Vorbereitung

Lichtgeschwindigkeit

Carsten Röttele

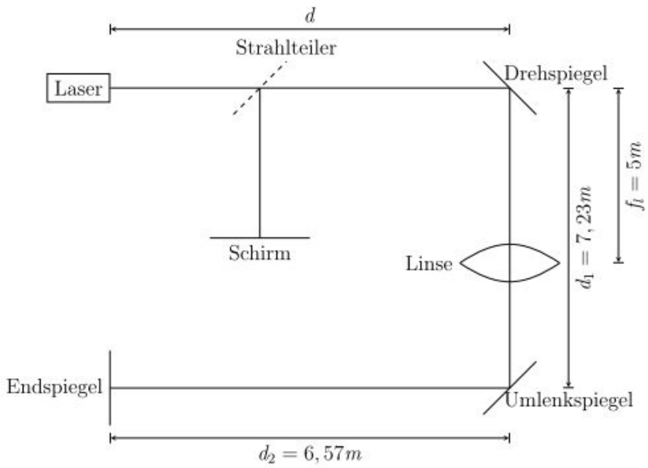
12. Dezember 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Drehspiegelmethode

1.1 Vorbereitung auf den Versuch

Als erstes soll die Foucault-Michelson Drehspiegelmethode verwendet werden, um die Lichtgeschwindigkeit zu messen. Dazu muss folgender Versuchsaufbau, bei denen die Abstände, welche in der Aufgabenstellung stehen schon eingezeichnet sind, vorgenommen werden:



Wie man der Abbildung entnehmen kann, wird hier das Licht aus einem Laser hinausgeschossen von wo aus es auf einen Drehspiegel trifft. Dieser reflektiert das Licht, sodass es durch eine Sammellinse auf einen festen Umlenkspiegel läuft, welcher es zu einem Endspiegel ßchickt". Von da aus wird es wieder auf dem gleichen Weg zurückgeschickt. Dadurch trifft Licht wieder auf den Drehspiegel, der sich in der Zwischenzeit aber gedreht hat, sodass es mit einem anderen Winkel reflektiert wird. Danach trifft es auf einen Strahlenteiler, der es auf einen Schirm lenkt, wo man den auftreffenden Strahl mit einer Lupe beobachten kann. Diese sollte aufgrund ihrer Brennweite von $10cm$ auch in diesem Abstand vom Schirm gehalten werden.
Mit dem bereits angesprochenen Winkel kann man auch dann die Lichtgeschwindigkeit bestimmen, da man dadurch am Schirm zwei verschiedene Punkte beobachten kann, einmal wenn sich der Drehspiegel langsam und einmal wenn er sich schnell dreht.
Die Sammellinse wird dazu verwendet, damit man sowohl am Drehspiegel, als auch am Endspiegel einen scharfen Punkt erkennt. Damit der erste Punkt erfüllt ist, muss der Brennpunkt im Drehspiegel liegen, also muss die Entfernung zwischen Drehspiegel und Linse $5m$ betragen. Dadurch tritt das Licht hinter der Linse in parallelen Strahlen aus und wird auf dem Rückweg wieder auf einen Punkt auf dem Drehspiegel fokussiert. Hat hierbei der Drehspiegel eine kleine Drehfrequenz, so erkennt man auf dem Schirm nur einen Punkt.
Um am Endspiegel ein scharfes Bild zu erhalten, muss man den Abstand zwischen Laser

und Drehspiegel richtig einstellen. Über die Linsengleichung ergibt sich folgende Formel:

$$\frac{1}{f_l} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{d + f_l} + \frac{1}{d_1 - f_l + d_2}$$

Da $d_1 = 7,23m$ und $d_2 = 6,57m$ schon in der Aufgabenstellung gegeben sind, müssen wir nur noch die Formel nach d auflösen und erhalten:

$$d = \frac{f_l^2}{d_1 + d_2 - 2f_l} \approx 6,58m$$

Dieser Wert liegt im Bereich des maximal einstellbaren Abstands von $6,80m$.
Zudem müssen wir beachten, dass der Abstand zwischen Drehspiegel und Strahlenteiler bis zum Schirm auch gleich groß, wie der eben berechnete von $6,58m$ ist. Dadurch ist auf dem Schirm das Bild scharf. Die Funktion des Strahlenteilers ist dabei offensichtlich, nämlich dass das Licht nicht wieder auf den Laser zurückgeht, sondern dass man dieses auf dem Schirm sehen kann.
Nun gilt es über den Abstand s der beiden Punkte auf dem Schirm auf die Lichtgeschwindigkeit zu schließen. Hierzu muss man zunächst einmal betrachten, um welchen Winkel α der Drehspiegel verschoben ist, nachdem das reflektierte Licht wieder am Drehspiegel angekommen ist. Daraus ergibt sich dann ein Winkel von 2α zwischen dem einfallendem und ausfallendem Strahl.
Betrachten wir zunächst die Zeit, die das Licht braucht um vom Drehspiegel über den Endspiegel und wieder zurück zu diesem zu kommen:

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{c} = 2\frac{d_1 + d_2}{c}$$

Für den Drehwinkel gilt:

$$\alpha = \omega \cdot \Delta t = 2\pi f \Delta t = 4\pi f \frac{d_1 + d_2}{c}$$

Zudem gilt für die Ablenkung:

$$\tan(2\alpha) = \frac{a}{d_{Teiler} + d_{Schirm}} = \frac{a}{d} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\arctan(\frac{a}{d})$$

Da wir nun zwei Gleichungen für α haben, können wir beide gleichsetzen und erhalten:

$$\frac{1}{2}\arctan(\frac{a}{d}) = 4\pi f \frac{d_1 + d_2}{c} \rightarrow c = 8\pi f \frac{d_1 + d_2}{\arctan(\frac{a}{d})}$$

Für kleine Winkel ist der Arcustangens ungefähr sein Argument und daraus folgt:

$$c = 8\pi f d \frac{d_1 + d_2}{a}$$

Wenn man nun den erwarteten Abstand berechnen will, muss man nur die Formel nach a umformen, für die Frequenz $f = 500Hz$ aus der Aufgabenstellung und noch den Literaturwert der Lichtgeschwindigkeit von $c = 2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ einsetzen und man erhält:

$$a \approx 3,8mm$$

1.2 Justierung der Apparatur und Messung

Nun soll die Messung durchgeführt werden und man muss dazu die ganze Apparatur zuerst aufbauen. Dazu müssen folgende Dinge durchgeführt werden:

