Versuch P1-42
Lichtgeschwindigkeitsmessung
Vorbereitung

Yannick Augenstein

26. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

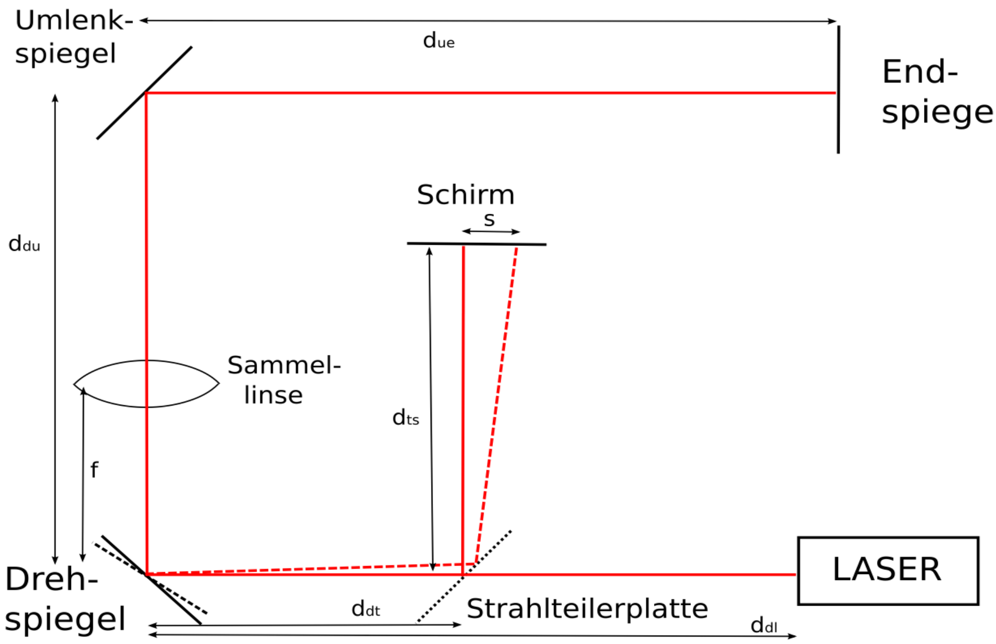
Vorbemerkung

In dieser Versuchsreihe soll die Lichtgeschwindigkeit auf zwei unterschiedliche Arten gemessen werden.
Bei allen Versuchen wird davon ausgegangen dass die Lichtgeschwindigkeit in Luft gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum entspricht. Es wird ebenso von der Dispersionsfreiheit der Luft ausgegangen.

1 Drehspiegelmethode

1.1 Versuchsaufbau

Bei diesem Versuch wird die Lichtgeschwindigkeit gemessen, indem sich ein Drehspiegel um einen bestimmten Winkel weiterdreht, bevor das Licht ihn wieder erreicht. Der Versuchsaufbau sieht folgendermaßen aus:



Eine Lichtquelle wird hinter einem Projektionsschirm mit einer Öffnung so angeordnet, dass deren Licht zunächst auf einen Strahlteiler trifft. Ein Teil des Lichtstrahls wird auf einen Schirm geworfen, der andere Teil des Lichts trifft auf einen Drehspiegel, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Von diesem aus trifft das Licht auf eine Linse, die so eingebaut ist, dass der Drehspiegel in ihrem Brennpunkt liegt. Deshalb verläuft der vom Drehspiegel reflektierte Lichtstrahl stets parallel zur Mittelachse wenn er auf die Linse trifft. Der Strahl läuft dann über einen Umlenkspiegel zum Endspiegel, wird dort reflektiert und läuft denselben Weg zurück. Da alle Strahlen senkrecht zur Linsenachse einfallen, werden alle im Brennpunkt fokusiert. Der Spiegel hat sich allerdings in der Zeit

Δt vom ersten Auftreffen auf dem Hin- bis zum zweiten Auftreffen auf dem Rückweg um den Winkel α weitergedreht. Durch diese Drehung fällt der Endstrahl auf eine andere Stelle am Schirm als der Ausgangsstrahl. Aus dieser Auslenkung s, die nur von der Drehfrequenz ω des Spiegels (und nicht von seinem momentanen Winkel!) abhängt, kann man die Lichtgeschwindigkeit folgendermaßen bestimmen:
Gegebene Werte:

