Elektrische_Messverfahren

November 17, 2023

1 Fakultät für Physik

1.1 Physikalisches Praktikum P1 für Studierende der Physik

Versuch P1-34, 35, 36 (Stand: Oktober 2023)

Raum F2-17

2 Elektrische Messverfahren

Name: *surname1* Vorname: *name1* E-Mail: *mail1*

Name: *surname2* Vorname: *name2* E-Mail: *mail2*

Gruppennummer: *groupnumber*

Betreuer:

Versuch durchgeführt am: *date*

Beanstandungen:

Testiert am: ______________________ Testat: ______________________

[1]:
```
# Hilfsfunktionen. Nicht weiter beachten
from IPython.core.display import Markdown
from IPython.display import display
def M_helper_func(txt):
    #print('fr"'+txt.replace("{","{{").replace("}","}}").replace("[!","{").
 ↪replace("!]","}")+'"')
    execreturnvalue = ""
    loc = {}
    exec('execreturnvalue = fr"<div style=\'margin-left: 8px;\'>'+txt.
 ↪replace("{","{{").replace("}","}}").replace("[!","{").replace("!]","}")+'</
 ↪div>"', globals(), loc)
    display(Markdown(loc["execreturnvalue"]))
    return loc["execreturnvalue"]

from IPython.core.magic import (register_line_magic,
                                register_cell_magic)
@register_line_magic
def m(line):
    M_helper_func(line)

import os
import numpy as np
from numpy import pi
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib as mpl
import scipy as sci
import kafe2
from uncertainties import ufloat, unumpy
```

```
from uncertainties.umath import sqrt as usqrt
mpl.rcParams['figure.dpi'] = 100
```

3 Durchführung

3.1 Aufgabe 1: Innenwiderstände von Strom- und Spannungsmessgeräten

3.1.1 Aufgabe 1.1: Strommessgerät

Messen Sie den Innenwiderstand R_i^I des μA-Multizet Messgeräts im 1 mA-Bereich.

- Schließen Sie hierzu das Strommessinstrument in Reihe mit einem festen 1 k□-Widerstand und einem regelbaren 10 k□-Widerstand an eine Gleichspannung von 6 V an.
- Stellen Sie den Messbereich des μA-Multizet Messgeräts auf 1 mA.
- Notieren Sie sich den eingestellten Wert des Potentiometers.
- Schalten Sie dann ein Spannungsmessinstrument (AV□-Multizet im 0, 3 V-Bereich) zum Strommessinstrument parallel.

Berechnen Sie aus den gleichzeitig angezeigten Werten von Strom und Spannung R_i^I.

Die Spannungsquelle hat im Leerlauf 7.1582V geliefert anstatt der angegebenen 6V

[2]:
```
# Spannung Quelle Leerlauf 7.1582 V
# TODO: Unsicherheit 1kΩ Widerstand irgendwie einbeziehen
U_11 = 115*10**(-3) # gemessene Spannung hier
ΔU_11 = 0.01*300*10**(-3)# 300mV Skala
I_11 = 0.64*10**(-3) # gemessener Strom hier
ΔI_11 = 0.01*3*10**(-3)# 3mA Bereich #abgelesene Unsicherheit hier
RI_i= U_11/I_11

ΔRI_i = np.sqrt(I_11**(-2)*ΔU_11**2+(U_11/I_11**2)**2*ΔI_11**2)
%m Der Innenwiderstand des µA-Multizets im 3mA-Bereich beträgt nach unserer␣
↪Messung $R_i^I =[!RI_i:.2f!]\,\Omega$ mit einer Unsicherheit von $[!ΔRI_i:.2f!
↪]\,\Omega$.
```

Der Innenwiderstand des µA-Multizets im 3mA-Bereich beträgt nach unserer Messung $R_i^I = 179.69\,\Omega$ mit einer Unsicherheit von $9.64\,\Omega$.

3.1.2 Aufgabe 1.2: Spannungsmessgerät

Berechnen Sie aus den Messdaten von **Aufgabe 1.1** den Innenwiderstand R_i^U des AV□-Multizets im 0, 3 V-Bereich.

- Nehmen Sie dazu an, dass die Parallelschaltung von R_i^U zu R_i^I den Gesamtstrom im Stromkreis nur vernachlässigbar ändert.
- Prüfen Sie diese Annahme nachträglich und verbessern Sie in einem zweiten Rechenschritbt mit Hilfe der ersten R_i^U-Näherung diesen Wert. Dies ist ein häufig genutztes iteratives Näherungsverfahren, das in diesem Fall die Aufstellung und Lösung einer quadratischen Gleichung ersetzt.

```
[3]: #TODO Werte von oben hier rein
R_P = 5.49 * 10**3 #10 Ω Skalenabstände

I_0 = 1*10**-3
I_ges = 1*10**-3 # Startwert nicht wichtig
RU_i = None

for i in range(100):
    I_diff = I_ges - I_11
    RU_i = U_11/I_diff
    I_ges = I_0 * (R_P+1000+RI_i) / (R_P+1000+1/(1/RI_i+1/RU_i))

%m Mit dem iterativen Verfahren ergibt sich für den Innenwiderstand des AVΩ-
Multizets im 300mV-Bereich ein Wert von $R_i^U =[!RU_i:.2f!]\,\Omega$.

%m Der Gesamtstrom im Kreis nimmt laut Iterativem Verfahren um $[!(I_ges -␣
↪I_0)*1E6!] \mu A$ zu.
%m Ohne betrachtung der Stromzunahme berechnet sich der Widerstand zu $[!U_11/
↪(I_0 - I_11)!] \Omega$, was sehr nah am verbesserten Wert ist. Die Annahme,␣
↪dass sich der Stromfluss nicht ändert ist also gut.
```

Mit dem iterativen Verfahren ergibt sich für den Innenwiderstand des AVΩ-Multizets im 300mV-Bereich ein Wert von $R_i^U = 310.84\,\Omega$.

Der Gesamtstrom im Kreis nimmt laut Iterativem Verfahren um $9.96725731895222 \mu A$ zu.

Ohne betrachtung der Stromzunahme berechnet sich der Widerstand zu $319.44444444444445 \Omega$, was sehr nah am verbesserten Wert ist. Die Annahme, dass sich der Stromfluss nicht ändert ist also gut.

