

Vorbereitung: Lichtgeschwindigkeit

Marcel Köpke

21. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	3
1.1 Historischer Hintergrund	3
1.2 Theoretische Grundlagen	3
2 Aufgaben	5
2.1 Drehspiegelmethode	5
2.1.1 Versuchsvorbereitung	5
2.1.2 Justierung und Messung	7
2.2 Phasenvergleichsmethode	7
2.2.1 Versuchsvorbereitung	7
2.2.2 Justierung	8
2.2.3 Brechzahlmessung	9
2.2.4 Lissajous-Figuren	9

1 Grundlagen

1.1 Historischer Hintergrund

Lange Zeit bestimmte die Vorstellungen einer instantanen Lichtausbreitung das Weltbild der Menschen. Erste Zweifel traten auf als Marin Mersenne 1636 für Schall eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit nachweisen konnte. Galileo Galilei versuchte mittels wechselseitigem Abdunkeln zweier Laternen die Lichtgeschwindigkeit in Luft zu messen, blieb jedoch erfolglos, da die verwendete Messapparatur „Mensch“ eine zu schlechte Reaktionszeit aufwies.

Als Entdecker der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts gilt heutzutage Olaf Römer, der mit ihrer Hilfe die Verzögerung in der Verdunkelung der Jupitermonde erklärte. Er bestimmte sie erstmals auf $c = 2,3 \cdot 10^8 \text{m/s}$ und erhielt damit zumindest ein in der Größenordnung richtigen Wert. James Bradley nutzte das Prinzip der Aberration anhand von Fixsternen um die Lichtgeschwindigkeit zu messen. Die beiden Ergebnisse von Römer und Bradley ergaben sich aus astronomischen Messungen und waren aufgrund dessen mit einem gewissen Fehler behaftet, da sie die genaue Kenntnis des Erdbahndurchmessers voraussetzten.

Die wohl erste terrestrisch Messung wurde von Armand Fizeau 1849 durchgeführt, der dafür eine Apparatur mit einem sich drehenden Zahnrad verwendete. Die Idee eine hohe Rotationsfrequenz auszunutzen, setzte sich in der von Léon Foucault und Albert Michelson durchgeführten Drehspiegelmethode fort, die auch in unserem Praktikumsversuch noch zum Einsatz kommt.

Heutzutage kommen bei Messungen hochentwickelte Laser und elektronische Geräte zum Einsatz, die den zu erwartenden Fehler bis auf wenige Meter pro Sekunde verringern konnten. Die Entdeckung, dass sich Licht unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters immer mit der gleichen, konstanten Geschwindigkeit c ausbreitet, macht diese zu einer der bedeutendsten Naturkonstante!

1.2 Theoretische Grundlagen

Heutzutage fast man Licht allgemein als eine elektromagnetische Welle auf, die sich auch ohne vorhandensein eines Mediums im Raum ausbreiten kann. Als solche kann sie mit Hilfe der Wellengleichung beschrieben werden:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Delta \Psi = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} = 0$$

Die Lösung dieser ergibt sich zu:

$$\Psi(\vec{x}, t) = A \cos(\vec{x} \cdot \vec{k} \pm \omega t)$$

mit $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, A der maximalen Amplitude, $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ der Kreisfrequenz, λ der Wellenlänge und \vec{k} dem Wellenvektor in Ausbreitungsrichtung bzw. $|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ der Wellenzahl.

Für Wellen kann man allgemein zwei Geschwindigkeiten unterscheiden:

1. Die Gruppengeschwindigkeit v_g
2. Die Phasengeschwindigkeit v_p

Die Gruppengeschwindigkeit spielt jedoch nur dann eine Rolle, wenn man ein Phänomen als Überlagerung mindestens zweier Wellen mit unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit beschreiben kann. Sie beschreibt dann die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer sogenannten Wellengruppe (siehe Abbildung 1.1) und definiert sich durch:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda}$$

Für Licht verschwindet der letzte Term $\lambda \frac{dv_p}{d\lambda}$ im Vakuum bzw. in dispersionsfreien Medien, da dort die Phasengeschwindigkeit nicht wellenlängenabhängig ist! Dann gilt also $v_g = v_p$.

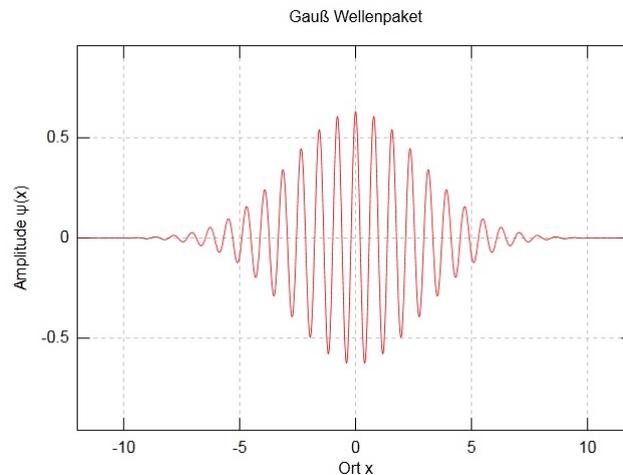


Abbildung 1.1: Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Wellengruppe>

Mit der Phasenvergleichsmethode wird die Phasengeschwindigkeit und mit dem Drehspiegelversuch die Gruppengeschwindigkeit gemessen. Wie bereits erläutert ist dabei im Vakuum und in Luft zwischen den beiden Messungen kein Unterschied zu erwarten.