- Der in Aufgabe 1.1 berechnete Abstand vom Laser zum Drehspiegel von $6,58m$ einstellen.
- Der Strahl sollte horizontal auf den Drehspiegel treffen.
- Den Ort des Drehspiegel so wählen, sodass der Strahl genau auf die Mitte des Umlenkspiegels trifft.
- Die erste Linse $10cm$ entfernt vom Schirm und die zweite $5m$ entfernt vom Drehspiegel aufstellen, außerdem diese ausrichten.
- Den Umlenkspiegel so aufstellen, sodass der Strahl auf die Mitte des Endspiegels trifft.
- Den Endspiegel so positionieren, dass der Strahl in sich selbst reflektiert wird.
- Der zurückkehrende Strahl muss die Laseröffnung treffen.
- Den Schirm nach Aufgabe 1.1 aufstellen.
- Den Ort der Phototransistors, den man für die Frequenzmessung des Spiegels benutzt.

Jetzt kann man die Messung durchführen, indem man die Frequenz des Drehspiegels von $440Hz$ mit einer Stimmgabel einstellt. Man hat die gleiche Frequenz, wenn man eine Schwebung mit dem Motorengeräusch erkennt.

2 Phasenvergleichmethode

2.1 Vorbereitung auf den Versuch

Mithilfe von diesem Versuchsaufbau bestimmt man die Lichtgeschwindigkeit über die Phasengeschwindigkeit des Lichtes. Diese entspricht in Luft der Gruppengeschwindigkeit, welche wir im ersten Versuch gemessen haben.
Hierzu wird an einer Leuchtdiode eine Spannung angelegt, welche man an einem Oszilloskop misst. Zusätzlich befindet sich in einem bestimmten Abstand d eine Photodiode, deren Spannung man auch an einem Oszilloskop misst. Man erkennt zwar an dem Oszilloskop, dass beide Schwingungen die gleiche Frequenz haben, jedoch wird die Spannung an der Photodiode eine Phasenverschiebung besitzen. Über die Messung dieser Phasenverschiebung kann man dann auf die Lichtgeschwindigkeit schließen.
Jedoch ergibt sich hier das Problem, dass das Oszilloskop eine zu kleine Zeitablenkung hat. Wenn wir nämlich einen Abstand $d = 1m$ von der Leucht- zur Photodiode haben und die Zeitdifferenz der beiden Schwingungen $\Delta t = \frac{1}{10}T$ betragen soll, erhalten wir für die nötige Frequenz:

$$c = \frac{d}{\Delta t} = \frac{1m}{\frac{1}{10}T} = 1m \cdot 10f \stackrel{!}{=} 2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \rightarrow f \approx 30MHz$$

Demzufolge müsste dann ein Oszilloskop für eine $5mm$ Verschiebung eine Geschwindigkeit haben von:

$$v = 0,5cm \cdot f = 150\frac{cm}{\mu s}$$

Wie der Aufgabenstellung zu entnehmen ist, besitzen jedoch konventionelle Oszilloskope nur eine Geschwindigkeit von bis zu $10\frac{cm}{\mu s}$ und sind deshalb zu langsam.
Damit man die Messung trotzdem durchführen kann, muss man das eigentliche Signal $a\cos(\omega t + \phi)$ mit einem Hilfssignal $A\cos(\Omega t)$ multiplizieren. Daraus ergibt sich durch Anwendung des dazugehörigen Additionstheorems:

$$\begin{aligned} a\cos(\omega t + \phi) \cdot A\cos(\Omega t) &= \frac{aA}{2} \cdot [\cos(\omega t + \phi - \Omega t) + \cos(\omega t + \phi + \Omega t)] \\ &= \frac{aA}{2} \cdot [\cos((\omega - \Omega)t + \phi) + \cos((\omega + \Omega)t + \phi)] \end{aligned}$$

Man erkennt das man immer noch die gleiche Phasenverschiebung ϕ hat. Zudem wird der höherfrequente Anteil $\omega + \Omega$ durch Tiefpässe unterdrückt. Somit wird am Oszilloskop dieses Signal der beiden Dioden so dargestellt, dass man den Phasenunterschied messen kann. Außerdem muss jetzt noch die Zeitdifferenz umgerechnet werden. Dies geschieht über die gleiche Phasenverschiebung bei bei beiden Signalen:

$$\phi = \omega \Delta t = (\omega - \Omega)\Delta t'$$

Da sowohl $\omega \cong 2\pi \cdot 60MHz$, als auch $\Omega \cong 2\pi \cdot 59,9MHz$ in der Aufgabenstellung gegeben sind, erhalten wir für die ursprüngliche Zeitdifferenz:

$$\Delta t = \frac{\omega - \Omega}{\omega} \cdot \Delta t' = \frac{1}{600}\Delta t'$$

2.2 Justierung der Apparatur und Eichmessung

Als erstes soll das Blockschaltbild auf der Gerätefrontplatte betrachtet und verstanden werden. Danach soll man die Apparatur justieren. So sollen die Justierschrauben der Dioden richtig eingestellt werden, sodass ein Parallelstrahl zur Zeiß-Schiene entsteht. Auch soll man eine Linse aufstellen, sodass die Fotodiode optimal beleuchtet wird. Mit einem Frequenzzähler soll die Modulationsfrequenz ω und die Differenzfrequenz $\omega - \Omega$ gemessen werden.
Zudem muss eine Eichung für die Zeitablenkung des Oszilloskops mithilfe ein $\omega/10$ Signals durchgeführt werden, da man dadurch genauere Werte erhält.

2.3 Lichtgeschwindigkeits- und Brechzahlmessungen

2.3.1 Lichtgeschwindigkeit in Luft

Wie schon im Aufgabenteil 2.1 beschrieben, erhält man die Lichtgeschwindigkeit durch:

$$c = \frac{d}{\Delta t} = 600 \cdot \frac{d}{\Delta t'}$$

2.3.2 Brechzahl von Wasser

Nun wird der $1m$ große Lichtweg in Luft durch $1m$ Lichtweg in Wasser ersetzt. Dadurch soll die Brechzahl von Wasser bestimmt werden.
Zunächst muss hierfür $\Delta t'$ betrachtet werden:

$$\Delta t = \frac{1}{600} \cdot \Delta t' = \frac{d - x}{c_{Luft}} + \frac{x}{c_{Wasser}} \rightarrow c_{Wasser} = \frac{600 c_{Luft} x}{c_{Luft}\Delta t' - (d - x) \cdot 600}$$

x sei hierbei die Strecke des Lichtweges in der sich Wasser befindet. Daraus erhalten wir für die Brechzahl:

$$n = \frac{c_{Luft}}{c_{Wasser}} = 1 + \frac{c_{Luft}\Delta t' - 600d}{600x} \quad (1)$$

2.3.3 Brechzahl von Plexiglas

Diese geschieht analog zur Bestimmung der Brechzahl von Wasser.