3.2 Aufgabe 2: Messung ohmscher Widerstände

3.2.1 Aufgabe 2.1: Messung mit Strom- und Spannungsmessgerät

Bestimmen Sie aus Strom- und Spannungsmessungen einen unbekannten Widerstandswert R_X. Schließen Sie einen 10 k□-Widerstand, den unbekannten Widerstand R_X und ein Strommessinstrument (im 1 mA-Bereich) in Reihe an eine Gleichspannung von 6 V an. Messen Sie mit einem Spannungsmessinstrument (im 0,3- oder 1 V-Bereich) die folgenden Spannungen:

- Die Spannung an R_X (spannungsrichtige Schaltung).
- Die Spannung an der Reihenschaltung aus R_X und Strommessinstrument (stromrichtige Schaltung).

Wiederholen Sie beide Messungen, wobei Sie die Rollen des □A-Multizet und des AV□-Multizet Messgerät tauschen. Berechnen Sie aus den vier Wertepaaren jeweils –zunächst ohne und dann mit Berücksichtigung der Instrumenteninnenwiderstände– den Widerstandswert R_X. Welchen Innenwiderstand wünscht man sich bei einem Strom- und welchen bei einem Spannungsmessgerät?

[4]:
```
# Auffbau Version a == Spannungsrichtig
# Auffbau Version b == Stromrichtig

#Aufbau a:
U_aµ = 0.3 #hier Spannung Version a) des µA-Multizets #Skala 1V
ΔU_aµ = 0.01 * 1
I_aΩ = 0.665*10**-3#hier Strom Version a) des AVΩ-Multizets #Skala 1mA
ΔI_aΩ = 0.01 *1*10**(-3)

#Tausch Geräte
U_aΩ = 0.21#hier Spannung Version a) des AVΩ-Multizets #Skala 1V
ΔU_aΩ = 0.01 * 1
I_aµ = 0.63*10**(-3)#hier Strom Version a) des µA-Multizets #Skala 1mA
ΔI_aµ = 0.01 *1*10**(-3)


#Umbau zu b:
U_bµ = 0.37 #hier Spannung Version b) des µA-Multizets #Skala 1V
ΔU_bµ = 0.01 * 1
I_bΩ = 0.66*10**(-3) #hier Strom Version b) des AVΩ-Multizets #Skala 1mA
ΔI_bΩ = 0.01 *1*10**(-3)

#Tausch Geräte
U_bΩ = 0.26 #hier Spannung Version b) des AVΩ-Multizets #Skala 1V
ΔU_bΩ = 0.01 * 1
I_bµ = 0.385*10**(-3)#hier Strom Version b) des µA-Multizets #Skala 1mA
ΔI_bµ = 0.01 *1*10**(-3)

#TODO: Innenwiderstände der Messgeräte für Spannung und Strom
R_Vµ = 100000
R_Iµ = 180
R_VΩ = 1000
R_IΩ = 100

#erste Version ohne Instrumentenwiderstände
R_x1 = 1/4*(U_aµ/I_aΩ + U_aΩ/I_aµ + U_bµ/I_bΩ + U_bΩ/I_bµ)
%m Ohne berücksichtigung der Innenwiderstände ergeben sich für die vier␣
↪Messungen die folgenden Widerstände

td = np.array([[f"Spannungsrichtig µA-Multizets=Voltmeter", f"Spannungsrichtig␣
↪µA-Multizets=Ampermeter", f"Stromrichtig µA-Multizets=Voltmeter",␣
↪f"Stromrichtig µA-Multizets=Ampermeter"],
     [f"{U_aµ/I_aΩ:.2f}Ω", f"{U_aΩ/I_aµ:.2f}Ω", f"{U_bµ/I_bΩ:.2f}Ω", f"{U_bΩ/
↪I_bµ:.2f}Ω"],
```

```
     [f"{np.sqrt((ΔU_aμ/I_aΩ)**2 + (ΔI_aΩ*U_aμ/I_aΩ**2)**2):.2f}Ω", f"{np.sqrt((ΔU_aΩ/I_aμ)**2 + (ΔI_aμ*U_aΩ/I_aμ**2)**2):.2f}Ω", f"{np.sqrt((ΔU_bμ/I_bΩ)**2 + (ΔI_bΩ*U_bμ/I_bΩ**2)**2):.2f}Ω", f"{np.sqrt((ΔU_bΩ/I_bμ)**2 + (ΔI_bμ*U_bΩ/I_bμ**2)**2):.2f}Ω"]]).transpose()

import pandas as pd
df = pd.DataFrame(td, columns=["Aufbau", "Widerstand", "Unsicherheit"])
display(df)

%m mit dem Mittelwert [!R_x1:.2f!]Ω.
ΔR_x1 = 1/4*np.sqrt(
    (ΔU_aμ/I_aΩ)**2 +
    (ΔI_aΩ*U_aμ/I_aΩ**2)**2 +
    (ΔU_aΩ/I_aμ)**2 +
    (ΔI_aμ*U_aΩ/I_aμ**2)**2 +
    (ΔU_bμ/I_bΩ)**2 +
    (ΔI_bΩ*U_bμ/I_bΩ**2)**2 +
    (ΔU_bΩ/I_bμ)**2 +
    (ΔI_bμ*U_bΩ/I_bμ**2)**2)
%m Die Messunsicherheiten können alle als unabhängige Fehler angenommen werden. Für den Mittleren Widerstand ohne einberechnung der Innenwiderstände ergibt sich eine Unsicherheit von [!ΔR_x1:.2f!]Ω aus der gausschen Unsicherheitsfortpflanzung vom Mittelwert.

#zweite mit Berücksichtigung
R_1 = 1/4*((I_aΩ/U_aμ - 1/R_Vμ)**(-1)+(I_aμ/U_aΩ - 1/R_VΩ)**(-1)+(U_bμ/I_bΩ - R_Iμ)+(U_bΩ/I_bμ - R_IΩ))
ΔR_1 = 1/4*np.sqrt(
    (ΔI_aΩ*(I_aΩ/U_aμ - 1/R_Vμ)**-2/U_aμ)**2+
    (ΔU_aμ*(I_aΩ/U_aμ - 1/R_Vμ)**-2*I_aΩ/U_aμ**2)**2+
    (ΔI_aμ*(I_aμ/U_aΩ - 1/R_VΩ)**-2/U_aΩ)**2+
    (ΔU_aΩ*(I_aμ/U_aΩ - 1/R_VΩ)**-2*I_aμ/U_aΩ**2)**2+
    (ΔU_bμ/I_bΩ)**2+
    (ΔI_bΩ*U_bμ/I_bΩ**2)**2+
    (ΔU_bΩ/I_bμ)**2+
    (ΔI_bμ*U_bΩ/I_bμ**2)**2)

td = np.array([[f"Spannungsrichtig μA-Multizets=Voltmeter", f"Spannungsrichtig μA-Multizets=Ampermeter", f"Stromrichtig μA-Multizets=Voltmeter", f"Stromrichtig μA-Multizets=Ampermeter"],
     [f"{(I_aΩ/U_aμ - 1/R_Vμ)**(-1):.2f}Ω", f"{(I_aμ/U_aΩ - 1/R_VΩ)**(-1):.2f}Ω", f"{(U_bμ/I_bΩ - R_Iμ):.2f}Ω", f"{(U_bΩ/I_bμ - R_IΩ):.2f}Ω"],
     [f"{np.sqrt((ΔI_aΩ*(I_aΩ/U_aμ - 1/R_Vμ)**-2/U_aμ)**2+(ΔU_aμ*(I_aΩ/U_aμ - 1/R_Vμ)**-2*I_aΩ/U_aμ**2)**2):.2f}Ω", f"{np.sqrt((ΔI_aμ*(I_aμ/U_aΩ - 1/R_VΩ)**-2/U_aΩ)**2+(ΔU_aΩ*(I_aμ/U_aΩ - 1/R_VΩ)**-2*I_aμ/U_aΩ**2)**2):.2f}Ω", f"{np.sqrt((ΔU_bμ/I_bΩ)**2+(ΔI_bΩ*U_bμ/I_bΩ**2)**2):.2f}Ω", f"{np.sqrt((ΔU_bΩ/I_bμ)**2+(ΔI_bμ*U_bΩ/I_bμ**2)**2):.2f}Ω"]]).transpose()
```

```
%m Mit berücksichtigung der Innenwiderstände ergibt sich der Mittelwert [!R_1:.
↪2f!]Ω mit einer Unsicherheit auf dem Mittelwert von [!ΔR_1:.2f!]Ω.

%m Die einzelnen Widerstände hatten dabei folgende Werte:
import pandas as pd
df = pd.DataFrame(td, columns=["Aufbau", "Widerstand", "Unsicherheit"])
display(df)

%m Die Unsicherheiten auf den Innenwiderständen waren nicht angegeben und␣
↪wurden in der Rechnung vernachlässigt.
%m Der Mittelwert für den Widerstand $R_x$ stimmt in Rahmen der Messunsicherheit␣
↪mit dem angegebenen Wert von 470Ω überein. Die einzelnen Ergebnisse der␣
↪Messungen streuen allerdings sehr breit weswegen nicht davon ausgegangen␣
↪werden kann, dass die Messung tatsächlich so genau war, wie die␣
↪Messunsicherheit angibt.

%m Ein ideales Spannungsmessgerät, hat einen unendlichen Innenwiderstand und␣
↪isoliert die beiden Eingänge, sodass kein Strom fließt. Ein ideales␣
↪Ampermeter hat einen Innenwiderstand von 0Ω, sodass der Stromfluss nicht␣
↪beeinträchtigt wird.
```