2 Aufgaben

2.1 Drehspiegelmethode

2.1.1 Versuchsvorbereitung

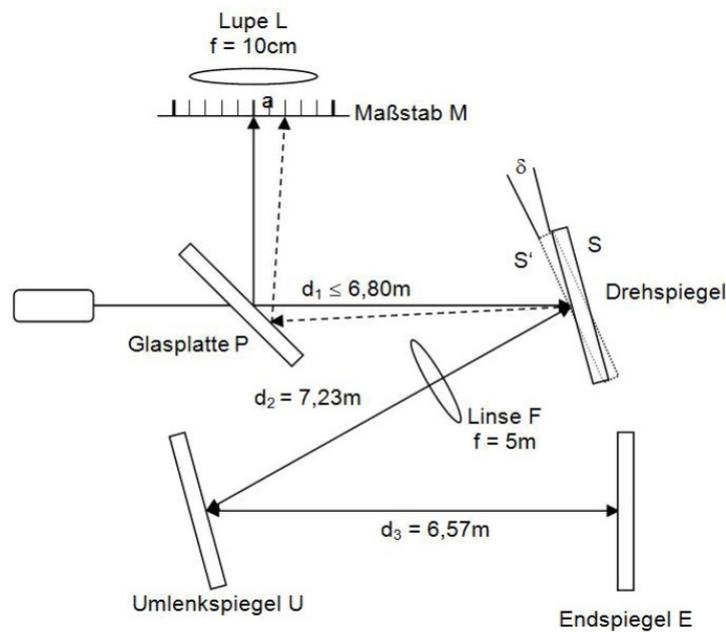


Abbildung 2.1: Versuchsaufbau; Quelle: http://stuempert.de/study_d.html

Der Versuch besteht aus einem Laser, einem halbdurchlässigem Spiegel P (Glasplatte), einem Drehspiegel S, einer Linse F, einem Umlenkspiegel U, einem Endspiegel E und einer Messvorrichtung M (Maßstab), auf der man die Position des Lichtpunkts ablesen kann.

Um den Versuchsaufbau zu verstehen nehmen wir zuerst an der Drehspiegel befände sich in Ruhe. Der Laser sendet Licht in Richtung Drehspiegel, welches reflektiert wird und durch die Linse auf den Umlenkspiegel trifft und von dort aus zum Endspiegel geleitet wird. Dieser wirft das Licht auf die gleiche Weise zurück wie es eingetroffen ist, sodass die Glasplatte den Lichtstrahl (schwarz, durchgezogen) auf den Maßstab umlenkt. Dieser erzeugte Lichtpunkt dient nun als Referenzpunkt, zu dem später die Abweichung ermittelt werden soll.

Befindet sich der Drehspiegel nun in Bewegung vergeht ein gewisses Zeitintervall Δt

bis der Lichtstrahl vom Drehspiegel zum Endspiegel und wieder zurück gelaufen ist. In dieser Zeit hat sich der Drehspiegel ein Stück weiter um den Winkel δ in die Position S' gedreht. Dies verursacht eine verschobene Strahlwanderung (schwarz, gestrichelt), die sich in einer anderen Position des Lichtpunkts auf dem Maßstab äußert. Je höher die Drehgeschwindigkeit des Drehspiegels ist, desto größer wird die Verschiebung a zum Referenzpunkt.

Um zu gewährleisten, dass der Endspiegel das Licht auf dem gleichen Weg zurückschickt, wie es eingetroffen ist müssen die Lichtstrahlen senkrecht auf ihn treffen. Dies wird mit der Linse umgesetzt, deren Zweck es ist die vom Drehspiegel kommenden Lichtstrahlen so umzubündeln, dass sie die Linse als paralleles Strahlenbündel in Richtung Umlenkspiegel verlassen. Man kann dies erreichen indem man den Brennpunkt der Linse auf die Drehachse des Drehspiegels legt, sie also in 5 Meter Entfernung vom Drehspiegel aufbaut. Kommt der Lichtstrahl nun vom Endspiegel zurück so wird er durch die Linse wieder auf die Drehachse des Drehspiegels gebündelt. Eine Folge davon ist, dass sich der Lichtpunkt auf dem Maßstab immer an der gleichen Stelle befindet, unabhängig von der Position des Drehspiegels, vorausgesetzt der Lichtstrahl erreicht überhaupt den Umlenkspiegel!

Da die Linse ein Bild des Laserlichts auf dem Endspiegel und auf dem Maßstab erzeugen soll muss die Position des Lasers mit Hilfe der Linsengleichung berechnet werden:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

mit

$$g = d_1 + f$$

$$b = d_2 + d_3 - f$$

$$d_2 = 7,23 \text{ m}$$

$$d_3 = 6,57 \text{ m}$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{f^2}{d_3 + d_2 - 2f} = 6,58 \text{ m}$$

Damit das Bild auch auf dem Maßstab erzeugt wird ist es nötig, dass der von einem Lichtstrahl zurückgelegte Weg vom Drehspiegel bis zum Maßstab genauso lang ist wie der Weg vom Laser bis zum Drehspiegel!

Hat sich nun der Drehspiegel in dem Zeitintervall Δt um den Winkel δ gedreht, so wird der Lichtstrahl um 2δ abgelenkt. Dieser hat zuvor die Strecke $\Delta s = 2(d_2 + d_3)$ zurückgelegt. Damit berechnet sich die Ablenkung a und die Lichtgeschwindigkeit wie folgt:

$$a = d_1 \tan(2\delta)$$

für kleine Winkel δ gilt: $a \approx 2d_1\delta$

$$\Delta t = \frac{\delta}{\omega} = \frac{\delta}{2\pi f} = \frac{a}{4\pi f d_1} \text{ mit } f \text{ der Frequenz der Umdrehung}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{8\pi f d_1 (d_2 + d_3)}{a}$$

$$\Rightarrow a = \frac{8\pi f d_1 (d_2 + d_3)}{c}$$

Bei einer Drehfrequenz $f = 500 \text{ Hz}$ und $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ist also eine Ablenkung $a = 3,84 \text{ mm}$ zu erwarten. Aufgrund dieser sehr kleinen, maximal zu erwartenden Ablenkung wird eine Lupe verwendet um das Ergebnis abzulesen.

