quad (27)$$

mit $dA = 2 \pi r dr$

$$\Rightarrow dF = G \cdot \frac{\varphi}{L} \cdot 2\pi r^2 dr \quad (28)$$

damit wird das Drehmoment für einen infinitesimalen Hohlzylinder zu:

$$dM = \frac{2\pi \cdot G \cdot \varphi \cdot r^3}{L} \cdot dr \quad (29)$$

Um nun das Drehmoment für den Vollzylinder wird über r integriert und man erhält:

$$M = \frac{\pi \cdot G \cdot R^4}{2 \cdot L} \cdot \varphi \quad (30)$$

Vergleicht man das Drehmoment mit $M = D^* \cdot \varphi$, sieht man, dass die resultierende Winkelrichtgröße gegeben ist durch:

$$D^* = \frac{\pi \cdot G \cdot R^4}{2 \cdot L} \quad (31)$$

Damit kann dann die Kreisfrequenz ω und die Schwingungsdauer T berechnet werden:

$$\omega = \sqrt{\frac{D^*}{\theta}} \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\theta}{D^*}} \quad (32)$$

Damit ergibt sich dann:

$$G = \frac{8\pi \cdot L}{R^4} \cdot \frac{\theta}{T^2} \quad (33)$$

wobei θ das Trägheitsmoment der Anordnung ist.

Das Trägheitsmoment ergibt sich aus dem Trägheitsmoment θ_0 der Anordnung ohne Gewichte und dem Trägheitsmoment der Gewichte (θ_1 bzw. θ_2) zu:

$$\theta = \theta_0 + \theta_{1/2} \quad (34)$$

Das Trägheitsmoment der Gewichte beträgt:

$$\theta_{1/2} = \frac{1}{2}md^2 + ma^2 \quad (35)$$

mit m = Masse, d = Radius der Gewichte und a = Abstand der Gewichte zur Drehachse

Da das Trägheitsmoment θ_0 nicht bekannt ist, werden die Messungen mit den Zusatzgewichten durchgeführt und jeweils das zugehörige T bestimmt. G wird nun aus der Differenz $\Delta\theta$ sowie aus $(\Delta T)^2$ bestimmt:

$$G = \frac{8\pi \cdot L}{R^4} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta T^2} \quad (36)$$

Frage: Wie könnte man G für einen Probekörper gleicher Geometrie statisch bestimmen? Man könnte G statisch bestimmen, indem man den Stab durch ein bekanntes Drehmoment (benötigte Kraft messen) um einen Winkel φ auslenkt. Dann muss nur noch der Winkel φ gemessen werden und es kann G folgendermaßen berechnet werden:

$$D^* = \frac{M}{\varphi} = \frac{\pi \cdot G \cdot R^4}{2 \cdot L} \quad (37)$$

$$\Rightarrow G = \frac{M \cdot 2 \cdot L}{\varphi \cdot \pi \cdot R^4} \quad (38)$$

4 Quellen

- Versuchsvorbereitung
- Physik für Wissenschaftler und Ingenieure ; Paul A.Tipler
- Abbildung 1:http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Shear_scherung.svg&filetimestamp=20080710105943
- Abbildung 2: Versuchsvorbereitung

Physikalisches Anfängerpraktikum - P1

Elastizität
P1-11

Protokoll von
Tobias Renz und **Raphael Schmager**

Gruppe: Do-28

Versuchsdatum: 19.01.2012

1 Elastizitätsmodul E durch Balkenbiegung

Zunächst wurden die für Aufgabe 1 gemessenen Größen in einer Tabelle zusammengestellt. Dahinter befindet sich jeweils, der von uns für angemessen gehaltene Fehler, den wir beim Abmessen, durch die verwendeten Messinstrumente gemacht habe.