Ohne berücksichtigung der Innenwiderstände ergeben sich für die vier Messungen die folgenden Widerstände

	Aufbau	Widerstand	Unsicherheit
0	Spannungsrichtig µA-Multizets=Voltmeter	451.13Ω	16.50Ω
1	Spannungsrichtig µA-Multizets=Ampermeter	333.33Ω	16.73Ω
2	Stromrichtig µA-Multizets=Voltmeter	560.61Ω	17.37Ω
3	Stromrichtig µA-Multizets=Ampermeter	675.32Ω	31.34Ω

mit dem Mittelwert 505.10Ω.

Die Messunsicherheiten können alle als unabhängige Fehler angenommen werden. Für den Mittleren Widerstand ohne einberechnung der Innenwiderstände ergibt sich eine Unsicherheit von 10.71Ω aus der gausschen Unsicherheitsfortpflanzung vom Mittelwert.

Mit berücksichtigung der Innenwiderstände ergibt sich der Mittelwert 477.28Ω mit einer Unsicherheit auf dem Mittelwert von 13.64Ω.

Die einzelnen Widerstände hatten dabei folgende Werte:

	Aufbau	Widerstand	Unsicherheit
0	Spannungsrichtig µA-Multizets=Voltmeter	453.17Ω	16.65Ω
1	Spannungsrichtig µA-Multizets=Ampermeter	500.00Ω	37.65Ω
2	Stromrichtig µA-Multizets=Voltmeter	380.61Ω	17.37Ω
3	Stromrichtig µA-Multizets=Ampermeter	575.32Ω	31.34Ω

Die Unsicherheiten auf den Innenwiderständen waren nicht angegeben und wurden in der Rechnung vernachlässigt.

Der Mittelwert für den Widerstand R_x stimmt in Rahmen der Messunsicherheit mit dem angegebenen Wert von 470Ω überein. Die einzelnen Ergebnisse der Messungen streuen allerdings sehr breit weswegen nicht davon ausgegangen werden kann, dass die Messung tatsächlich so genau war, wie die Messunsicherheit angibt.

Ein ideales Spannungsmessgerät, hat einen unendlichen Innenwiderstand und isoliert die beiden Eingänge, sodass kein Strom fließt. Ein ideales Ampermeter hat einen Innenwiderstand von 0Ω, sodass der Stromfluss nicht beeinträchtigt wird.

3.2.2 Aufgabe 2.2: Wheatstonesche Brücke

Messen Sie den Widerstandswert R_X mit Hilfe einer Wheatstoneschen Brückenschaltung.

- Benutzen Sie hierfür das lineare 1 k□-Potentiometer und den als bekannt angenommenen 1 k□-Widerstand.
- Schalten Sie in die Anschlussleitung zwischen Brücke und der Gleichspannung von 6 V einen Widerstand von 220 Ω als Strombegrenzungswiderstand.
- Verwenden Sie das □A-Multizet Messinstrument als Nullinstrument in der Brückendiagonalen.
- Wählen Sie anfangs einen unempfindlichen Messbereich (z.B. im 10 V-Bereich) und dann zunehmend empfindlichere Messbereiche bis zu 30 mV.

Worin besteht der Vorteil einer Brückenschaltung?