2.1.2 Justierung und Messung

Nachdem alle Parameter wie in der Versuchsvorbereitung beschrieben eingestellt wurden muss noch die Drehfrequenz des Drehspiegels eingestellt werden. Man erreicht dies durch das Anschlagen einer Stimmgabel und dem Vergleich mit dem Motorgeräusch. Treten keine Schwebungen zwischen beiden mehr auf so hat der Motor annähernd dieselbe Drehfrequenz wie die Schwingfrequenz der Stimmgabel. Allein hier liegt schon eine große systematische Fehlerquelle, da das akustische Verhalten eines Motors wohl kaum nur durch seine Drehfrequenz bestimmt sein wird. Außerdem wird das menschliche Gehör verwendet um ein akustisches Objekt zu „stimmen“, was bei ungenügender Schulung zu großen Ungenauigkeiten führen kann.

Anschließend wird die Ablenkung des Lichtstrahls bei einer Frequenz von 440 Hz bestimmt um so Rückschlüsse auf die Lichtgeschwindigkeit machen zu können.

2.2 Phasenvergleichsmethode

2.2.1 Versuchsvorbereitung

Bei diesem Versuch wird im Gegensatz zum Drehspiegelversuch die Phasengeschwindigkeit gemessen. Da die Messung jedoch in Luft stattfindet sollte der Unterschied zum Drehspiegelversuch kaum feststellbar sein.

Um eine Phasenverschiebung von $\frac{1}{10}$ der Periodendauer T festzustellen muss ein bestimmter Weg s durchlaufen werden:

$$\frac{1}{10}T = \frac{s}{c} \iff T = 10\frac{s}{c} \iff f = \frac{c}{10s}$$

mit $s = 1 \text{ m}$ und $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ folgt:

$$f = 29,98 \text{ MHz}$$

Die dafür benötigte Ablenkgeschwindigkeit eines Oszilloskops um diese Phasenverschiebung als 5 mm Verschiebung darzustellen beträgt:

$$v = 10 \cdot f \cdot 5 \text{ mm} = 149,9 \text{ cm}/\mu\text{s}$$

Kein konventionelles Oszilloskop erreicht solche Ablenkgeschwindigkeiten!

Die Lösung liegt in der multiplikativen Mischung des hochfrequenten Signals $a \cdot \cos(\omega t + \Phi)$ mit einem anderen Signal $A \cdot \cos(\Omega t)$:

$$\begin{aligned} a \cdot \cos(\omega t + \Phi) \cdot A \cdot \cos(\Omega t) &= aA \cdot \cos(\omega t + \Phi) \cdot \cos(\Omega t) \\ a \cdot \cos(\omega t + \Phi) \cdot A \cdot \cos(\Omega t) &= \frac{aA}{4} \cdot [\exp(-i(\omega t + \Phi)) + \exp(i(\omega t + \Phi))] \cdot [\exp(-i\Omega t) + \exp(i\Omega t)] \\ a \cdot \cos(\omega t + \Phi) \cdot A \cdot \cos(\Omega t) &= \frac{aA}{4} \cdot [\exp(-i((\omega - \Omega)t + \Phi)) + \exp(i((\omega - \Omega)t + \Phi)) + \\ &\quad \exp(-i((\omega + \Omega)t + \Phi)) + \exp(i((\omega + \Omega)t + \Phi))] \\ a \cdot \cos(\omega t + \Phi) \cdot A \cdot \cos(\Omega t) &= \frac{aA}{2} \cdot [\cos((\omega - \Omega)t + \Phi) + \cos((\omega + \Omega)t + \Phi)] \end{aligned}$$

Das resultierende Signal ist also: $\frac{aA}{2} \cdot [\cos((\omega - \Omega)t + \Phi) + \cos((\omega + \Omega)t + \Phi)]$

Das höher frequente Signal mit $(\omega + \Omega)$ kann mit Hilfe von Tiefpässen herausgefiltert werden, sodass nur noch das Signal $\frac{aA}{2} \cdot \cos((\omega - \Omega)t + \Phi)$ verbleibt, welches auch die Phasenverschiebung mit sich trägt, jetzt jedoch eine niedrigere Frequenz hat, sodass die Phasenverschiebung für herkömmliche Oszilloskope messbar wird, denn es ergibt sich ein Zeitdehnungsfaktor von $\frac{(\omega - \Omega)}{\omega}$ wie man an der Gegenüberstellung der Signale leicht sehen kann:

$$\begin{aligned} a \cdot \cos(\omega t + \Phi) &= \frac{aA}{2} \cdot \cos((\omega - \Omega)t' + \Phi) \\ \Rightarrow t &= \frac{(\omega - \Omega)}{\omega} \cdot t' \end{aligned}$$

Nun gilt aber:

$$c = \frac{s}{t} = \frac{\omega}{(\omega - \Omega)} \cdot \frac{s}{t'}$$

Mit $\omega = 2\pi \cdot 60 \text{ MHz}$ und $\Omega = 2\pi \cdot 59,9 \text{ MHz}$ ergibt sich dann

$$c = 600 \cdot \frac{s}{t'}$$

wobei s bekannt ist und t' am Oszilloskop abgelesen werden kann.