2.3.4 Lichtgeschwindigkeitsmessung mit Lissajous-Figuren

Um überhaupt Lissajous-Figuren zu erkennen, muss man zunächst das Oszilloskop auf X/Y-Betrieb einstellen. Da man eine Gerade haben möchte, braucht man für die Phasenverschiebung ganzzahlige Vielfache m von π.
Damit man nun die Lichtgeschwindigkeit bestimmen kann, muss man nur einen bestimmten Abstand d_1 einstellen, bei dem eine Gerade zu sehen ist und danach den Abstand auf d_2 verringern, bis man wieder eine Gerade sieht. Wichtig ist dann die Differenz Δd zwischen den beiden Abständen, denn es gilt für die Phasenverschiebung:

$$\phi_1 = \omega \frac{d_1}{c} \stackrel{!}{=} m\pi \quad \text{und} \quad \phi_2 = \omega \frac{d_1}{c} = \omega \frac{d_1 + \Delta d}{c} \stackrel{!}{=} (m+1)\pi$$
$$\rightarrow \Delta d = (m+1)\pi \frac{c}{\omega} - d_1 = \frac{c}{2\nu} = \frac{\lambda}{2}$$

Daraus erhalten wir für die Lichtgeschwindigkeit:

$$c = \lambda \cdot \nu = 2 \cdot \Delta d \cdot \nu$$

2.3.5 Brechzahlbestimmung mit Lissajous-Figuren

Als letztes soll man noch mit den Lissajous-Figuren Brechzahlen bestimmen. Dazu stellt man als erstes einen Abstand d_0 so ein, dass wir eine Gerade auf dem Oszilloskop erkennen. Danach bringt man das Medium der Länge x hinein und muss nun den neuen Abstand d finden, sodass man wieder eine Gerade sieht. Mit der Strecke Δs, welche man verändern musste, kann man nun auf die Brechzahl schließen. Es gilt:

$$\Delta s = d_0 - d = \Delta t \cdot c_{Luft} - d$$

Mit Gleichung (1) aus Aufgabenteil 2.3.2 erhält man für die Brechzahl:

$$n = 1 + \frac{\Delta s}{x}$$

3 Quellen

- Literaturmappe
- Musterprotokolle

Vorbereitung

Lichtgeschwindigkeit

Stefan Schierle

Versuchsdatum: 13. 12. 2011

Inhaltsverzeichnis

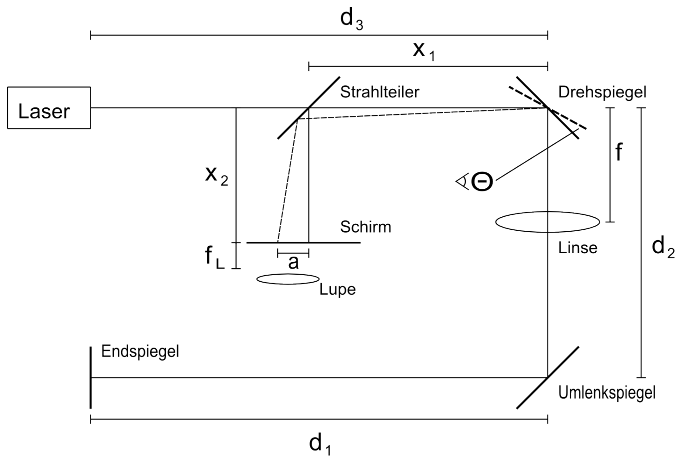
1 Drehspiegelmethode

1.1 Vorbereitung auf den Versuch

Zum Versuchsaufbau: Der Aufbau ist durch die in der Aufgabenstellung vorgegebenen Maße beschränkt:

- d(Endspiegel - Umlenkspiegel) - in der Skizze d_1 : $6,57m$
- d(Umlenkspiegel - Drehspiegel) - in der Skizze d_2 : $7,23m$
- d(Laser - Drehspiegel) - in der Skizze d_{max} : $6,80m \Rightarrow d_3 < d_{max}$

Es bleibt hier zu bestimmen, welche Entfernung die Linse vom Laser und dem Schirm haben muss, und die Entfernung der Lupe vom Schirm.



Aufbauskizze des Versuchs

Funktionsweise des Versuchs: Vom Laser wird monochromatisches Licht ausgesandt. Der Lichtstrahl trifft durch den Strahlteiler auf den Drehspiegel. Dieser sorgt wegen seiner Rotation dafür, dass der Laserstrahl in verschiedenen Winkeln reflektiert wird. Die so reflektierten Strahlen werden durch eine Linse wieder zu parallelen Strahlen gebrochen, welche über den Umlenkspiegel, den Endspiegel und wieder über den Umlenkspiegel auf die Linse treffen. Die Linse muss nun so positioniert sein, dass die parallel einfallenden Strahlen im Mittelpunkt des Drehspiegels gebündelt werden.
Daraus ergibt sich, dass der Abstand f in der Skizze genau der Brennweite der Linse ($5m$) betragen muss.
Der nun wieder gebündelte Lichtstrahl wird am Drehspiegel reflektiert, da dieser aber rotiert, wird das Licht in einem anderen Winkel (Θ) reflektiert, als es beim Hinweg in den Spiegel eingefallen ist. Um diesen Winkel versetzt trifft der Strahl nun auch auf den Strahlteiler wo dieser nun durch die Versetzung nochmals schief reflektiert wird. Zudem wird der Strahlteiler benötigt, um auch geringe Ablenkungen messbar zu machen, da ohne diesen der Laserstrahl wieder in die Austrittsöffnung des Lasers zurückgeworfen

und somit nicht messbar wird. Am Schirm ist also ein verschobener Punkt im Vergleich zum ruhenden Drehspiegel zu erkennen. Über diese Verschiebung und die Frequenz des Drehspiegels lässt sich die Lichtgeschwindigkeit ermitteln.

Berechnung der noch fehlenden Größen:

Die Linse muss, wie oben schon erwähnt, den Brennpunkt im Drehspiegel haben, also ist $f = 5m$.