- $d_{ue} = 6,57m$
- $d_{du} = 7,23m$
- Brennweite der Linse $f = 5m$
- $f_{max} = 500Hz$
- Der Abstand des Lasers vom Drehspiegel ist Variabel mit $d_{max} = 6,80m$

Die Linse muss im Abstand f vom Drehspiegel entfernt sein, damit ein Lichtpunkt statt einem Strich auf dem Projektionsschirm zu sehen ist. Eine weitere Linse (als Lupe) sollte so weit wie möglich entfernt vom Schirm und etwa $10cm$ entfernt vom Auge des Betrachters sein.
Der Abstand des Lasers vom Drehspiegel ergibt sich, wenn man den Abstand bis zur Linse $g = d_{dl} + f$ als Gegenstandsweite und den Abstand der Linse zum Endspiegel $b = d_{du} - f + d_{ue}$ als Bildweite für die Linsengleichung benutzt. Zu beachten ist, dass wir auf dem Endspiegel ein scharfes Bild (Lichtpunkt) sehen wollen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

$$b = Bildweite = d_{ue} + d_{du} - f \qquad g = Gegenstandsweite = d_{dl} + f$$

Nun setzt man die Werte ein und formt nach d_{dl} um:

$$d_{dl} = \frac{f^2}{d_{ue} + d_{du} - 2f} \approx 6,579m$$

Die Laufstrecke vom Drehspiegel bis zum Projektionsschirm muss denselben Wert haben, da wir auch auf dem Schirm einen Lichtpunkt sehen wollen.

Der Abstand s der beiden Lichtpunkte auf dem Schirm muss zwischen dem Lichtpunkt bei stehendem Drehspiegel und dem bei (mit bekannter Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$) rotierendem Spiegel gemessen werden. Δt soll dabei wie erwähnt die Zeit sein, die der Lichtstrahl für den Hin- und Rückweg zwischen Dreh- und Endspiegel braucht. Der Drehspiegel hat sich in dieser Zeit um den Winkel α weitergedreht:

$$\Delta t = 2 \cdot \frac{d_{ue} + d_{du}}{c} \qquad \alpha = 2\pi f \cdot t$$

Das ergibt eine Ablenkung um 2α im Vergleich zum ruhenden Drehspiegel. Der Abstand s ergibt sich aus einem gedachten rechtwinkligen Dreieck zwischen Drehspiegel und Schirm:

$$\tan(2\alpha) = \frac{s}{d_{ts} + d_{dt}} \quad \xrightarrow{\tan\alpha \approx \alpha} \quad c \approx 8\pi f d_{dl} \cdot \frac{d_{ue} + d_{du}}{s}$$

Einsetzen aller Werte ($c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$) ergibt bei $f_{max} = 500Hz$ für s den Wert

$$s = 3,80mm$$

Man sieht jedoch nur einen ruhenden Punkt auf dem Projektionsschirm, da das menschliche Auge nicht in der Lage, das Flimmern bei solch hoher Frequenz wahrzunehmen.

1.2 Justierung des Versuchsaufbaus

Nun muss die Apparatur justiert werden. Die oben berechneten Abstände sind gemäß der Reihenfolge des Aufgabenblattes einzustellen. Die Lupe sollte wie erwähnt möglichst nah am Auge des Betrachters und möglichst weit weg vom Projektionsschirm sein. Hierbei gilt es auszuprobieren, denn beim Ablesen können verschiedene Faktoren eine Rolle spielen (z.B. reflektiertes Tageslicht).
Folgendes ist bei der Justierung zu beachten:

- Der Laserstrahl muss die Mitte des Drehspiegels treffen.
- Der Drehspiegel muss so eingestellt werden, dass der Laserstrahl auf die Mitte des Umlenkspiegels fällt.
- Der Drehspiegel muss im Brennpunkt der Linse liegen.
- Der Umlenkspiegel muss so justiert werden, dass der Laserstrahl die Mitte des Endspiegels trifft.
- Der Endspiegel muss so eingestellt werden, dass der Laserstrahl auf demselben Weg zurückreflektiert wird.

1.3 Messung

Die Strecke s vom Ausgangs- bis zum Endpunkt des Laserstrahls muss (in Abhängigkeit von der Motorfrequenz f) vermessen werden. Die Rotationsfrequenz des Drehspiegels soll (bei $440Hz$) mit einer Stimmgabel überprüft werden. Bei (nahezu) Übereinstimmung werden hier Schwebungen auftreten.