2.2.2 Justierung

Der Versuch wird wie in der Versuchsvorschrift beschrieben vorbereitet. Dabei ist der Zeitdehnungsfaktor noch zu bestimmen. Dies wird realisiert indem mit Hilfe eines Frequenzmessers das Originalsignal ω und das Mischsignal $(\omega - \Omega)$ gemessen werden um $\frac{\omega}{(\omega - \Omega)}$ festzulegen.

Außerdem muss noch eine Eichmessung vorgenommen werden. D.h. die Zeitablenkung des Oszilloskops wird in den Bereichen $0,5 \frac{\mu s}{\text{Rastermaß}}$ und $0,1 \frac{\mu s}{\text{Rastermaß}}$ mit Hilfe eines $\frac{\omega}{10}$ Signals geeicht. Der Grund dafür ist, dass der Zeitbasisgenerator des Oszilloskops eine unbefriedigende Eichgenauigkeit aufweist, das $\frac{\omega}{10}$ Signal jedoch genauer und stabiler ist.

2.2.3 Brechzahlmessung

Ersetzt man einen Teil des Lichtweges durch ein optisch dichteres Medium, wie z.B. Wasser, so lässt sich die Brechzahl n dieses Mediums bestimmen. Diese ist wie folgt definiert:

$$n_{Medium} = \frac{c_{Vakuum}}{c_{Medium}}$$

wobei c_{Vakuum} durch c_{Luft} gut angenähert werden kann.

Sei die Länge des Lichtweges im eingebrachten Medium mit x bezeichnet dann ergibt sich c_{Medium} wie folgt:

$$c_{Medium} = \frac{x}{t - \frac{s-x}{c_{Vakuum}}} = \frac{x}{\frac{(\omega-\Omega)}{\omega} \cdot t' - \frac{s-x}{c_{Vakuum}}} \text{ mit } s \text{ und } t' \text{ wie zuvor}$$
$$\Rightarrow n_{Medium} = \frac{\frac{(\omega-\Omega)}{\omega} \cdot t' \cdot c_{Vakuum} - s + x}{x} = \frac{\frac{(\omega-\Omega)}{\omega} \cdot t' \cdot c_{Vakuum} - s}{x} + 1$$

2.2.4 Lissajous-Figuren

Das Oszilloskop wird in X/Y-Betrieb gebracht, d.h. die beiden Vergleichssignale werden senkrecht zueinander aufgetragen (eins in X-Richtung, das andere in Y-Richtung). Das Oszilloskop zeigt genau dann Geraden, wenn der Phasenabstand ganzzahlige Vielfache von π beträgt. Dies ist für eine Verschiebung von ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\lambda}{2}$ der Fall.

Dabei wird der Gangweg s des Licht variiert um die eben erwähnten Vielfachen zu erreichen. Der Abstand zwischen zwei auftretenden Lissajous-Figuren sei mit Δs bezeichnet. Bei bekannter Frequenz f ergibt sich die Lichtgeschwindigkeit wie folgt:

$$c = \lambda f = 2 \cdot \Delta s \cdot f$$

Um nun auch die Brechzahl mit Hilfe der Lissajous-Figuren zu messen wird in den Gangweg s des Lichts ein Medium der Länge x eingebracht. Zuvor wurde s so gewählt, dass sich gerade eine Gerade auf dem Oszilloskop bildete. Man bestimmt nun die Abweichung Δx bis sich erneut dieselbe Gerade auf dem Oszilloskop einstellt. Die Brechzahl ist dann gegeben durch:

$$n_{Medium} = 1 + \frac{\Delta x}{x}$$

Auswertung: Lichtgeschwindigkeit

Marcel Köpke & Axel Müller
Gruppe 7

25.10.2011

Inhaltsverzeichnis

1	Drehspiegelmethode	2
1.1	Aufbau	2
1.2	Messprotokoll	2
1.3	Auswertung und Fehlerrechnung	2
1.3.1	Systematische Fehler	2
1.3.2	Arithmetischer Mittelwert	5
1.3.3	Statistischer Fehler	5
1.3.4	Messergebnis	6
1.3.5	Interpretation des Messergebnisses	6
2	Phasenvergleichsmethode	8
2.1	Justierung und Eichung	8
2.2	Lichtgeschwindigkeitsmessung	8
2.2.1	Messprotokoll	8
2.2.2	Systematischer Fehler	8
2.2.3	Arithmetisches Mittel	10
2.2.4	Statistischer Fehler	10
2.2.5	Messergebnis	11
2.2.6	Interpretation des Messergebnisses	11
2.3	Brechzahlmessung	11
2.3.1	Messprotokoll	11
2.3.2	Systematischer Fehler	12
2.3.3	Arithmetisches Mittel	13
2.3.4	Statistischer Fehler	13
2.3.5	Messergebnis	13
2.3.6	Interpretation des Messergebnisses	13
2.4	Lissajous-Figuren	14
2.4.1	Lichtgeschwindigkeitsmessung	14
2.4.2	Brechzahlmessung für Plexiglas	14

Kapitel 1

Drehspiegelmethode

1.1 Aufbau

Wir fanden den Versuchsaufbau, wie im Vorprotokoll beschrieben, bereits justiert vor. Das Nachmessen der Abstände ergab:

$$d_1 = 6,58\text{m}$$

$$d_2 = 7,23\text{m}$$

$$d_3 = 6,57\text{m}$$

$$d_{\text{Drehspiegel} \rightarrow \text{Linse}} = 5\text{m}$$

1.2 Messprotokoll

Wir haben 2 Messreihen mit unterschiedlichen Beobachtern durchgeführt. Der jeweils andere Versuchspartner stellte die Frequenz ein. Dabei ergaben sich die unten stehenden Messwerte:

Die Längen Δa wurden bestimmt durch eine Referenzmessung, bei der der Drehspiegel nicht rotierte und eine Messung bei der er sich mit den oben angegebenen Frequenzen drehte.