---

[5]:
```
R_known = 1000
ΔR_known = 0.01 * R_known
Pot_l = 6.81*10**3
Pot_max = 10**4
ΔPot_l = Pot_l*0.0025

R_x14 = R_known * (Pot_max-Pot_l) / Pot_l
ΔR_x14 = np.sqrt(
    (ΔR_known * (Pot_max-Pot_l) / Pot_l)**2 +
    (ΔPot_l*R_known/Pot_l**2)**2
    )

%m Der Vorteil der Wheatstoneschen Brückenschaltung besteht darin, dass der Innenwiderstand des Messgeräte keinen Einfluss auf die Messung hat.

%m Da nur das Verhältnis der Widerstände von bedeutung ist fällt dire absolute Unsicherheit des Potentiometers weg und nur der Linear-Teil mit 0.25% bleibt relevant.

%m Somit ergibt sich $R_x = [!R_x14:.2f!] \Omega$ mit einer Unsicherheit von $[!ΔR_x14:.2f!] \Omega$.

%m Der Messwert stimmt innerhalb der Messunsicherheit mit dem Angegebenen Wert überein und auch mit dem Messwert aus der vorherigen Messung. Das Ergebnis scheint also Plausibel.
```

Der Vorteil der Wheatstoneschen Brückenschaltung besteht darin, dass der Innenwiderstand des Messgeräte keinen Einfluss auf die Messung hat.

Da nur das Verhältnis der Widerstände von bedeutung ist fällt dire absolute Unsicherheit des Potentiometers weg und nur der Linear-Teil mit 0.25% bleibt relevant.

Somit ergibt sich $R_x = 468.43\Omega$ mit einer Unsicherheit von 4.68Ω.

Der Messwert stimmt innerhalb der Messunsicherheit mit dem Angegebenen Wert überein und auch mit dem Messwert aus der vorherigen Messung. Das Ergebnis scheint also Plausibel.

3.2.3 Aufgabe 2.3: Messung mit dem Ω-Meter

Messen Sie den Widerstandswert R_X mit Hilfe des Ω-Messbereichs des □A-Multizet Messgeräts. Wie funktioniert ein solches Ohmmeter? Wie funktioniert ein Ohmmeter mit linearer Skala?

---

[6]:
```
R_x23 = 430
ΔR_x23 = 80 #1% SKE 1 Ω Messbereich
%m $R_x = [!R_x23:.2f!]\,\Omega$ mit einer Unsicherheit von $[!ΔR_x23:.2f!
↪]\,\Omega$.
%m Das hier ist wirklich nicht viel mehr als ein grober Schätzwert.
```

$R_x = 430.00\,\Omega$ mit einer Unsicherheit von $80.00\,\Omega$.

Das hier ist wirklich nicht viel mehr als ein grober Schätzwert.

Das μA-Multizet enthält eine Spannungsquelle (einer Batterie) die über die Messkontakte mit dem Ampermeter und dem zu messenden Widerstand in Reihe geschaltet wird. Über das Ohmsche Gesetzt lässt sich der Widerstand aus dem gemessenen Stom bestimmen als $R = \frac{U_{Batt}}{A} - R_{i,Batt} - R_{i,Multizet}$ mit den Innenwiderständen R_i. Aus dem antiproportionalen Zusammenhang ergibt sich eine nichtlineare Skala, da die Nadel der Anzeige sich proportional zum fließenden Strom bewegt.

Ohmmeter mit linearer Skala enthalten eine Konstantstromquelle, die über die Kontakte mit dem zu messende Widerstand verbunden wird. Die abfallende Spannung ist dann nach dem Ohmschen gesetz proportional zur Größe des Widerstands und kann über die Spannungsmessfunktion des Multizets gemessen und entsprechend skaliert angezeigt werden. Für verschiedene Messbereiche können unterschiedliche Konstantstromquellen verwendet werden um die abfallende Spannung im Messbereich des Multizets zu halten.

3.3 Aufgabe 3: Messungen an einer Trockenbatterie

3.3.1 Aufgabe 3.1: Urspannung mit Kompensationsschaltung

Messen Sie die Urspannung U_0 einer Trockenbatterie (von ca. $1,5\,\mathrm{V}$) mit Hilfe einer Kompensationsschaltung.

- Überlegen Sie sich hierzu vorab, wie man mit Hilfe eines Potentiometers eine regelbare Spannungsquelle aufbauen kann.
- Schalten Sie die zu messende Spannung U_{Cell} in Reihe mit einer entgegengesetzt gepolten Hilfsspannung U_{H} (gemessenen mit dem AV□-Multizet Messgerät) und einem empfindlichen

Spannungsmessinstrument (wie z.B. dem □A-Multizet Messgerät, mit Messbereichen zwischen 10 V und 30 mV).
- Stellen Sie die Spannung U_H so ein, dass die Differenzspannung Null, also $U_\mathrm{Cell} = U_\mathrm{H}$ ist. (siehe Schaltskizze 0 in der alten Anleitung).

Um eine Regelbare Spannungsquelle mit einem Potentiometer zu erstellen benötigt man eine feste Spannungsquelle, die man an die beiden Endkontakte des Potentiometers anschließt. Die am dritten, mittleren Kontakt anliegende Spannung kann nun über Variation des Potentiometers zwischen 0V und der Spannung der festen Spannungsqulle frei gewählt werden. (Diese Spannung fällt natürlich, wenn Strom über den mittleren Kontakt abgeführt wird.)

[7]:
```
U_H = 1.46 #hier gemessene Spannung eintragen
#3V Skala
DeltaU = 0
ΔDeltaU = 30*10**-5#1% SKE, je nach Skala dann #30mV Skala
ΔU_H = 3*10**-2 #1% SKE, je nach Skala dann

U_b = U_H + DeltaU
ΔU_b = np.sqrt(ΔDeltaU**2 + ΔU_H**2) #= ΔU_H + ΔΔU = Unsicherheit der beiden␣
↪Spannungsmessgeräte
%m $U_{0} = [!U_b:.2f!] V$ mit einer Unsicherheit von $[!ΔU_b:.2f!] V$. Der␣
↪Angegebene Wert von $1.5\,V$ liegt leicht außerhalb des␣
↪Messunsicherheitsintervalls.
```

$U_0 = 1.46V$ mit einer Unsicherheit von $0.03V$. Der Angegebene Wert von $1.5\,V$ liegt leicht außerhalb des Messunsicherheitsintervalls.

Die Messunsicherheit ergibt sich aus der Kombination der beiden Messunsicherheiten von U_H und ΔU da zwar der Messert von ΔU auf 0V eingestellt wird aber der tatsächliche Wert nicht exakt 0V beträgt. Die beiden gemessenen Spannungen haben unabhängigen Messunsicherheiten. Für diese Rechnung wird die Annahme getroffen, dass der durch die Messunsicherheit über das Potentiometer fließende Stom nur zu einer Vernachässigbar kleinen Spannungsänderung am Potentiometer führt.