Da nach Möglichkeit beim Versuch scharfe Bilder zu erzeugen sind, muss der Laser und der Strahlteiler mit Schirm passend positioniert werden, was mit der Linsengleichung berechnet werden kann. Zuerst wird die die Distanz Laser Drehspiegel ermittelt:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

$$Wobei:$$

$$g = d_3 + f \qquad b = d_1 + d_2 - f$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_3 + f} + \frac{1}{d_1 + d_2 - f}$$

$$d_3 = \frac{f^2}{d_1 + d_2 - 2f}$$

Setzt man nun die gegebenen Werte ein, so Erhält man eine Strecke $d_3 = 6,58m$. Dies liegt in dem realisierbaren Bereich von $d_{max} = 6,8m$.

Der Schirm muss sich ebenfalls in dieser gleichen Entfernung vom Drehspiegel befinden, damit wir auch hier ein scharfes Bild erhalten. Damit gilt:

$$d_3 = x_1 + x_2.$$

Mit Hilfe der Lupe (Abstand vom Schirm: $f_L = 10cm$) muss der Abstand (a) des Strahls bei ruhendem Drehspiegel und beim durch den rotierenden Drehspiegel abgelenkten Strahl ermittelt werden. Durch eben diesen Abstand lässt sich die Lichtgeschwindigkeit c bestimmen:

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$t = \frac{\Delta s}{c} \qquad \Delta s = 2(d_1 + d_2)$$

$$t = \frac{2(d_1 + d_2)}{c}$$

Nun wird die Spiegelrotation berücksichtigt:

$$\Delta\Theta = \Delta\omega t$$

$$\Delta\Theta = 2\pi f t \qquad t = \frac{2(d_1 + d_2)}{c}$$

$$\Delta\Theta = 2\pi f \frac{2(d_1 + d_2)}{c}$$

Nun lässt sich das Dreieck vom Drehspiegel zum Schirm betrachten. Hierbei ich daran zu denken, dass der relevante Winkel im Dreieck $2\Delta\Theta$ beträgt.

$$\tan(2\Delta\Theta) = \frac{a}{d_3}$$

Da in diesem Fall $a \ll d_3$ kann man eine Näherung des tan durchführen:

$$\begin{aligned}
\tan(2\Delta\Theta) &\approx 2\Delta\Theta \\
\Rightarrow 2\Delta\Theta &= \frac{a}{d_3} \\
\Delta\Theta &= \frac{a}{2d_3}
\end{aligned}$$

Nun kann man alle obigen Gleichungen zusammenführen:

$$\begin{aligned}
\Delta\Theta &= 2\pi f \frac{2(d_1+d_2)}{c} \\
c &= 2\pi f \frac{2(d_1+d_2)}{\Delta\Theta} & \Delta\Theta = \frac{a}{2d_3} \\
c &= 2\pi f \frac{4d_3(d_1+d_2)}{a} \\
c &= 8\pi d_3 f \frac{(d_1+d_2)}{a}
\end{aligned}$$

Hiermit lässt sich die zu erwartende Größenordnung der Abweichung a auf dem Schirm vorhersagen, unter der Annahme, dass $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ bereits bekannt sei und der Drehspiegel mit der maximalen Frequenz von $500Hz$ rotiert.

$$\begin{aligned}
a &= 8\pi d_3 f \frac{(d_1+d_2)}{c} \\
a &= 8 \cdot 6,58m \cdot 500Hz\pi \frac{(6,57m + 7,23m)}{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} \\
a &= 3.80 \cdot 10^{-3} m
\end{aligned}$$

1.2 Justierung der Apparatur und Messung

Damit der Versuch durchgeführt werden kann, muss nun der Aufbau und die Justierung der Apparatur erfolgen. Nach den oben bestimmten Maßen sollen nun die Bauteile montiert werden. Da diese aber, aller Wahrscheinlichkeit nach, noch nicht ideal ausgerichtet sind, um einen vernünftigen Strahlenverlauf zu ermöglichen müssen sie wie in der Aufgabenstellung beschrieben justiert und ausgerichtete werden.

Zum Einstellen der Frequenz soll eine Stimmgabel zur Hilfe genommen werden. Da der Drehspiegel die Rotationsfrequenz $440Hz$ erreichen soll, kann dies mit einer Stimmgabel der gleichen Frequenz (Kammerton A) ermittelt werden. Die durch den rotierenden

Spiegel erzeugten akustischen Schwingungen überlagern sich mit denen der Stimmgabel. Es entstehen Schwebungen; rotiert der Drehspiegel mit ungefähr der gleichen Frequenz, wie die der Stimmgabel so ist eine Schwebung kaum mehr festzustellen. Die so ermittelte Drehfrequenz soll nun mit der Frequenzanzeige verglichen werden.

2 Phasenvergleichsmethode

2.1 Vorbereitung auf den Versuch

Es geht darum die Phasenverschiebung eines modulierten Lichtimpulses, der von einer Diode ausgesandt und einen Meter Weiter von einem Phototransistor wieder gemessen wird zu bestimmen. Wenn das Ursprungssignal der Form $a\cos(\omega t)$ entspricht, dann muss das Aufgenommene Signal die Form $a\cos(\omega t + \varphi)$ besitzen. φ wäre hierbei unsere Phasenverschiebung, die durch die Laufzeit des Lichts auf der Strecke von einem Meter resultiert. $\varphi = \frac{c}{d}$. So lässt sich auch die Erwartungsgröße der Phasenverschiebung (φ), bzw. der Zeitverzögerung (Δt) bestimmen:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{c}{d} = \frac{1}{\Delta t}\\ \Delta t &= \frac{d}{c} = \frac{1m}{2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} = 3,336 \cdot 10^{-9} s\end{aligned}$$

Nach der Aufgabenstellung soll nun eine Zeitmarkenverschiebung in der Größenordnung von einem Zehntel der Periodendauer errechnet werden:

$$\begin{aligned}t_{10} &= 10 \cdot \Delta t\\ &= 3,336 \cdot 10^{-8} s\\ f &= \frac{1}{t_{10}}\\ &= 2,998 \cdot 10^7 Hz\end{aligned}$$

Somit wäre die nötige Modulationsfrequenz bei ungefähr $30MHz$.