		Wert / mm	Fehler / mm
Abstand:			
	Auflagepunkte L	452	1
	Spiegel (Metalle) L'	442	2
	Spiegel (PVC) L'	449	2,1
	skalennacher Spiegel-Skala a	628	3
Stäbe:			
Alu	Höhe h	6,0	0,1
	Breite b	25,0	0,1
Messing	Höhe h	6,0	0,1
	Breite b	25,0	0,1
PVC	Höhe h	6,1	0,1
	Breite b	25,2	0,1
Eisen	Höhe h	6,0	0,1
	Breite b	25,0	0,1

Tabelle 1: Messgrößen und Fehler

Wir hatten vier Stäbe zu Versuchszwecken zur Verfügung. Diese wurden in die Versuchsanordnung eingebracht. An den Enden wurde je ein Spiegel montiert und in der Mitte wurde eine Schale befestigt, auf welche wir dann verschiedene Gewichte legten. Die Kraft durch die Gewichte führte zu leichter Biegung, welche über die genannte Anordnung der 2 Spiegel und der beleuchteten Skala abgelesen werden konnte. Dazu wird angenommen, dass bei keinem Gewicht, also der Kraft $F=0\text{N}$ die Auslenkung durch das Eigengewicht des Stabes vernachlässigbar klein ist. Dies wird im folgenden wichtig sein, da wir bei der linearen Regression der Messpunkte unseren Achsenabschnitt auf 0 setzten. In folgender Tabelle wurden die Messwerte übersichtlich zusammengefasst. Der Ablesefehler bei den einzelnen Werten für s auf der Skala schützen wir auf $\Delta s = 0,1\text{mm}$. Diese sind nun alle in folgendem Schaubild dargestellt.

Man erkennt, dass PVC eine höhere Elastizität hat, als beispielsweise Aluminium oder gar Eisen. Der Grund dafür liegt ganz einfach im atomaren Aufbau der verschiedenen Stoffe. PVC zählt zu den Kunststoffen, die anderen drei gehören zu den Metallen. Kunststoff besteht im Allgemeinen aus langem Polymerketten, welche zumeist eine starke Verflechtung vorweisen. Durch Belastung reagieren diese auf eine Streckung oder Entflechtung der Ketten und sind so nachgiebig. Im Vergleich dazu stehen die Metalle. Diese weisen eine Gitterstruktur auf, welche sich einer Verformung durch ihre Geometrie und der günstigen Energiekonfiguration widersetzen.

		PVC	Aluminium	Messing	Eisen
m / g	F / N	s / cm	s / cm	s / cm	s / cm
100	0,981	1,12	0,2	0,15	0,06
200	1,962	2,3	0,4	0,3	0,1
500	4,905	5,8	1,0	0,74	0,3
1000	9,81		2,0	1,5	0,7