3.3.2 Aufgabe 3.2: Innenwiderstand

Messen Sie den Innenwiderstand der Trockenbatterie bei mäßigen Belastungen durch Schaltkreise mit 220 Ω, 110 Ω, 47 Ω und 22 Ω. Beobachten Sie dazu die jeweilige Spannungserniedrigung ΔU direkt, mit Hilfe einer Differenzspannungsmethode. Sie können hierzu die Kompensationsschaltung von **Aufgabe 3.1** verwenden, indem Sie nach dem Abgleich im unbelasteten Zustand zum Ablesen von ΔU am □A-Multizet Messgerät den Lastwiderstand kurzzeitig zuschalten.

Für die Lösung dieser Aufgabe wird wie besprochen angenommen, dass die Spannung am Potentiometer nicht durch Hinzufügen eines Lastwiderstands beeinflusst wird. Da der Innenwiderstand des Messgeräts relativ hoch ist, ist das in angemessen guter Näherung gegeben.

R_L und R_i bilden einen Spannungsteiler. Die Spannung ΔU ist gleich der Spannung die über R_i abfällt, da die über das Potentiometer angelegte Spannung nach dem Anstecken von R_L nicht verändert wird und noch U_b entspricht. Folglich gilt $R_i = \frac{R_L \Delta U}{U_b - \Delta U}$

[8]:
```
U_b = 1.46
ΔU_b = 0.01*3
R_L = np.array([22,47,110,220])
ΔR_L = np.array([0.01*22,0.01*47,0.01*110,0.01*220]) #Anpassen der Fehler je␣
 ↪nach Skala

DeltaU = np.array([0.07,0.052,0.043,0.0385]) #hier entsprechende Messwerte
ΔDeltaU = 5*10**(-3)

R_i = R_L*DeltaU/(U_b - DeltaU)
ΔR_i = np.sqrt(
    (ΔR_L*DeltaU/(U_b - DeltaU))**2+
    (ΔU_b*R_L*DeltaU/(U_b - DeltaU)**2)**2+
    (ΔDeltaU*R_L*U_b/(U_b - DeltaU)**2)**2
    )

df = pd.DataFrame(np.array([R_L,R_i,ΔR_i]).transpose(),␣
 ↪columns=["Lastwiderstand in Ω", "Innenwiderstand in Ω", "Unsicherheit in Ω"])
display(df)

%m Wie zu sehen ist, ist der Innenwiderstand alles andere als Konstant. Das␣
 ↪Modell einer idealen Spannungsquelle und einem Innenwiderstand kann für die␣
 ↪Trockenbatterie also nicht angenommen werden.
```

	Lastwiderstand in Ω	Innenwiderstand in Ω	Unsicherheit in Ω
0	22.0	1.107914	0.087200
1	47.0	1.735795	0.177824
2	110.0	3.338038	0.407488
3	220.0	5.958495	0.806879

Wie zu sehen ist, ist der Innenwiderstand alles andere als Konstant. Das Modell einer idealen Spannungsquelle und einem Innenwiderstand kann für die Trockenbatterie also nicht angenommen werden.

Besser wäre es in diesem Aufbau nach dem Zuschalten der Last erneut ΔU auf 0V zu regeln und dadurch die an der Batterie anliegende Spannung zu bestimmen. Dadurch wäre der Einfluss des Innenwiderstandes des Potentiometers minimiert und würde das Ergebnis nicht verfälschen.

3.4 Aufgabe 4: Messungen an einer Spule

3.4.1 Aufgabe 4.1: Ohmscher Widerstand

Messen Sie mit Hilfe des Ω-Messbereiches des □A-Multizet Messgeräts den ohmschen Widerstand der Ihnen zur Verfügung stehenden Spule bei Gleichstrom. Dieser Widerstand ist ein Teil des bei Wechselstromanwendungen beobachteten Verlustwiderstandes der Spule.

[9]:
```
R_SpG = 55
ΔR_SpG = 5
%m $R_{SpuleG} = [!R_SpG:.2f!]\,\Omega$ mit einer Unsicherheit von $[!ΔR_SpG:.
↪2f!]\,\Omega$.
```

$R_{SpuleG} = 55.00\,\Omega$ mit einer Unsicherheit von $5.00\,\Omega$.

3.4.2 Aufgabe 4.2: Induktivität

Messen Sie bei einer Frequenz von $\omega/2\pi = 30\,\mathrm{Hz}$ die Induktivität L und den Verlustwiderstand R der Spule. Schließen Sie hierzu die Spule in Reihe mit einem $110\,\Omega$-Vorwiderstand an den Ihnen zur Verfügung stehenden Sinuswellen-Frequenzgenerator an, dessen Ausgangsspannung im so belasteten Zustand auf etwa $0,2\,\mathrm{V}$ eingestellt werden sollte. Aus den gemessenen Spannungswerten am Generator (U_G), am $110\,\Omega$-Widerstand (U_W) und an der Spule (einschließlich Verlustwiderstand, U_S) lassen sich anhand eines Zeigerdiagramms in der komplexen Ebene ω, L und R berechnen. Beachten Sie hierzu die Hinweise zu diesem Versuch.

Im folgenden Block wird mit den Komplexwertigen Spannungen gerechnet.

Da alle Bauelemente in Reihe geschaltet sind fließt durch alle der gleiche Strom. Es gilt also $\frac{U_s}{R_v+i\omega L} = \frac{U_w}{R_w}$. $\Rightarrow L = \frac{1}{\omega i}\left(\frac{U_s R_w}{U_w} - R_v\right)$ wobei L eine reelle Größe ist. Daraus folgt, das auch die rechte Seite reell sein muss. $L = \frac{1}{\omega i}\left(\frac{Re(U_s)R_w + Im(U_s)R_w}{U_w} - R_v\right) \in R \Leftrightarrow Re(U_s) = \frac{R_v U_w}{R_w}$.

$\Leftarrow L = \frac{1}{\omega i}\left(\frac{Im(U_s)R_w}{U_w}\right)$ wobei ja $|U_s|$ bekannt ist und $Im(U_s) = \sqrt{|U_s|^2 - Re(U_s)^2} = \sqrt{|U_s|^2 - \frac{R_v U_w}{R_w}^2}$. Setzt man das in L ein erhält man $L = \frac{1}{\omega U_w}\sqrt{|U_s|^2 R_w^2 - R_v^2 U_w^2}$ wobei $U_w = |U_w|$, da U_w über einen Widerstand abfällt.