Nun soll die bei einem Oszilloskop nötige Ablenkgeschwindigkeit errechnet werden, die benötigt würde, um eine solche Zeitmarkenverschiebung als 5-mm-Verschiebung auf dem Schirm darzustellen ($x = 5mm$):

$$\begin{aligned}v_{abl.} &= xf\\ &= 5mm \cdot 2,998 \cdot 10^7 s\\ &= 1,499 \cdot 10^5 \frac{m}{s} = 149,9 \frac{cm}{\mu s}\end{aligned}$$

Dieser Wert ist weit aus größer (15-fach), als die an einem konventionellen Oszilloskop zu erreichende Ablenkungsgeschwindigkeit von $10 \frac{m}{s}$.

Durch die multiplikative Mischung des Signals mit einem Hilfssignal soll nun die Messung vereinfacht werden. Man bedient sich hier einem Tiefpass, der nur den niederfrequenten Anteil der Schwingung berücksichtigt. Die Phasenverschiebung bleibt in diesem Fall aber gleich:

$$\begin{aligned} a\cos(\omega t+\varphi)\cdot A\cos(\Omega t) &= \frac{aA}{2}\left[\cos(\omega t+\varphi-\Omega t)+\cos(\omega t+\varphi+\Omega t))\right] \\ &= \frac{aA}{2}\left[\cos((\omega-\Omega)t+\varphi)+\cos((\omega+\Omega)t+\varphi)\right] \end{aligned}$$

Man sieht hier, dass die Phasenverschiebung erhalten bleibt, und der niederfrequenten Schwingungsanteil $(\omega-\Omega)$ durch den Tiefpass erhalten bleibt.
Durch dieses Herausfiltern der hohen Frequenzen erhalten wir aber einen Zeitdehnungsfaktor $(\frac{\Delta t'}{\Delta t})$.

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\frac{\varphi}{\omega-\Omega}}{\frac{\varphi}{\omega}} = \frac{\omega}{\omega-\Omega}$$

$$\omega \approx 2\pi\cdot 60MHz \qquad \Omega = 2\pi 59,9MHz$$

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = 600$$

Dieser Zeitdehnungsfaktor ermöglicht es, die Phasenverschiebung an einem Oszilloskop darzustellen, da nun die verzögerte Ablenkungsgeschwindigkeit im Rahmen des vom Oszilloskop darstellbaren Bereiches liegt ($v_{abl.verz.} = 600\cdot v_{abl.} \approx 0,25\frac{m}{s}$). Die so gemessenen Werte müssen nur ebenfalls um diesen Faktor korrigiert werden.

2.2 Justierung der Apparatur und Eichmessung

Der Versuchsaufbau muss nun noch justiert werden, um eine möglichst gut ausgeleuchtete Photodiode zu erhalten. Dies soll mit Hilfe der Sammellinse geschehen. Außerdem soll der Lichtstrahl möglichst parallel zur Zeiß-Schiene sein.
Durch die genauere (quarzstabile) Frequenz der Lichtquelle soll die Zeitablenkung des Oszilloskopes geeicht werden. Hierfür wird der $\frac{\omega}{10}$-Signalausgang der Lichtquelle (ohne grünen Ring) benutzt werden.

2.3 Lichtgeschwindigkeits- und Brechzahlmessung

2.3.1 Lichtgeschwindigkeit in der Luft

Es wird der Abstand zwischen Sender und Empfänger variiert und somit in Abhängigkeit dieser Änderung die Phasenverschiebung bestimmt. Aus dieser Phasenverschiebung lässt sich die Lichtgeschwindigkeit berechnen, wobei der Zeitdehnungsfaktor berücksichtigt werden muss.

$$\begin{aligned} c &= \frac{d}{\Delta t} \\ &= \frac{\omega}{\omega - \Omega} \cdot \frac{d}{\Delta t_{Oszi}} \end{aligned}$$

2.3.2 Brechzahlbestimmung von Wasser

Unter der Annahme, dass $\frac{c_{Vakuum}}{c_{Medium}} = \frac{c_{Luft}}{c_{Wasser}}$ gilt, lässt sich der Brechungsindex (n) von Wasser, wenn ebenfalls die Strecke $d = 1m$ durchlaufen wird, sehr einfach bestimmen:

$$n = \frac{c_{Luft}}{c_{Wasser}}$$

Hierfür wird eigentlich nur eine Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit in Wasser nötig, die nach obigem Schema durchgeführt wird.
Wird nicht die volle Länge zwischen Sender und Empfänger $(d > l)$ ausgefüllt, so wird die Brechzahl wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{d-l}{c_{Luft}} + \frac{l}{c_{Wasser}} \\ n_{Wasser} &= \frac{c_{Luft}}{c_{Wasser}} n_{Luft} \qquad\qquad n_{Luft} = 1 \\ n_{Wasser} &= \frac{c_{Luft} \cdot \Delta t - d + l}{l} \end{aligned}$$

2.3.3 Brechzahlbestimmung von Plexiglas

Analog zur Brechzahlbestimmung von Wasser.

2.3.4 Lissajous-Figuren - Lichtgeschwindigkeitsbestimmung

Werden zwei Schwingungen gleicher Frequenz aber mit Phasenverschiebung gegeneinander (auf x- und y-Achse) aufgetragen, so bilden sich Lissajous-Figuren. Beträgt die Verschiebung genau ein ganzzahliges Vielfaches der halben Periode, also $k \cdot \frac{\lambda}{2}$, so ist am Oszilloskop eine Gerade zu erkennen. Es wird der Abstand zwischen Sender und Empfänger variiert, bis zwei Punkte gefunden wurden, bei denen eine Gerade auf dem Oszilloskopschirm angezeigt wird. Die Längendifferenz dieser Punkte sei Δl
Somit lässt sich auch die Lichtgeschwindigkeit bestimmen:

$$\begin{aligned} \Delta l &= k \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad\qquad \lambda = \frac{c}{f} \\ \Delta l &= k \cdot \frac{c}{2 \cdot f} \\ c &= \Delta l \cdot 2 \cdot f \end{aligned}$$

2.3.5 Brechzahlbestimmung via Lissajous-Figuren

Auch mit dieser Methode lässt sich die Brechzahl eines Mediums bestimmen. Hat das Medium die Länge x, so ändert dies die Laufzeit vom Sender zum Empfänger und somit die Lissajous-Figur auf dem Schirm. Um dies wieder zu korrigieren wird die Entfernung von Sender und Empfänger geändert (Δl), bis wieder die Gerade auf dem Schirm zu sehen ist.