Tabelle 2: Messwerte: Auslenkung der Stäbe

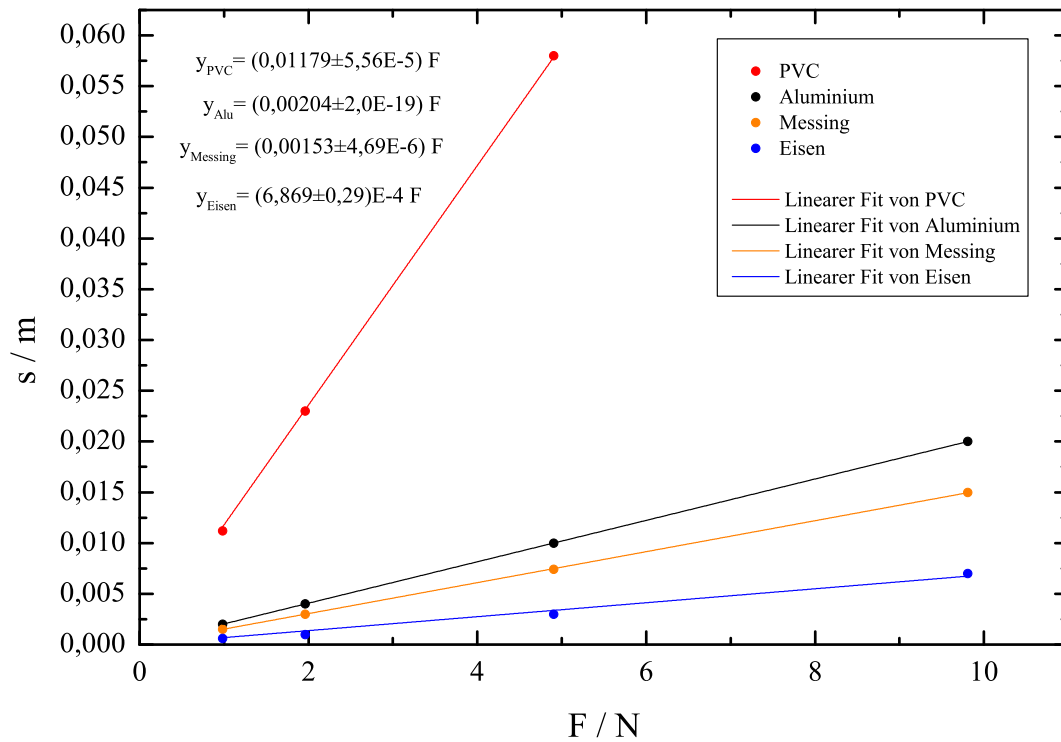


Abbildung 1: Linearer Zusammenhang von Auslenkung und Kraft

$$E = \frac{3 \cdot L^2 \cdot F \cdot (6L' + 4a)}{4 \cdot b \cdot h^3 \cdot s}$$

$$\Delta E_{\text{stat}} = \left| \frac{\partial E}{\partial m} \right| \Delta m = \frac{3 \cdot L^2 \cdot (6L' + 4a)}{4 \cdot b \cdot h^3 \cdot m^2} \cdot \Delta m$$

$$\Delta E_{\text{system}} = \left| \frac{\partial E}{\partial L} \right| \Delta L + \left| \frac{\partial E}{\partial b} \right| \Delta b + \left| \frac{\partial E}{\partial h} \right| \Delta h + \left| \frac{\partial E}{\partial L'} \right| \Delta L' + \left| \frac{\partial E}{\partial a} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial E}{\partial s} \right| \Delta s$$

mit:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial E}{\partial L}\right| &= \frac{3 \cdot L \cdot F \cdot (6L' + 4a)}{2 \cdot b \cdot h^3 \cdot s} \\ \left|\frac{\partial E}{\partial b}\right| &= \frac{3 \cdot L^2 \cdot F \cdot (6L' + 4a)}{4 \cdot b^2 \cdot h^3 \cdot s} \\ \left|\frac{\partial E}{\partial h}\right| &= \frac{9 \cdot L^2 \cdot F \cdot (6L' + 4a)}{4 \cdot b \cdot h^4 \cdot s} \\ \left|\frac{\partial E}{\partial L'}\right| &= \frac{18 \cdot L^2 \cdot F}{4 \cdot b \cdot h^3 \cdot s} \\ \left|\frac{\partial E}{\partial a}\right| &= \frac{3 \cdot L^2 \cdot F}{b \cdot h^3 \cdot s} \\ \left|\frac{\partial E}{\partial s}\right| &= \frac{3 \cdot L^2 \cdot (6L' + 4a)}{4 \cdot b \cdot h^3 \cdot m^2}\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Werte, sowie Fehlergrößen in die obige Formel erhalten wir die folgenden Elastizitätsmodule der einzelnen Stoffe.

$$E_{PVC} = (1,15E10 \pm 5,6E7 \pm 8,37E8)Nm^{-2}$$

$$E_{Alu} = (7,18E10 \pm 0 \pm 8,05E9)Nm^{-2}$$

$$E_{Messing} = (9,58E10 \pm 2,9E7 \pm 1,23E10)Nm^{-2}$$

$$E_{Eisen} = (2,13E11 \pm 9,0E9 \pm 4,46E10)Nm^{-2}$$

Im Vergleich mit den Literaturwerten (Tabelle befindet sich am Ende der 2. Aufgabe) ist zu erkennen, dass bis auf PVC alle Messwerte gut mit der Literatur übereinstimmen. Zumindest liegen diese im Bereich der dort für die jeweiligen Stoffe angegeben wird. Bei PVC liegen wir etwa um den Faktor 10 darüber. Gründe dafür sind stoffspezifische Eigenschaften wurde oben schon genannt. Des Weiteren könnte es sein, dass wir durch zu große Auslenkungen in den nicht lineare Bereich gekommen sind.