2 Phasenvergleichsmethode

Bei der Phasenvergleichsmethode wird die Phasenverschiebung, die durch einen Laufzeitunterschied auf einer bekannten Strecke entsteht, gemessen und zur Berechnung der Lichtgeschwindigkeit genutzt.

2.1 Versuchsaufbau

Die Lichtquelle in diesem Versuch ist eine Leuchtdiode, an der eine periodische Spannung mit der Frequenz f anliegt und die im Abstand d zu einer Photodiode steht. Die beiden Signale von Sender und Empfänger sollen mittels Oszilloskop miteinander verglichen und die auftretende Phasenverschiebung gemessen werden.
Die Spannung der Photodiode sollte bis auf eine zeitliche Phasenverschiebung Δt identisch mit der Spannung der Leuchtdiode sein. Für $d = 1m$ ergibt sich eine Zeit ΔT, welche etwa ein Zehntel der Periodendauer betragen soll.

$$T = 10 \cdot \Delta T = 10 \cdot \frac{1m}{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} = 3,33 \cdot 10^{-8} s \rightarrow f = 30MHz$$

Das Licht muss also mit $30MHz$ moduliert werden. Wenn das Oszilloskop die Abweichung von $3,33ns$ einigermaßen genau messbar auflösen soll (etwa $5mm$), müsste es in x-Richtung ca. $\frac{5mm}{3{,}33ns} = 150\frac{cm}{\mu s}$ anzeigen können. Herkömmliche Oszilloskope (also wahrscheinlich auch die im Praktikumsversuch) sind jedoch mit einem Limit bei etwa $10\frac{cm}{\mu s}$ viel zu langsam. Abhilfe schafft hier ein elektronischer Frequenzmischer[1], der durch ein Hilfssignal ähnlicher Frequenz $A \cdot \cos(\Omega t)$ eine Schwebung erzeugt, die sich auch als Addition einer hoch- und einer niederfrequenten Schwingung darstellen lässt.

$$a \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot A \cdot \cos(\Omega t) = \frac{a \cdot A}{2} \cdot [\cos((\omega - \Omega)t + \varphi) + \cos((\omega + \Omega)t + \varphi)]$$

Der hochfrequente Anteil dieser Schwingung wird durch einen Tiefpassfilter[2] unterdrückt, sodass das Oszilloskop nur zwei niederfrequente Schwingungen registriert. Dadurch ist die Zeit $\Delta t'$ länger als die ohne Hilfssignal.

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\omega}{\omega - \Omega} = 600 \quad bei \quad \omega = 2\pi \cdot 60MHz \quad , \quad \Omega = 2\pi \cdot 59,9MHz$$

Die neue Phasenverschiebung lässt sich also problemlos mit dem Oszilloskop darstellen.

[1] Zur Mischung (additiv, multiplikativ) von elektrischen Signalen, besteht aus Bauelementen wie Dioden oder Transistoren.

[2] Lässt Signalanteile mit Frequenzen unterhalb einer Grenzfrequenz annähernd ungeschwächt passieren, Anteile mit höheren Frequenzen werden (stark) abgeschwächt.

2.2 Justierung und Eichung

Die Apparatur muss bei diesem Versuch sehr gut justiert und geeicht werden, da Ungenauigkeiten hier zu großen Messfehlern führen können. Das Strahlenbündel soll möglichst parallel zur Zeiß-Schiene ausgerichtet werden. Dazu verwendet man die Justierschraube am Leuchtdiodengehäuse, mit der die Leuchtdiode zentriert werden kann. Das Ziel dieser Justierung ist, die Photodiode möglichst gut auszuleuchten, um auch bei großen Abständen von Leucht- und Photodiode gut messen zu können. Mit einem Frequenzzähler wird die Frequenz ω bestimmt (messbar ist $\frac{\omega}{10}$). Die Frequenzdifferenz $\Omega - \omega$ muss ebenfalls gemessen werden.
Im Anschluss kann mit diesen Werten die Zeitablenkung des Oszilloskops in den Bereichen $0,5\frac{\mu s}{DIV}$ und $1\frac{\mu s}{DIV}$ geeicht werden.