[10]:
```
ω = 29.9957 *2*pi
Δω = 0.01

R_w = 110
ΔR_w = 0.01*110

#R_v = 55 # Soll neu berechnet werden
#ΔR_v = 5

U_w = 0.0755
ΔU_w = 0.01

U_s = 0.155
ΔU_s = 0.001

U_g = 0.201
ΔU_g = 0.001

from uncertainties import ufloat
```

```
from uncertainties.umath import sqrt as usqrt
uω = ufloat(ω, Δω)
uR_w = ufloat(R_w, ΔR_w)
#uR_v = ufloat(R_v, ΔR_v)
uU_w = ufloat(U_w, ΔU_w)
uU_s = ufloat(U_s, ΔU_s)
uU_g = ufloat(U_g, ΔU_g)

uR_v = (uU_g**2 - uU_w**2 - uU_s**2)/(2*uU_w**2)*uR_w
%m Der Verlustwiderstand der Spule beträgt $R_v = [!uR_v.n:.2f!]\,\Omega$ mit␣
 ↪einer Unsicherheit von $[!uR_v.s:.2f!]\,\Omega$. Das stimmt nicht ganz mit␣
 ↪dem Messwert aus der vorherigen Messung überein.

uL_Sp = 1/(uω*uU_w) * usqrt(uU_s**2*uR_w**2 - uR_v**2*uU_w**2)

%m Die Induktivität der Spule beträgt $L_{Spule} = [!uL_Sp.n:.2f!]\,H$ mit␣
 ↪einer Unsicherheit von $[!uL_Sp.s:.2f!]\,H$. Damit ist der Messwert noch im␣
 ↪Rahmen der Messunsicherheit mit dem Angegebenen Wert von 1H verträglich.
```

Der Verlustwiderstand der Spule beträgt $R_v = 103.01\,\Omega$ mit einer Unsicherheit von $42.15\,\Omega$. Das stimmt nicht ganz mit dem Messwert aus der vorherigen Messung überein.

Die Induktivität der Spule beträgt $L_{Spule} = 1.07\,H$ mit einer Unsicherheit von $0.07\,H$. Damit ist der Messwert noch im Rahmen der Messunsicherheit mit dem Angegebenen Wert von 1H verträglich.

3.4.3 Aufgabe 4.3: Parallelschwingkreis

Bestimmen Sie die Induktivität L, den Verlustwiderstand R und die Kapazität C eines Parallelschwingkreises aus seinem Verhalten im Resonanzfall. Schalten Sie hierzu die Spule und den Kondensator parallel und schließen Sie diesen Schwingkreis über den Vorwiderstand von 1 M□ an den Sinuswellen-Frequenzgenerator an. Verwenden Sie die maximale Ausgangsspannung. Schließen Sie außerdem das Ihnen zur Verfügung stehende Oszilloskop und Keithley Multimeter an (siehe Schaltskizze 1, in der alten Anleitung). Messen Sie dann in Abhängigkeit der Frequenz (im Bereich 100 bis 400 Hz in 20- bis 5 Hz-Schritten, je nach Resonanznähe die folgenden Größen:

- Die Spannung U am Resonanzschaltkreis mit dem Multimeter.
- Die Phasenverschiebung (Δt) mit dem Oszilloskop.

Das Multimeter liefert Ihnen auch die genaue Frequenz ν. Berechnen Sie aus ν und Δt die Phase $\Delta\phi$. Tragen Sie die Verläufe von U und $\Delta\phi$ als Funktion von ν auf. Diskutieren Sie den Verlauf der Phase qualitativ. Ermitteln Sie die Resonanzkreisfrequenz ω_0, Halbwertsbreite $\Delta\omega$ (aus der Differenz der Kreisfrequenzen, bei denen die Spannung am Schwingkreis halb so groß ist, wie im Maximum der Resonanz) und den Resonanzwiderstand R_r.

Aus diesen Kurven erhalten Sie die gefragten Größen, mit Hilfe der Beziehungen:

$$C = \frac{\sqrt{3}}{\Delta\omega\, R_r}; \qquad L = \frac{1}{\omega_0^2\, C}; \qquad R = \frac{\Delta\omega\, L}{\sqrt{3}}$$

Zur Ableitung dieser Beziehungen ist R als Serienwiderstand zu L angesetzt worden. Nehmen Sie zunächst an und überprüfen Sie nachträglich, dass Sie die Messung bei quasi konstantem Strom des Generators ausgeführt haben, der durch den 1 M□-Widerstand bestimmt wird.

---

[11]:
```
import pandas as pd
mpg = pd.read_csv('Parallelschwingkreis.csv')
%m Folgendes sind unsere Messwerte
display(mpg)
```