$$\begin{aligned}\Delta l &= d - d_{mitMedium} \\ &= \Delta t \cdot c_{Luft} - d_{mitMedium}\end{aligned}$$

Analog zur Ermittlung der Brechzahl von Wasser ergibt sich hier die Bestimmungsformel:

$$n = \frac{\Delta l}{x} + 1$$

Auswertung

Lichtgeschwindigkeit

Carsten Röttele Stefan Schierle

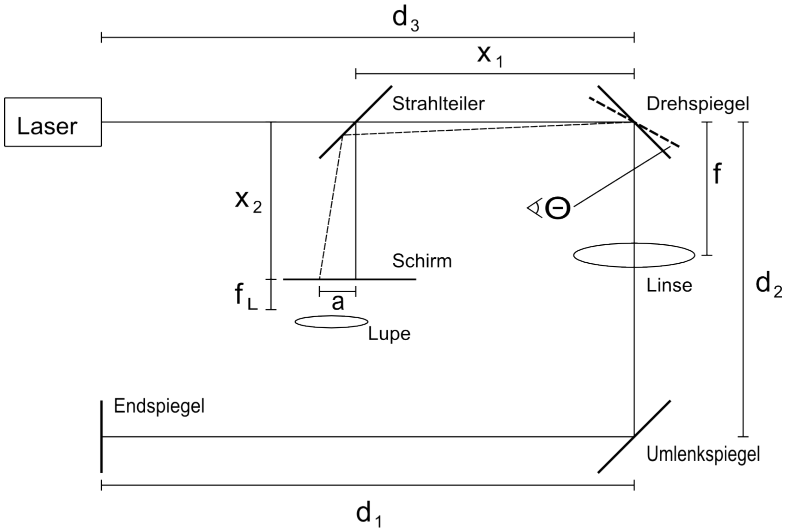
Versuchsdatum: 13. 12. 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Drehspiegelmethode

1.1 Vorbereitung auf den Versuch

Diesen Aufgabenteil haben wir bereits in den Vorbereitungen abgearbeitet.
Zur Klarstellung der verwendeten Maße nochmals die Aufbauskizze:



Dabei sind die errechneten und gegebenen Werte:

- $d_1 = 6,57$
- $d_2 = 7,23$
- $d_3 = 6,58$

1.2 Justierung der Apparatur und Messung

Da der Versuch zum Großteil noch aufgebaut war, mussten wir nur die jeweiligen Abstände überprüfen und die Ausrichtung der Spiegel und Linse minimal korrigieren um den gewünschten Verlauf des Laserstrahls zu erhalten. Der Phototransistor zur Bestimmung der Frequenz des Drehspiegels war bereits richtig eingestellt.

Auf dem Schirm war ein Lichtfleck bei der Marke $28mm$ zu erkennen. Alle weiteren abgegebenen Werte für a sind relativ von diesem aus gemessen. Die Ablenkung des Laserpunktes auf dem Schirm erfolgte, bei höheren Frequenzen, durch die Lupe betrachtet nach rechts.

Wir verglichen danach die Rotationsfrequenz des Drehspiegels über dessen Rotationsgeräusch mit einer Stimmgabel. Die Schwebungen waren schwer hörbar, jedoch gelang es uns einigermaßen genau hiermit die Frequenz von $440Hz$ zu bestimmen. Hierbei schwankte aber die angezeigte Frequenz um $\pm 200 \frac{1}{min}$ was auf die Ungenauigkeit des Phototransistors zurückzuführen ist.

Die eigentliche Messreihe besteht aus der Messung der Ablenkung a bei einer bestimmten Frequenz. Wir wählten die Methode, dass wir jeweils bei $0,5mm$-Schritten die Frequenz ablasen. Da die Skala in $1mm$-Schritten unterteilt war und der Laserstrahl doch eine Ausdehnung ($0,5mm$) auf dem Schirm hat, sind die genannten Werte also dem entsprechend ungenau. Außerdem haben wir noch versucht für markante Frequenzen die Ablenkung zu bestimmen. Hierbei haben wir versucht die Position des Intensitätsmaximums zu bestimmen.

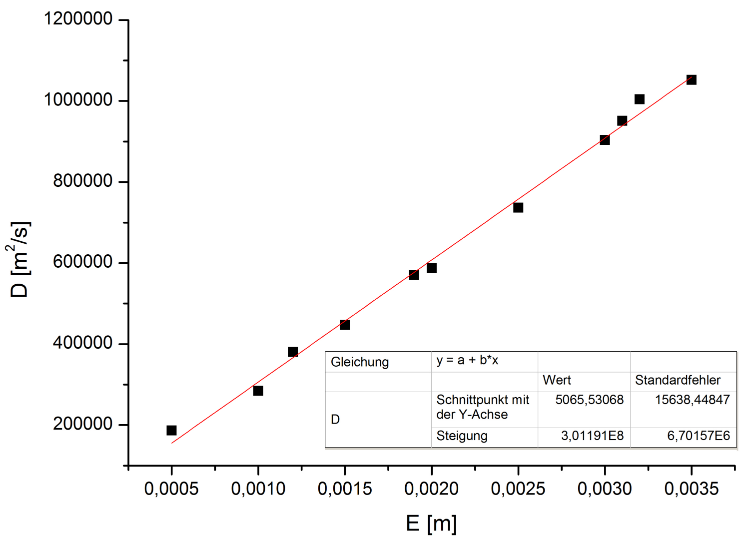
Bestimmung von c: Die Bestimmung von c führten wir mit der in der Vorbereitung hergeleiteten Formel durch:

$$c = 8\pi d_3 f \frac{(d_1 + d_2)}{a}$$
$$a \cdot c = 8\pi d_3 f \cdot (d_1 + d_2)$$

Dieses geschickte Umstellen der Berechnungsformel von c ermöglicht uns, dass wir die gesuchte Lichtgeschwindigkeit als Steigung der linearen Regression erhalten. Damit dies möglich wird, werden die Messwerte (siehe Tabelle) mit den jeweiligen Konstanten multipliziert. Um gleich den Wert der Lichtgeschwindigkeit zu erhalten, passten wir die jeweiligen Einheiten an.

mm	1/min
a	f
0,5	4900
1	7480
1,5	11750
2	15440
2,5	19360
3	23760
3,5	27670
3,1	25000
3,2	26400
1,9	15000
1,2	10000

Messwerte



Graph mit linearer Regression

Somit erhalten wir als gemessenen Wert der Lichtgeschwindigkeit $c = 3,012 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$. Verglichen mit dem Literaturwert von $c = 2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ haben wir hier eine Abweichung von $0,46\%$ die sogar im Bereich des statistischen Fehlers $(6,702 \cdot 10^6)$ liegt, der durch die Angaben von Origin zur Regressionsgeraden entnommen werden kann.