1.3 Auswertung und Fehlerrechnung

1.3.1 Systematische Fehler

Mögliche Fehlerquellen sind:

1. Skala zum Ablesen der Lichtpunktposition
2. ungenügende Längenmessung der Strecken d_1, d_2, d_3
3. Frequenzbestimmung des Drehspiegels

f in [Hz]	a in [mm]	$c = \frac{8\pi f d_1 (d_2 + d_3)}{a}$ in [km/s]
119	1,0	271576,2587
153	1,3	268591,9042
193,33	1,6	275755,4522
223,33	1,8	283151,8481
255	2,0	290974,5629
290	2,25	294144,2205
323	2,5	294854,2237
353,33	2,7	298649,3604
386	2,9	303762,4916
421,166	3,2	300364,1979
433,33	3,3	299674,4084

Tabelle 1.1: Messreihe 1

f in [Hz]	a in [mm]	$c = \frac{8\pi f d_1 (d_2 + d_3)}{a}$ in [km/s]
100	0,8	285269,1793
133,33	1,1	276617,7431
166,66	1,4	271674,0653
201,33	1,7	270274,0888
234,166	1,9	281264,6006
267,5	2,2	277489,1108
300,833	2,4	286061,2767
333,33	2,7	281744,5201
367,166	2,9	288941,0855
400	3,2	285269,1793
433,833	3,3	300022,2639

Tabelle 1.2: Messreihe 2

Die Skala hatte eine Skalengröße von 1mm, sodass sich der Skalenfehler zu $\pm 0,5$ mm bestimmen lässt.

Für die Längenmessung der Spiegelabstände etc. muss eine Unsicherheit geschätzt werden, da zum Beispiel das Maßband bei der Messung durchhing und dieser Fehler nicht genau bestimmt werden kann. Der Skalenabstand des Maßbands betrug 1cm, was einer Ungenauigkeit von $\pm 0,5$ cm entspricht. Insgesamt gehen wir von einem Fehler von ± 2 cm aus. #

Der Frequenzmesser war mit einer Ungenauigkeit von $\leq 0,1\%$ angegeben, wobei dieser nie einen festen Wert registrierte, sondern Schwankungen von $\pm 100^U_{\min} = \pm 1,67$ Hz aufwies. Dabei fällt der Schwankungsfehler deutlich stärker ins Gewicht, als die Ungenauigkeit des Geräts.

Da die gemessenen Größen voneinander abhängen, wenden wir hier die Größtfehlerabschätzung an. Für die Lichtgeschwindigkeit gilt:

$$c = \frac{8\pi f d_1 (d_2 + d_3)}{a}$$

Damit ergibt sich die Größtfehlerabschätzung zu:

$$\begin{aligned} \Delta c &= \left\| \frac{\partial c}{\partial f} \right\| \Delta f + \left\| \frac{\partial c}{\partial d_1} \right\| \Delta d_1 + \left\| \frac{\partial c}{\partial d_2} \right\| \Delta d_2 + \left\| \frac{\partial c}{\partial d_3} \right\| \Delta d_3 + \left\| \frac{\partial c}{\partial a} \right\| \Delta a \\ \Delta c &= 8\pi d_1 \frac{(d_2 + d_3)}{a} \Delta f + 8\pi f \frac{(d_2 + d_3)}{a} \Delta d_1 + 8\pi f \frac{d_1}{a} \Delta d_2 + 8\pi f \frac{d_1}{a} \Delta d_3 + 8\pi f d_1 \frac{(d_2 + d_3)}{a^2} \Delta a \end{aligned}$$

f	a	d ₁	d ₂	d ₃	Fehler (Dimension: 10 ⁷ m/s)
119	1,0	6,58	7,23	6,57	14,12
153	1,3	6,58	7,23	6,57	10,78
193,33	1,6	6,58	7,23	6,57	9,02
223,33	1,8	6,58	7,23	6,57	8,25
255	2,0	6,58	7,23	6,57	7,64
290	2,25	6,58	7,23	6,57	6,88
323	2,5	6,58	7,23	6,57	6,22
353,33	2,7	6,58	7,23	6,57	5,84
386	2,9	6,58	7,23	6,57	5,55
421,166	3,2	6,58	7,23	6,57	4,99
433,33	3,3	6,58	7,23	6,57	4,83
100	0,8	6,58	7,23	6,57	18,8
133,33	1,1	6,58	7,23	6,57	13,08
166,66	1,4	6,58	7,23	6,57	10,14
201,33	1,7	6,58	7,23	6,57	8,33
234,166	1,9	6,58	7,23	6,57	7,77
267,5	2,2	6,58	7,23	6,57	6,64
300,833	2,4	6,58	7,23	6,57	6,29
333,33	2,7	6,58	7,23	6,57	5,53
367,166	2,9	6,58	7,23	6,57	5,28
400	3,2	6,58	7,23	6,57	4,75
433,833	3,3	6,58	7,23	6,57	4,84