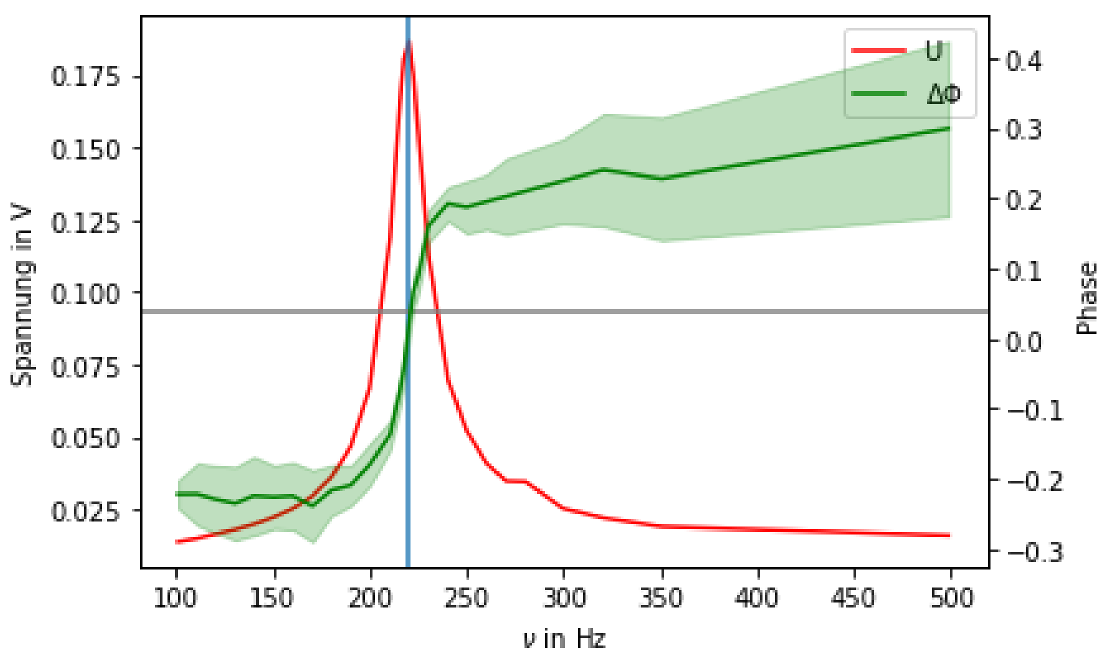
Folgendes sind unsere Messwerte

	v	U	DeltaT	ddt
0	100.8	0.0138	-2.20	0.20
1	110.8	0.0150	-2.00	0.40
2	120.5	0.0165	-1.90	0.40
3	130.4	0.0180	-1.80	0.40
4	140.0	0.0198	-1.60	0.40
5	150.4	0.0223	-1.50	0.30
6	160.1	0.0252	-1.40	0.30
7	170.3	0.0296	-1.40	0.30
8	180.2	0.0361	-1.20	0.20
9	190.1	0.0467	-1.10	0.15
10	199.9	0.0668	-0.90	0.15
11	210.4	0.1188	-0.65	0.10
12	215.5	0.1651	-0.35	0.10
13	217.5	0.1802	-0.20	0.10
14	220.3	0.1867	0.10	0.10
15	222.6	0.1750	0.30	0.10
16	225.0	0.1548	0.40	0.10
17	230.3	0.1128	0.70	0.10
18	240.4	0.0698	0.80	0.10
19	249.9	0.0522	0.75	0.15
20	260.2	0.0410	0.75	0.15
21	270.3	0.0347	0.75	0.20
22	280.5	0.0345	0.75	0.20
23	299.8	0.0253	0.75	0.20
24	320.7	0.0220	0.75	0.25
25	350.7	0.0190	0.65	0.25
26	498.9	0.0160	0.60	0.25

[13]:
```
from scipy import signal
v,U,Deltat,ΔDeltat = np.genfromtxt('Parallelschwingkreis.csv', delimiter=',')[1:
 ↪].transpose() #Deltat in ms
uDeltat = unumpy.uarray(Deltat * 1E-3, ΔDeltat*1E-3)
uDeltaΦ = v*uDeltat

U_argmax = np.argmax(U) # Unsicherheit von U_max wird als vernachlässigbar␣
 ↪angenommen, da mit dem Multimeter gemessen.
```

```python
ω_0 = v[U_argmax]*2*pi
Δω_0 = 1.5 # Schätzwert
uω_0 = ufloat(ω_0, Δω_0)

Deltaω = sci.signal.peak_widths(U, [U_argmax], rel_height=0.5)[0][0]*2*pi
ΔDeltaω = 5 # Schätzwert
uDeltaω = ufloat(Deltaω, ΔDeltaω)

uR_vor = ufloat(10**6, 10**6*0.01)

U_gen = 2.70
ΔU_gen = 0.002
uU_gen = ufloat(U_gen, ΔU_gen)
uR_r = uR_vor*U[U_argmax]/(uU_gen)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
U_line = ax.plot(v, U, "r-", label="U" )
ax2 = ax.twinx()
DeltaΦ_line = ax2.plot(v, unumpy.nominal_values(uDeltaΦ), "g-", label="$\Delta\Phi$")
ax2.fill_between(v, unumpy.nominal_values(uDeltaΦ)-unumpy.std_devs(uDeltaΦ), unumpy.nominal_values(uDeltaΦ)+unumpy.std_devs(uDeltaΦ), color="green", alpha=0.25)

lns = U_line+DeltaΦ_line
labs = [l.get_label() for l in lns]
ax.legend(lns, labs, loc=0)

ax.set_xlabel("$\\nu$ in Hz")
ax.set_ylabel(r"Spannung in V")
ax2.set_ylabel(r"Phase")

ax.axvline(ω_0/(2*pi))
ax.axhline(np.max(U)/2, label="Halbes Maximum", color="gray")

plt.show()

%m Die Resonanzkreisfrequenz beträgt $ω_0 = [!uω_0.n:.2f!]\,\mathrm{Hz}$ mit einer Unsicherheit von $[!uω_0.s:.2f!]\,\mathrm{Hz}$.

%m Die Halbwärtsbreite beträgt $Δω = [!uDeltaω.n:.2f!]\,\mathrm{Hz}$ mit einer Unsicherheit von $[!uDeltaω.s:.2f!]\,\mathrm{Hz}$.
```

```
%m Der Resonanzwiderstand beträgt $R_r = [!uR_r.n*10**-3:.4f!
↪]\,\mathrm{K}\Omega$ mit einer Unsicherheit von $[!uR_r.s*10**-3:.4f!
↪]\,\mathrm{K}\Omega$.

uC_P =np.sqrt(3)*(uDeltaω)**(-1)*(uR_r)**(-1)
%m Die Kapazität des Kondensators beträgt $C = [!uC_P.n*10**6:.4f!]\,\mu\mathrm{␣
↪F}$ mit einer Unsicherheit von $[!uC_P.s*10**6:.4f!]\,\mu\mathrm{ F}$.

uL_P = (uω_0**2 * uC_P)**(-1)
%m Die Induktivität der Spule beträgt $L = [!uL_P.n:.4f!]\,\mathrm{H}$ mit␣
↪einer Unsicherheit von $[!uL_P.s:.4f!]\,\mathrm{H}$.

uR_P = uDeltaω*uL_P*(3)**(-1/2)

%m Der Widerstand der Spule beträgt $R = [!uR_P.n:.4f!]\,\Omega$ mit einer␣
↪Unsicherheit von $[!uR_P.s:.4f!]\,Ω$.

%m Die gemessene Impedanz ist knapp nicht mehr in der $$1\sigma$ Umgebung um den␣
↪erwarteten Wert von 1H. Trotzdem ist die Abweichung nur knapp 15% und da die␣
↪Spule selbst eine Fertigungsungenauigkeit von 10% hat, ist der Messwert␣
↪innerhalb der Messunsicherheit mit dem erwarteten Wert verträglich.
%m Der gemessene Widerstand der Spule ist auch nicht verträglich mit dem in der␣
↪vorherigen Aufgabe mit dem Multizet bestimmten Wert. An dieser Stelle ist die␣
↪Messung des Multizets allerdings so ungenau gewesen, dass ein Vergleich hier␣
↪eigentlich nicht viel Aussagekraft hat.
%m Die gemessene Kapazität des Kondensators stimmt gut mit der Messungin der␣
↪folgenden Aufgabe überein.
```



Die Resonanzkreisfrequenz beträgt $\omega_0 = 1384.19\,\mathrm{Hz}$ mit einer Unsicherheit von $1.50\,\mathrm{Hz}$.

Die Halbwärtsbreite beträgt $\Delta\omega = 41.48\,\mathrm{Hz}$ mit einer Unsicherheit von $5.00\,\mathrm{Hz}$.