Laut Aufgabenstellung soll der systematische Fehler noch berechnet werden, um die Fehlergrenzen des ermittelten c-Wertes anzugeben.
Die systematischen Ungenauigkeiten im Überblick:

- Ungenauigkeit der Längen des Versuchsaufbaus, da die Skala des Maßbandes in $1-cm$-Schritten unterteilt ist, würden wir hier einen Fehler der halben Skaleneinteilung annehmen, da das Maßband auf den zu messenden Längen minimal durchhing nehmen wir für d_1,d_2 und d_3 jeweils einen systematischen Fehler von $\pm 1cm$ an.
- Die angezeigte Frequenz hat ebenfalls eine Ungenauigkeit von 1%
- Durch die bereits erwähnte Ausdehnung des Laserstrahls nehmen wir für diesen einen Fehler von $0,2mm$ an, da dies ungefähr dem Durchmesser des Intensitätmaximums auf dem Schirm entspricht.
- Ebenfalls muss am Schirm eine Skalenungenauigkeit angenommen werden. Da diese aber sehr genau abgelesen werden konnte nehmen wir hier ebenfalls einen Fehler von $0,2mm$ an.
- Somit erhält man einen systematischen Fehler für a von $\sigma_a = 0,4mm$.

Über das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz lässt sich nun der systematische Fehler bestimmen. Hier verwenden wir die Formel $c = 8\pi d_3 f \frac{(d_1 + d_2)}{a}$.

$$\sigma_{sys} = 8\pi \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial f}\right)^2 \sigma_f^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial d_3}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial (d_1)}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial (d_2)}\right)^2 \sigma_d^2}$$

Hin diese Formel eingesetzt erhalten wir einen mittleren Systematischen Fehler von $\sigma_{sys} = 8,368 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$.

Der endgültige Messwert wäre somit

$$c = (3,012 \pm 0,837 \pm 0,068) \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Unser Wert liegt also im Bereich der Messungenauigkeit. Zu bedenken bleibt aber, dass wir unseren systematischen Fehler womöglich überschätzt haben, da dieser doch relativ hoch angesetzt ist.

2 Phasenvergleichsmethode

2.1 Vorbereitung auf den Versuch

Diese Aufgabe wurde bereits ausführlich in der Vorbereitung gelöst.

2.2 Justierung der Apparatur und Eichmessung

Auch hier sollte zunächst wieder eine Justierung der Apparatur vorgenommen werden. Nachdem wir uns als erstes mit dem Blockschaltbild beschäftigt haben, fanden wir die Apparatur jedoch schon richtig aufgebaut vor, sodass wir eigentlich nichts mehr ändern mussten.
Wie in der Aufgabenstellung verlangt, haben wir dann die Frequenzen mit einem Frequenzzähler überprüft und erhielten dabei:

- für ω: $\frac{\omega}{10} = 2\pi \cdot 5,99MHz \ \rightarrow \omega = 2\pi \cdot 59,9MHz$
- für $\omega - \Omega$ an der Leuchtdiode: $\omega - \Omega = 2\pi \cdot 102kHz$

Dadurch können wir unseren Umrechenfaktor für die Zeitdifferenzen mit den gerade bestimmten Werten berechnen. Die Formel dafür wurde in der Vorbereitung hergeleitet:

$$\frac{\omega}{\omega - \Omega} \approx 587,25$$

Diese Wert entspricht auch in etwa, den in der Vorbereitung berechneten Wert von 600.
Zudem sollte eine Eichung des Oszilloskops durchgeführt werden. Dazu mussten wir das $\frac{\omega}{10}$ Signal von der Leuchtdiode am Oszilloskop anschließen, um danach die verschiedenen Perioden zu zählen in den Bereichen von $0,5\mu s$/Rastermaß und $0,1\mu s$/Rastermaß. Wir erhielten dabei:

- Bei der $0,5\mu s$/Rastermaß zählten wir 30 Perioden auf dem Bildschirm für 10 Kästchen. Die Periodenanzahl durch die Anzahl der Kästchen muss man dann nur noch durch die $\frac{\omega}{10}$ Frequenz teilen und man erhält so für die Eichung: $5,008\frac{\mu s}{Skala}$
- Bei der $0,1\mu s$/Rastermaß zählten wir 6 Perioden auf dem Bildschirm für 10 Kästchen. Daraus erhalten wir äquivalent, wie gerade eben, für die Eichung: $1,002\frac{\mu s}{Skala}$

Man erkennt also, dass das Oszilloskop sehr genau misst.

2.3 Lichtgeschwindigkeits- und Brechzahlmessungen

2.3.1 Lichtgeschwindigkeit in Luft

Nun begannen wir mit der eigentlichen Messung. Hierzu haben wir die Leuchtdiode zuerst möglichst nahe an die Linse geschoben. Danach haben wir in dieser Position über einen Stellknopf die Phasenverschiebung auf 0 gestellt. Dieser Punkt war bei uns in $25cm$

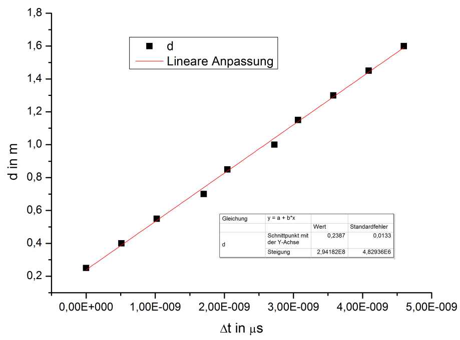
Entfernung von der Photodiode. Nun haben wir einfach in $15cm$ Schritten die Leuchtdiode immer weiter weg von der Photodiode und dabei jeweils die Phasenverschiebung über die Zeitdifferenz der beiden Sinuskurven am Oszilloskop bestimmt. Wir erhielten dabei folgende Werte:

Abstand d in m	0,25	0,40	0,55	0,70	0,85	1,00	1,15	1,30	1,45	1,60
Verschiebung in µs	0	0,3	0,6	1,0	1,2	1,6	1,8	2,1	2,4	2,7

Mit diesen Werten konnten wir mit der in der Vorbereitung hergeleiteten Formel für die Lichtgeschwindigkeit umstellen:

$$c = \frac{d}{\Delta t} = \frac{d}{587,25 \cdot \Delta t'} \rightarrow \Delta t \cdot c = d$$

Man kann hier erkennen, dass man nur alle Werte $\Delta t'$ in Δt umrechnen muss und wenn man dann diese als x-Achse nimmt und für die y-Achse die Abstände d. Somit erhält man, wenn man eine Lineare Regression der eingetragenen Punkte durchführt, die Lichtgeschwindigkeit als Steigung:



Wir können also ablesen, dass wir bei unserer Messung für die Lichtgeschwindigkeit einen Wert von $2,942 \cdot 10^8$ erhalten. Somit beträgt unsere Abweichung vom Literaturwert etwa $1,4\%$, wobei wir zudem mit dem uns schon von unserem Plotter Origin gegebenen Wert des systematischen Fehlers im Bereich des Literaturwertes liegen.