Tabelle 1.3: Fehlertabelle

Der Mittelwert des systematischen Fehlers ergibt sich damit zu

$$\overline{\Delta c_{sys}} = 0,7966457597 \cdot 10^8 \text{m/s}$$

1.3.2 Arithmetischer Mittelwert

Der arithmetischer Mittelwert unserer Messung berechnet sich wie folgt:

$$\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i \text{ mit } n = \text{Anzahl der Messungen}$$

$$\bar{c} = 2,857330019 \cdot 10^8 \text{m/s}$$

1.3.3 Statistischer Fehler

c_i	$c_i - \bar{c}$	$(c_i - \bar{c})^2$
271576,2587	-14156,7432	200413378,2881
268591,9042	-17141,0977	293817230,6726
275755,4522	-9977,5497	99551498,1974
283151,8481	-2581,1538	6662354,9862
290974,5629	5241,5610	27473961,6214
294144,2205	8411,2186	70748598,1841
294854,2237	9121,2218	83196686,9590
298649,3604	12916,3585	166832316,6657
303762,4916	18029,4897	325062498,5146
300364,1979	14631,1960	214071896,1244
299674,4084	13941,4065	194362814,9448
285269,1793	-463,8226	215131,4127
276617,7431	-9115,2588	83087943,1567
271674,0653	-14058,9366	197653698,5784
270274,0888	-15458,9131	238977994,5144
281264,6006	-4468,4013	19966610,2591
277489,1108	-8243,8911	67961740,6185
286061,2767	328,2748	107764,3383
281744,5201	-3988,4818	15907987,1414
288941,0855	3208,0836	10291800,3263
285269,1793	-463,8226	215131,4127
300022,2639	14289,2620	204183008,2448

Tabelle 1.4: Statistische Fehler

Die Standardabweichung berechnet sich wie folgt:

$$s_c = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (c_i - \bar{c})^2} = 10956107,33 \text{m/s}$$

Der statistische Fehler für den arithmetischen Mittelwert berechnet sich mithilfe der Standardabweichung folgendermaßen:

$$s_{\bar{c}} = \frac{s_c}{\sqrt{n}} = 2335,849932\text{m/s} = 0,02 \cdot 10^8\text{m/s}$$

1.3.4 Messergebnis

Mithilfe der oben berechneten Werte, kann man das Messergebnis nun wie folgt angeben:

$$\begin{aligned}c &= \bar{c} \pm \overline{\Delta c_{sys}} \pm s_{\bar{c}} \\c &= (2,86 \pm 0,80 \pm 0,02) \cdot 10^8\text{m/s} \\c &= (2,86 \pm 0,82) \cdot 10^8\text{m/s}\end{aligned}$$

1.3.5 Interpretation des Messergebnisses

Der Literaturwert beträgt $c_0 = 2,998 \cdot 10^8\text{m/s}$. Damit liegt dieser innerhalb unserer Fehlergrenzen. Da wir unseren Fehlerbereich auch nur mit dem Skalierungsfaktor 1 versehen haben, liegt der „tatsächliche Wert“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% darin.

Die systematischen Fehler wurden bereits oben diskutiert. Der statistische Fehler war bei unserer Messung sehr klein, was ein Indiz dafür ist, dass dieser Versuch nicht sehr anfällig für zufällige äußere Störungen, wie zum Beispiel Schwingungen der Spiegel etc., ist. Dies kann man sehr anschaulich an dem Verhältnis $\frac{f}{a}$ in der Abbildung 1.1 erkennen. Hier ergab sich wie erwartet nur eine kleine Abweichung der Messwerte zur Ausgleichsgerade.

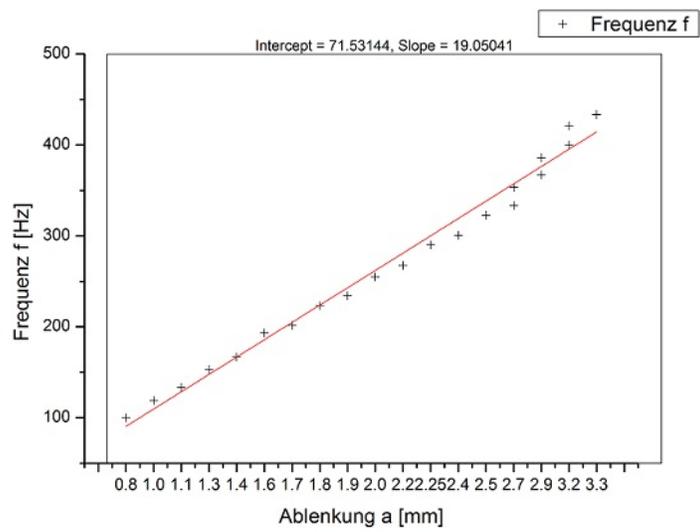


Abbildung 1.1: Messergebnisse

Kapitel 2

Phasenvergleichsmethode

2.1 Justierung und Eichung

Wie im Vorprotokoll erwähnt, musste vor den Messungen eine Eichung mit dem $\frac{\omega}{10}$ Signal durchgeführt werden. Jedoch zeigte sich aufgrund eines neueren Oszilloskops, dass der Zeitgeber im Oszilloskop genügend genau war, sodass keine weitere Verbesserung durch die Eichung erzielt werden konnte.

Anschließend maßen wir das ω Signal mit

$$\omega = 59998,815\text{kHz}$$

und das $(\omega - \Omega)$ Signal mit

$$(\omega - \Omega) = 100,48\text{kHz}$$

Der Zeitskallierungsfaktor ergibt damit:

$$k = \frac{\omega}{(\omega - \Omega)} = 597,121$$

2.2 Lichtgeschwindigkeitsmessung

2.2.1 Messprotokoll

Die Leuchtdiode wurde 25 cm vom Empfänger aufgestellt, und die Phasenverschiebung auf Null eingestellt. Dies war somit der Referenzpunkt für unsere Messung mit der Strecke s . Die Zeit t' wurde an der Skala des Oszilloskops abgelesen.