2 Elastizitätsmodul E durch Logitudinalwellen

Die Longitudinalwellen wurden durch axiales Anschlagen einer Pendelkugel an einem Stabende erzeugt und es wurde die Zeit gemessen, die ein Verdichtungsstoß benötigt um n-mal im Stab hin und herzulaufen. Die Zeit T, die zwischen dem ersten und dem m-ten (m= 2,4,6,8) eintreffenden Signal vergeht, wurde durch ein einen Lautsprecher, bzw. einmal mit Hilfe eines Piezokristall gemessen.

Zunächst die Werte für die Durchlaufzeiten T in ms in Abhängigkeit vom jeweiligen Stoff und m:

A(1) bedeutet, dass die Zeit mit dem Lautsprecher gemessen wurden und A(2) wurde mit dem Piezokristall gemessen.

Stoff / m	2	4	6	8
Edelstahl	0,63	1,83	3,03	4,24
Messing	0,91	2,62	4,34	6,06
Kupfer	0,82	2,37	3,93	5,49
PVC	1,04	2,79	6,29	8,88
Alu (1)	0,63	1,79	2,95	4,13
Alu (2)	0,61	1,79	2,96	4,15

Tabelle 3: Messwerte zu Aufgabe 2

Die Geschwindigkeit berechnet sich folgendermaßen:

$$v = \frac{L \cdot 2 \cdot (m - 1)}{T}$$

Nun kann man T über m auftragen:

$$T = \frac{L \cdot 2 \cdot m}{v} - \frac{2 \cdot L}{v}$$

Wir tragen nun im folgenden die gemessenen Zeiten T(m) über m aus und bestimmen dann aus linearer Regression die Steigung a der Geraden.

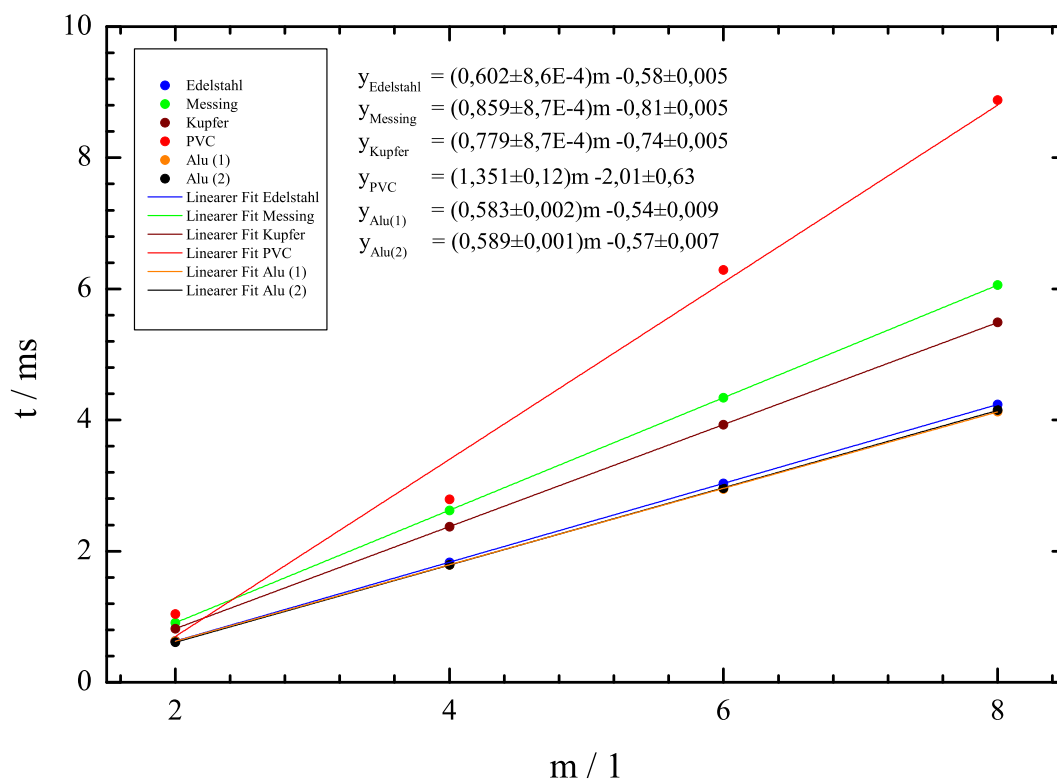


Abbildung 2: Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit

Die Geschwindigkeit berechnet sich dann folgendermaßen aus a :