Der Resonanzwiderstand beträgt $R_r = 69.1481\,\mathrm{K\Omega}$ mit einer Unsicherheit von $0.6934\,\mathrm{K\Omega}$.

Die Kapazität des Kondensators beträgt $C = 0.6039\,\mu\mathrm{F}$ mit einer Unsicherheit von $0.0730\,\mu\mathrm{F}$.

Die Induktivität der Spule beträgt $L = 0.8643\,\mathrm{H}$ mit einer Unsicherheit von $0.1046\,\mathrm{H}$.

Der Widerstand der Spule beträgt $R = 20.6996\,\Omega$ mit einer Unsicherheit von $4.9947\,\Omega$.

Die gemessene Impedanz ist knapp nicht mehr in der 1σ Umgebung um den erwarteten Wert von 1H. Trotzdem ist die Abweichung nur knapp 15% und da die Spule selbst eine Fertigungsungenauigkeit von 10% hat, ist der Messwert innerhalb der Messunsicherheit mit dem erwarteten Wert verträglich.

Der gemessene Widerstand der Spule ist auch nicht verträglich mit dem in der vorherigen Aufgabe mit dem Multizet bestimmten Wert. An dieser Stelle ist die Messung des Multizets allerdings so ungenau gewesen, dass ein Vergleich hier eigentlich nicht viel Aussagekraft hat.

Die gemessene Kapazität des Kondensators stimmt gut mit der Messungin der folgenden Aufgabe überein.

Qualitative Diskussion des Kurvenverlaufs Die Spannung liegt in einem bereich von 0.02V und 1.9V. Aufgetragen über der Frequenz hat die Spannung ein einziges markantes Maximum bei ungefähr 220 Hz. Die Phasenverschiebung hat einen charakteristisch S-Förmigen verlauf von -0.2 rad bis +0.3 rad. Die Krümmung der Phasenverschiebung wechselt ihre Richtung genau im Resonanzpunkt. Die abschätznug der Unsicherheit für die Phase scheint an den enden etwas zu groß gewählt geworden zu sein, denn der Unsicherheitsschlauch ist um ein vielfaches größer als die Streuung der Messdaten. Es war auf dem Oszilloskop aber einfach nicht besonders gut erkennbar.

3.4.4 Aufgabe 4.4: Wechselstromwiderstände von Spule und Kondensator

Bestimmen Sie die Wechselstromwiderstände von Spule und Kondensator einzeln bei der Frequenz ω_0, wie in **Aufgabe 4.3** bestimmt, jeweils durch Messung von Strom und Spannung. Berechnen Sie daraus L und C. Warum müssen Sie nicht eine Messung nach Art von **Aufgabe 4.2** durchführen, um auch den Verlustwiderstand der Spule bei dieser Frequenz zu ermitteln?

---

[14]:
```
#Leerlaufspannung U = 8.905, 0.001 Unsicher
U_L = 8.05
ΔU_L = 0.002
uU_L = ufloat(U_L, ΔU_L)

I_L = 5.570*10**(-3)
ΔI_L = 0.01*10**(-3)
uI_L = ufloat(I_L, ΔI_L)

uX_L = uU_L/uI_L
```

```
uL = uX_L/uω_0

uU_C = ufloat(7.82, 0.02) #0.02 Unsicher
uI_C = ufloat(6.843 *10**-3, 0.02*10**-3)#0.02 unsicher

uX_C = uU_C/uI_C
uC = 1/(uω_0*uX_C)

%m Die Induktivität der Spule beträgt $L = [!uL.n:.4f!]\,\mathrm{H}$ mit einer␣
↪Unsicherheit von $[!uL.s:.4f!]\,\mathrm{H}$.

%m Die Kapazität des Kondensators beträgt $C = [!uC.n*10**6:.4f!]\,\mu\mathrm{␣
↪F}$ mit einer Unsicherheit von $[!uC.s*10**6:.4f!]\,\mu\mathrm{ F}$.

%m Die Messung der Spule liegt innerhalb der 10% Fertigungsabweichung der Spule.
%m Die Kapazität passt mit der Messung der vorherigen Aufgabe zusammen.␣
↪Allerings passt sie nicht zum angegebenen Wert. Es wäre komisch wenn die␣
↪Induktivität einen guten Wert erreicht und die Kapazität nicht, denn beide␣
↪werden aus den gleichen Daten errechnet; Fehler sollten also korreliert sein.
```

Die Induktivität der Spule beträgt $L = 1.0441\,\mathrm{H}$ mit einer Unsicherheit von $0.0022\,\mathrm{H}$.

Die Kapazität des Kondensators beträgt $C = 0.6322\,\mu\mathrm{F}$ mit einer Unsicherheit von $0.0025\,\mu\mathrm{F}$.

Die Messung der Spule liegt innerhalb der 10% Fertigungsabweichung der Spule.

Die Kapazität passt mit der Messung der vorherigen Aufgabe zusammen. Allerings passt sie nicht zum angegebenen Wert. Es wäre komisch wenn die Induktivität einen guten Wert erreicht und die Kapazität nicht, denn beide werden aus den gleichen Daten errechnet; Fehler sollten also korreliert sein.

3.4.5 Aufgabe 4.5: Innenwiderstand des Sinuswellengenerators

Bestimmen Sie den reell angenommenen Innenwiderstand des Sinuswellengenerators. Belasten Sie dazu den Ausgang mit einem passenden Widerstand so, dass die Ausgangsspannung gerade auf den halben Wert der Leerlaufspannung sinkt. Wie groß ist die maximale Ausgangsleistung des Sinuswellengenerators?

---

[15]:
```
R_i = R_p = 593
ΔR_i = 2

U_gen = 8.905
ΔU_gen = 0.001

P = U_gen**2/(4*R_i)
ΔP = np.sqrt( \
    (2*U_gen/(4*R_i) * ΔU_gen)**2 \
    + (U_gen**2/(4*R_i**2) * ΔR_i)**2 \
```

```
)

%m Der Innenwiderstand beträgt $[!R_i:.4f!]\,\Omega$ mit einer
  Standardabweichung von $[!ΔR_i:2f!]\,\Omega$

%m Die maximale Ausgangsleistung beträgt $[!P:.4f!]\,\mathrm{W}$ mit einer
  Standardabweichung von $[!ΔP:5f!]\,\mathrm{W}$
```

Der Innenwiderstand beträgt 593.0000 Ω mit einer Standardabweichung von 2.000000 Ω

Die maximale Ausgangsleistung beträgt 0.0334 W mit einer Standardabweichung von 0.000113 W