2.2.2 Systematischer Fehler

Mögliche Fehlerquellen sind:

1. Skala am Oszilloskop

s in [cm]	t' in [μs]	$c = k \frac{s}{t'}$ in km/s
44,9	1,0	268107,7621
75,8	1,5	301745,6328
100,7	2	300650,9092
152,7	3	303935,08
175	3,4	307342,1876
124,4	2,4	309508,2183
145,3	2,8	309863,648
62,2	1,2	309508,2183
83,5	1,6	311623,0253
135,5	2,6	311192,4085
47,6	1,0	284230,0551

Tabelle 2.1: Lichtgeschwindigkeitsmessung

2. Skala an der Zeiß-Schiene

3. Bestimmung von k

Die Skalierung am Oszilloskop beträgt $0,2\mu s$, der Ablesefehler also $\Delta t' = 0,1\mu s$

Die Skala der Zeiß-Schiene liegt bei 1mm, der Fehler also bei $\Delta s = 0,5mm$

Der Fehler für k liegt bei der Ungenauigkeit des Frequenzmessers und dem Signalgeber. Dieser Fehler muss zunächst getrennt ermittelt werden.

Die Fehler liegen bei:

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \pm 500Hz \\ \Delta(\omega - \Omega) &= \pm 0,5Hz\end{aligned}$$

Zunächst berechnen wir die Größtfehlerabschätzung für k:

$$\begin{aligned}\Delta k &= \left\| \frac{\partial k}{\partial \omega} \right\| \Delta\omega + \left\| \frac{\partial k}{\partial(\omega - \Omega)} \right\| \Delta(\omega - \Omega) \\ &= \frac{\Omega}{(\omega - \Omega)^2} \Delta\omega + \frac{1}{(\omega - \Omega)^2} \Delta(\omega - \Omega) \\ &= \pm 2,96637124\end{aligned}$$

Für k gilt somit:

$$k = 597,1 \pm 3,0$$

Die Größtfehlerabschätzung für c lautet wie folgt:

$$\Delta c = \left\| \frac{\partial c}{\partial k} \right\| \Delta k + \left\| \frac{\partial c}{\partial t'} \right\| \Delta t' + \left\| \frac{\partial c}{\partial s} \right\| \Delta s$$

$$\overline{\Delta c_{sys}} = 0,1901359023 \cdot 10^8 m/s$$

s in [cm]	t' in [μ s]	Δc (Dimension: 10^7 m/s)
44,9	1,0	2,8441
75,8	1,5	2,1814
100,7	2	1,6675
152,7	3	1,1741
175	3,4	1,0654
124,4	2,4	1,4558
145,3	2,8	1,2713
62,2	1,2	2,7579
83,5	1,6	2,1211
135,5	2,6	1,363
47,6	1,0	3,0134

Tabelle 2.2: Lichtgeschwindigkeitsmessungsfehler (systematisch)

2.2.3 Arithmetisches Mittel

Der arithmetischer Mittelwert unserer Messung berechnet sich wie folgt:

$$\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i \text{ mit } n = \text{Anzahl der Messungen}$$

$$\bar{c} = 3,016097405 \cdot 10^8 \text{m/s}$$

2.2.4 Statistischer Fehler

c_i	$c_i - \bar{c}$	$(c_i - \bar{c})^2$
268107,7621	-33501,9784	1122382554,89
301745,6328	135,8923	18466,72
300650,9092	-958,8313	919357,41
303935,0800	2325,3395	5407203,92
307342,1876	5732,4471	32860950,07
309508,2183	7898,4778	62385951,99
309863,6480	8253,9075	68126989,47
309508,2183	7898,4778	62385951,99
311623,0253	10013,2848	100265873,03
311192,4085	9582,6680	91827526,52
284230,0551	-17379,6854	302053463,65

Tabelle 2.3: Statistischer Fehler

$$s_c = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (c_i - \bar{c})^2} = 13596449,13 \text{m/s}$$

$$s_{\bar{c}} = \frac{s_c}{\sqrt{n}} = 4099483,659 \text{m/s} = 0,04 \cdot 10^8 \text{m/s}$$

Im Vergleich zum Drehspiegelversuch erhalten wir hier einen größeren statistischen Fehler, da wir weniger Messungen vorgenommen haben, sodass sich Schwankungen stärker auswirken.

2.2.5 Messergebnis

Mithilfe der oben berechneten Werte, kann man das Messergebnis nun wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} c &= \bar{c} \pm \overline{\Delta c_{sys}} \pm s_{\bar{c}} \\ c &= (3,02 \pm 0,19 \pm 0,04) \cdot 10^8 \text{m/s} \\ c &= (3,02 \pm 0,23) \cdot 10^8 \text{m/s} \end{aligned}$$

2.2.6 Interpretation des Messergebnisses

Der Literaturwert liegt bei $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{m/s}$. Damit liegt dieser erneut in den Fehlergrenzen unseres Versuchs!

Statistische Fehler ergeben sich zum Beispiel durch Schwingungen der Apparatur, die sich tatsächlich stark auswirken können, da wir hier in Wirklichkeit sehr kleine Phasen- und damit Längenunterschiede gemessen haben.