$$v = \frac{2 \cdot L}{a}$$

Es ergeben sich folgende Geschwindigkeiten:

	a / ms	L / cm	v / ms^{-1}
Edelstahl	0,602	148,7	4940,199336
Messing	0,859	148,8	3464,493597
Kupfer	0,779	148,6	3815,147625
PVC	1,351	59,8	885,2701702
Alu (1)	0,583	148,7	5101,200686
Alu (2)	0,589	148,7	5049,235993

Tabelle 4: Geschwindigkeit v

Aus den berechneten Geschwindigkeiten v des jeweiligen Materials kann das E-Modul E berechnet werden:

$$E = \rho \cdot v^2$$

Dazu müssen nun noch die Dichten ρ aus dem Volumen V und der Masse m der Stäbe berechnet werden.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

	L / cm	d / mm	V / m^3	m / g	ρ / kgm^{-3}
Edelstahl	148,7	10	1,17E-04	926	7,93E+03
Messing	148,8	10	1,17E-04	984	8,42E+03
Kupfer	148,6	10	1,17E-04	1032	8,84E+03
PVC	59,8	10	4,70E-05	68,3	1,45E+03
Alu	148,7	10	1,17E-04	327	2,80E+03

Tabelle 5: Dichteberechnung

Für das E-Modul ergeben sich dann folgende Werte:

	$E_{\text{gemessen}} / \text{kNmm}^{-2}$	$E_{\text{literatur}} / \text{kNmm}^{-2}$
Edelstahl	194	210-213
Messing	101	80-127
Kupfer	129	130-137
Eisen	-	208,2-223
PVC	1,14	1-3,8
Alu (1)	73	65-72
Alu (2)	71	65-73

Tabelle 6: E-Modul

Im Vergleich mit den Literaturwerten sieht man, dass alle Werte im Bereich bzw. relativ nahe am Bereich der Literaturwerte liegen. Der Unterschied beim Aluminium zwischen der Messung mit dem Lautsprecher und der Messung mit dem Piezokristall ist nur sehr gering. Man kann sagen, dass diese Messmethode sehr gute Ergebnisse liefert.

3 Schubmodul G durch Torsionsschwingungen

Es soll nun das Schubmodul G für einen Aluminiumstab und für einen Kupferstab aus der Schwingungsdauer der Drehschwingung berechnet werden. Dazu wird der Stab am oberen Ende fest eingespannt und am unteren Ende wird eine Drehscheibe befestigt. Nun wird die Drehscheibe um einen kleinen Winkel ausgelenkt und dann die Periodendauer T gemessen. Diese Messung wird durchgeführt, mit keinem, mit zwei und mit vier Zusatzgewichten.

Unser Aluminiumstab hat eine Länge $L = (77,5 \pm 0,1)\text{cm}$ und einen Durchmesser $d = (0,40 \pm 0,01)\text{cm}$.

Der Kupferstab hat eine Länge $L = (76,3 \pm 0,1)\text{cm}$ und einen Durchmesser $d = (0,20 \pm 0,01)\text{cm}$. Ein Zusatzgewicht hat eine Masse $m = 837\text{g}$, einen Radius $r = (34,9 \pm 0,1)\text{mm}$ und der Abstand vom Schwerpunkt zur Drehachse beträgt $a = 110\text{mm}$.