2.3.2 Brechzahl von Wasser

Um die Brechzahl von Wasser zu bestimmen, haben wir zunächst einen festen Abstand $d = 1,3m$ von der Leuchtdiode zur Photodiode gewählt und haben anschließend den $x = 1m$ langen mit Wasser gefüllten Zylinder dazwischen gestellt. Über die bereits in der Vorbereitung hergeleitete Formel erhalten wir für die Brechzahl von Wasser:

$$n = 1 + \frac{c_{Luft}\Delta t' - 587,25d}{587,25x} = 1 + \frac{2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 2,8\mu s - 587,25 \cdot 1,3m}{587,25 \cdot 1m} \approx 1,13$$

Wenn man dieses Ergebnis mit dem Literaturwert von 1,33 vergleicht, so stellt man fest, dass wir einen sehr großen Fehler von etwa 15% haben. Auf die möglichen Fehlerquellen wird gleich im nächsten Punkt näher eingegangen.

2.3.3 Brechzahl von Plexiglas

Auch hier sind wir wieder genau so, wie bei der Messung von Wasser vorgegangen. Hierbei verwendeten wir einen festen Abstand $d = 1m$ und der Plexiglaszylinder hatte eine Länge von $x = 0,3m$. Dies können wir wieder in unsere Formel einsetzen und erhalten:

$$n = 1 + \frac{c_{Luft}\Delta t' - 587,25d}{587,25x} = 1 + \frac{2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 1,8\mu s - 587,25 \cdot 1m}{587,25 \cdot 0,3m} \approx 0,73$$

Dies ist jedoch ein vollkommen falscher Wert, da die Brechzahl auf jeden Fall größer als eins sein muss. Wir vermuten, dass wir wahrscheinlich bei beiden Brechzahlbestimmungen vermutlich bei der Phasenverschiebung am Oszilloskop 5 Kästchen zu wenig gezählt haben, was umgerechnet $0,5\mu s$ zu wenig sind. Wenn wir nämlich zu unseren Messwerten diese jeweils hinzu addieren, so erhalten wir:
a)Für Wasser:

$$n = 1 + \frac{c_{Luft}\Delta t' - 587,25d}{587,25x} = 1 + \frac{2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 3,3\mu s - 587,25 \cdot 1,3m}{587,25 \cdot 1m} \approx 1,38$$

Jetzt wäre unsere Abweichung vom Literaturwert nur noch etwa $3,8\%$.
b)Für Plexiglas:

$$n = 1 + \frac{c_{Luft}\Delta t' - 587,25d}{587,25x} = 1 + \frac{2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 2,3\mu s - 587,25 \cdot 1m}{587,25 \cdot 0,3m} \approx 1,58$$

Dieses Ergebnis ist schon deutlich besser, auch wenn der Literaturwert 1,49 beträgt und wir somit immer noch eine Abweichung von etwa 6% haben.
Allgemein lässt sich aber trotzdem sagen, dass sich mit dieser Methode keine so gute Messung der Brechzahl durchführen lässt.

2.3.4 Lichtgeschwindigkeitsmessung mit Lissajous-Figuren

Wir haben nun das Oszilloskop auf X/Y-Betrieb umgestellt und konnten sofort sogenannte Lissajous-Figuren erkennen. Allerdings war es uns nicht möglich mit unserer Apparatur zwei Geraden zu erzeugen, stattdessen haben wir einmal den Abstand gemessen, als eine Gerade angezeigt wurde und beim anderen Mal, als ein Kreis auf dem Bildschirm angezeigt wurde. Ein Kreis entsteht bei einer Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$. Deshalb muss man zu der in der Vorbereitung hergeleiteten Formel den Faktor 2 multiplizieren. Mit unserem Messwert von $\Delta d = 1,48m - 0,236m = 1,244m$ und der immer noch gleichen Frequenz $\nu = 59,9MHz$ erhält man daraus:

$$c = 2 \cdot \lambda \cdot \nu = 4 \cdot \Delta d \cdot \nu \approx 2,981 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Unser Wert liegt sehr nahe am Literaturbereich und wir haben nur eine Abweichung von etwa $0,6\%$.

2.3.5 Brechzahlbestimmung mit Lissajous-Figuren

Zum Schluss sollten nochmal die Brechzahlen von Wasser und Plexiglas bestimmt werden. Wir haben dabei zuerst die Apparatur auf einen festen Abstand $d = 1,83m$ eingestellt und dabei eine Gerade am Oszilloskop durch Drehen am Stellknopf erzeugt. Danach haben wir das jeweilige Objekt vom vorherigen Aufgabenteil, hineingestellt und den Abstand solange verringert, bis man wieder eine Gerade auf dem Oszilloskop erkennen konnte. Wir bekamen dabei folgende Ergebnisse:
a)Für Wasser:

$$d_{mitMedium} = 1,5m \rightarrow \Delta l = 1,83m - 1,5m = 0,33m$$
$$\rightarrow n_{Wasser} = 1 + \frac{\Delta l}{x} = 1 + \frac{0,33m}{1m} = 1,33$$

Dies stimmt exakt mit dem Literaturwert überein.
b)Für Plexiglas:

$$d_{mitMedium} = 1,665m \rightarrow \Delta l = 1,83m - 1,665m = 0,0,165m$$
$$\rightarrow n_{Plexiglas} = 1 + \frac{\Delta l}{x} = 1 + \frac{0,165m}{0,3m} = 1,55$$

Hier haben wir eine etwas größere Abweichung vom Literaturwert $1,49$ von $4,0\%$, was auch noch im Rahmen liegt.