2.3 Brechzahlmessung

2.3.1 Messprotokoll

x in m	t' in μs	s in m	$n = \frac{k^{-1} \cdot t' \cdot c_{\text{Vakuum}} - s}{x} + 1$
1	3,64	1,5	1,327552937
1	4,19	1,75	1,353694177
1	4,68	2,00	1,349710919
1	3,24	1,30	1,326722944

Tabelle 2.4: Brechzahlmessung: Wasser

x in m	t' in μs	s in m	$n = \frac{k^{-1} \cdot t' \cdot c_{Vakuum} - s}{x} + 1$
0,08	2,12	1	1,80498704
0,08	2,49	1,2	1,627083835
0,08	1,15	0,5	1,967327876
0,08	1,1	0,5	1,653531011
0,3	2,32	1	1,549379866
0,3	2,74	1,2	1,585618175
0,3	1,56	0,6	1,61078991

Tabelle 2.5: Brechzahlmessung: Plexiglas

2.3.2 Systematischer Fehler

Für k^{-1} :

$$\begin{aligned}
 \Delta k^{-1} &= \left\| \frac{\partial k^{-1}}{\partial \omega} \right\| \Delta \omega + \left\| \frac{\partial k^{-1}}{\partial (\omega - \Omega)} \right\| \Delta (\omega - \Omega) \\
 &= \frac{\Omega}{\omega^2} \Delta \omega + \frac{1}{\omega} \Delta (\omega - \Omega) \\
 &= \pm 8,327 \cdot 10^{-6}
 \end{aligned}$$

Für n:

$$\begin{aligned}
 \Delta n &= \left\| \frac{\partial n}{\partial k^{-1}} \right\| \Delta k^{-1} + \left\| \frac{\partial n}{\partial t'} \right\| \Delta t' + \left\| \frac{\partial n}{\partial s} \right\| \Delta s + \left\| \frac{\partial n}{\partial x} \right\| \Delta x \\
 &= \frac{t' c_{Vakuum}}{x} \Delta k^{-1} + \frac{k^{-1} c_{Vakuum}}{x} \Delta t' + \frac{1}{x} \Delta s + \frac{k^{-1} t' c_{Vakuum} - s}{x^2} \Delta x
 \end{aligned}$$

mit $\Delta t' = 0,1 \mu s$, $\Delta s = 0,5 mm$ und $\Delta x = 0,5 mm$, wobei die Längen x vorgegeben waren, sodass wir den Fehler hier nur schätzen konnten. Dabei erschien es sinnvoll, denselben Fehler anzunehmen wie für s.

x in m	t' in μs	s in m	Δn
1	3,64	1,5	0,05996
1	4,19	1,75	0,06134
1	4,68	2,00	0,06257
1	3,24	1,30	0,05896

Tabelle 2.6: Sys. Fehler: Wasser

$$\overline{\Delta n_{sys,Wasser}} = 0,0607075$$

$$\overline{\Delta n_{sys,Plex.}} = 0,4762271429$$

Wie man sieht, scheinen die Fehler für die 8cm Stücke des Plexiglas unverhältnismäßig groß. Das könnte an dem vielleicht tatsächlich zu hoch angesetzten Fehler für x liegen.

x in m	t' in μs	s in m	Δn
0,08	2,12	1	0,70503
0,08	2,49	1,2	0,71546
0,08	1,15	0,5	0,67578
0,08	1,1	0,5	0,67225
0,3	2,32	1	0,18925
0,3	2,74	1,2	0,1928
0,3	1,56	0,6	0,18302

Tabelle 2.7: Sys. Fehler: Plexiglas

2.3.3 Arithmetisches Mittel

$$\begin{aligned}\bar{n}_{Wasser} &= 1,3394175 \\ \bar{n}_{Plex.} &= 1,685531429\end{aligned}$$

2.3.4 Statistischer Fehler

$$\begin{aligned}s_{n,Wasser} &= 0,014279401 \\ s_{\bar{n},Wasser} &= 0,0071397005\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_{n,Plex.} &= 0,1484515815 \\ s_{\bar{n},Plex.} &= 0,0561094238\end{aligned}$$

2.3.5 Messergebnis

$$\begin{aligned}n_{Wasser} &= 1,339 \pm 0,061 \pm 0,007 = 1,339 \pm 0,068 \\ n_{Plex.} &= 1,69 \pm 0,48 \pm 0,06 = 1,69 \pm 0,54\end{aligned}$$

2.3.6 Interpretation des Messergebnisses

Die Literaturwerte sind:

$$\begin{aligned}n_{Wasser} &= 1,33 \\ n_{Plex.} &= 1,49\end{aligned}$$

Bei beiden Messwerten liegt der Literaturwert deutlich innerhalb der Fehlergrenzen. Daran sieht man, dass diese Messmethode sehr gut zur Bestimmung der Brechzahl geeignet ist.

2.4 Lissajous-Figuren

2.4.1 Lichtgeschwindigkeitsmessung

Da die Zeiß-Schiene eine ungenügende Länge besaß, konnte nur eine Messung bis $\frac{\lambda}{4}$ durchgeführt werden! Dies entspricht einer Verschiebung von $t' = 2,5\mu s$. Es wurde eine Verschiebung um 1,236m benötigt um dies zu erreichen. Damit ergibt sich für c:

$$c = k \frac{s}{t'} = 2,95217 \cdot 10^8 \text{m/s}$$

2.4.2 Brechzahlmessung für Plexiglas

x	Δx	$n = 1 + \frac{\Delta x}{x}$
8cm	3,2cm	1,4
30cm	15,8cm	1,53
8cm	4,8cm	1,6

Tabelle 2.8: Brechzahl: Plexiglas

Arithmetischer Mittelwert:

$$\bar{n}_{Plex.} = 1,51$$

Für die geringe Anzahl an Messungen, macht es zwar hier keinen Sinn einen Fehler anzugeben, jedoch kann man evtl erahnen, dass auch diese Methode entsprechend gute Ergebnisse liefert. Auch der systematische Fehler für die Ableseung am Oszilloskop könnte nur schwer abgeschätzt werden, da für die Lissajous-Figuren keine Skala zur Messung verwendet wurde.