Aluminium:	0 Gewichte:			2 Gewichte:			4 Gewichte:		
Anzahl Perioden n_T	t/s	T_0/s	$\Delta T_0/\text{s}$	t/s	T_2/s	$\Delta T_2/\text{s}$	t/s	T_4/s	$\Delta T_4/\text{s}$
10	7,1	0,71	0,05	12,6	1,26	0,05	16,4	1,64	0,05
20	14,4	0,72	0,03	25,3	1,27	0,03	32,6	1,63	0,03
30	21,6	0,72	0,02	38,0	1,27	0,02	49,1	1,64	0,02

Tabelle 7: Torsionsschwingung bei Aluminium

Kupfer:	0 Gewichte:			2 Gewichte:			4 Gewichte:		
Anzahl Perioden n_T	t/s	T_0/s	$\Delta T_0/s$	t/s	T_2/s	$\Delta T_2/s$	t/s	T_4/s	$\Delta T_4/s$
5	-	-	0,10	19,5	3,90	0,10	24,9	4,98	0,10
10	21,6	2,16	0,05	39,0	3,90	0,05	49,5	4,95	0,05
15	-	-	0,03	57,7	3,85	0,03	74,4	4,96	0,03
20	43,5	2,18	0,03	76,6	3,83	0,03	99,1	4,96	0,03
25	-	-	0,02	96,1	3,84	0,02	123,8	4,95	0,02
30	65,3	2,18	0,02	115,0	3,83	0,02	148,6	4,95	0,02

Tabelle 8: Torsionsschwingung bei Kupfer

Aus der Messung mit zwei und vier Zusatzgewichten also T_2 und T_4 berechnen wir das Schubmodul G folgendermaßen:

$$G = \frac{8\pi \cdot L}{R^4} \cdot \frac{\theta_4 - \theta_2}{T_4^2 - T_2^2}$$

Wir benötigen noch die Differenz $\theta_4 - \theta_2$. Die Differenz ist gerade das Trägheitsmoment zweier Zusatzgewichte also θ_2 . Es berechnet sich folgendermaßen:

$$\theta_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (r/2)^2 + m \cdot a^2\right) = 0,0213 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Der Fehler für θ_2 ergibt sich folgendermaßen:

$$\Delta\theta_2 = \left| \frac{\partial\theta_2}{\partial r} \right| = 2 \cdot (m \cdot (r/2)) \cdot \Delta r = 0,02 \cdot 10^{-4}$$

Man sieht, dass der Fehler um den Faktor 10000 kleiner ist als der Wert. Aus diesem Grund vernachlässigen wir im folgenden den Fehler für das Trägheitsmoment.

Wir berechnen nun G für jeden Wert von $(T_4^2 - T_2^2)$ aus und berechnen von diesen Werten den Mittelwert. Unser statistischer Fehler ergibt sich dann aus der Standardabweichung:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Es ergeben sich folgende Wert und statistische Fehler:

Aluminium:	T_2 / s	T_4 / s	G_{Alu} / GPa
	1,26	1,64	23,53
	1,27	1,63	24,54
	1,27	1,64	24,14
Mittelwert			24,07
Standardabweichung			0,51

Tabelle 9: Schubmodul von Aluminium

Kupfer:	T_2 / s	T_4 / s	G_{Kupfer} / GPa
	3,90	4,98	42,59
	3,90	4,95	43,96
	3,85	4,96	41,66
	3,83	4,95	41,33
	3,84	4,95	41,91
	3,83	4,95	41,51
Mittelwert			42,16
Standardabweichung			0,98

Tabelle 10: Schubmodul von Kupfer

Nun muss noch der systematische Fehler für das Schubmodul von Aluminium bzw. Kupfer berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 \Delta G_{Alu} &= \left| \frac{\partial G}{\partial L} \right| \Delta L + \left| \frac{\partial G}{\partial R} \right| \Delta R + \left| \frac{\partial G}{\partial T_4} \right| \Delta T_4 + \left| \frac{\partial G}{\partial T_2} \right| \Delta T_2 \\
 &= \frac{8\pi\theta_2 L}{R^4(T_4^2 - T_2^2)} \left[\frac{\Delta L}{L} + \frac{3\Delta R}{R} + \frac{2(\Delta T_4 + \Delta T_2)}{T_4^2 - T_2^2} \right] \\
 &= 6,88 GPa \\
 \Delta G_{Kupfer} &= 10,38 GPa
 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Werte für das Schubmodul G:

$$\begin{aligned}
 G_{Alu} &= (24,07 \pm 0,51 \pm 6,88) GPa \\
 G_{Kupfer} &= (42,16 \pm 0,98 \pm 10,38) GPa
 \end{aligned}$$

Im Vergleich dazu ist der Literaturwert zum Schubmodul $G_{Alu,lit} = (25,8 - 26) GPa$ und $G_{Kupfer,lit} = (39 - 48) GPa$. Wir liegen mit unseren Fehlern gut in diesem Bereich. Die großen Fehler ergeben sich wahrscheinlich aus dem Faktor R^4 .

Zum Schluss soll noch das unbekannte Trägheitsmoment θ_0 der Anordnung ohne Zusatzgewichte bestimmt werden.

Es gilt:

$$G = \frac{8\pi \cdot L}{R^4} \frac{\theta_i}{T_i^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta_0}{T_0^2} = \frac{\theta_0 + \theta_2}{T_2^2} = \frac{\theta_0 + \theta_4}{T_4^2}$$

$$\theta_0 = \theta_{2/4} \cdot \frac{T_0^2}{T_{2/4}^2 - T_0^2}$$

Das heißt wir können nun θ_0 jeweils aus den Messungen von Aluminium und Kupfer und jeweils aus den Messungen von $T_0; T_2$ sowie $T_0; T_4$ berechnen. Es ist zu beachten, dass $\theta_4 = 2 \cdot \theta_2$.

Es ergeben sich dann insgesamt 12 Werte für θ_0 , woraus wir den Mittelwert bilden. Unser statistischer Fehler ergibt sich wieder aus der Standardabweichung.

Aluminium:	T_0 / s	T_2 / s	θ_0 aus θ_2 / kgm^2	T_4 / s	θ_0 aus θ_4 / kgm^2
	0,71	1,26	0,010	1,64	0,010
	0,72	1,27	0,010	1,63	0,010
	0,72	1,27	0,010	1,64	0,010
Mittelwert			0,010		0,010
Standardabweichung			0,00		0,00
Systematischer Fehler			0,0034		0,0054

Tabelle 11: Trägheitsmoment θ_0 aus Messung mit Aluminium

Kupfer:	T_0 / s	T_2 / s	θ_0 aus θ_2 / kgm^2	T_4 / s	θ_0 aus θ_4 / kgm^2
	2,16	3,90	0,0094	4,95	0,010
	2,18	3,83	0,010	4,96	0,010
	2,18	3,83	0,010	4,95	0,010
Mittelwert			0,010		0,010
Standardabweichung			0,00		0,00
Systematischer Fehler			0,0032		0,0045

Tabelle 12: Trägheitsmoment θ_0 aus Messung mit Kupfer

Nun muss noch der systematische Fehler für θ_0 berechnet werden:

$$\Delta\theta_0 = \left| \frac{\partial\theta_0}{\partial T_0} \right| \cdot \Delta T_0 + \left| \frac{\partial\theta_0}{\partial T_i} \right| \cdot \Delta T_i = \theta_0 \cdot \left(\frac{2}{T_0} + \frac{2 \cdot T_0}{T_i^2 - T_0^2} \right) \Delta T_0 + \left(\frac{2 \cdot \theta_0 \cdot T_i}{T_i^2 - T_0^2} \right) \Delta T_i$$

mit $\Delta T_0 = \Delta T_i = 0,03s$ und $i = 2$ oder 4

$$\Delta\theta_0 = \theta_0 \cdot \left(\frac{2}{T_0} + \frac{2 \cdot (T_0 + T_i)}{T_i^2 - T_0^2} \right) \Delta T_0$$

Daraus ergibt sich:

$$\theta_0 = (0,010 \pm 0,00 \pm 0,0041) kgm^2$$

Wahrscheinlich ist der systematische Fehler so groß, da der Fehler für die Zeit relativ groß gewählt wurde.

4 Quelle

Literaturwerte der E- und G-Module von:

<http://wiki.epfl.ch/fournisseurs/documents/werkstoffgruppen.xls> (Stand: 19.01.2012, 22:03Uhr)