2.3 Messung von Lichtgeschwindigkeit und Brechungsindex

2.3.1 Lichtgeschwindigkeit in Luft

Als erstes messen wir die Lichtgeschwindigkeit in Luft. Dazu wird (wie oben beschrieben) die zeitliche Verschiebung zwischen Sender- und Empfängersignal bei verschiedenen Abständen gemessen. Berücksichtigt werden muss bei der Berechnung der Lichtgeschwindigkeit die Zeitdehnung $\frac{\omega}{\omega-\Omega}$, die durch die Frequenzmischung entsteht.

2.3.2 Brechzahl von Wasser

Für die Brechzahl gilt:

$$n = \frac{c_{Vakuum}}{c_{Medium}}$$

Also ist (näherungweise)

$$n_{Wasser} \approx \frac{c_{Luft}}{c_{Wasser}}$$

Im versuch ersetzen wir $s = 1m$ der Strecke d mit Wasser. Damit ergibt sich eine Laufzeit von:

$$\Delta t' = \frac{-1m}{c_{Luft}} + \frac{1m}{c_{Wasser}}$$

Für die Brechzahl von Wasser ergibt sich somit:

$$n_{Wasser} = \frac{\Delta t' \cdot c_{Luft} - 1m}{1m}$$

2.3.3 Brechzahl von Plexiglas

Analog zum letzten Versuch soll die Brechzahl von Plexiglas bestimmt werden.

2.3.4 Lissajous-Figuren und Brechzahlbestimmung

Brechzahlen können mittels Lissajous-Figuren bestimmt werden. Um dies zu tun, ersetzt man eine bestimmte Länge x des Laufweges mit einem Medium, wenn auf dem Oszilloskop nur noch eine Gerade zu erkennen ist, die Phasenverschiebung also gerade $n \cdot \pi$ beträgt. Durch das eingefügte Medium verändert sich die Phasenverschiebung natürlich, sodass man nur noch die Differenz zu der Stellung, an der wieder eine Gerade entsteht, messen muss. Für die Brechzahl gilt dann:

$$n = 1 + \frac{\Delta d}{x}$$

Versuch P1-42
Lichtgeschwindigkeit
Auswertung mit Fehlerrechnung

Gruppe Mo-19
Yannick Augenstein
Patrick Kuntze

Versuchsdurchführung: 31. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Alle Messwerte sowie Rechnungen befinden sich im Anhang. Die Werte wurden am Computer in entsprechende Listen getippt, anhand derer die Regression und Fehlerrechnung im Programm *Wolfram Mathematica*®[1] durchgeführt wurde.

1 Drehspiegelmethode

Der Versuch war bereits wie in der Vorbereitung beschrieben aufgebaut. Auch justiert war der Aufbau bereits von der Gruppe vor uns, sodass wir ihn lediglich überprüfen mussten, wobei die Abstände den Werten aus dem Aufgabenblatt zum Versuch entsprachen. Da wir einige der Werte nicht genau überprüfen konnten, nehmen wir hier einen systematischen Fehler von $\pm 1cm$ an.

Die Abstände waren also wie auf dem Aufgabenblatt vorgegeben:

- Entfernung Umlenkspiegel-Endspiegel $d_{ue} = 6,57m$
- Entfernung Drehspiegel-Umlenkspiegel $d_{du} = 7,23m$
- Brennweite der Linse $f = 5m$
- Entfernung Laser-Drehspiegel $d_{ld} = 6,58m$

1.1 Messung

1.1.1 Zur Messmethode

Die Messung gingen wir etwas anders an, als auf dem Aufgabenblatt beschrieben. Und zwar maßen wir nicht die Auslenkung des Lichtpunktes am Projektionsschirm in Abhängigkeit der Frequenz, sondern wir maßen die Frequenz in Abhängigkeit von der Auslenkung des Lichtpunktes. Dies begründen wir folgendermaßen: Auf Grund der relativ geringen Abstände im Versuchsaufbau wandert der Lichtpunkt nur entlang einer sehr kurzen Strecke. Bruchteile dieser Strecke sind jedoch auf einer Millimeterskala (trotz Lupe), gerade bei einem relativ breiten ($d \approx 1mm$) Lichtpunkt, sehr schwierig und äußerst ungenau abzulesen. Wann sich der Lichtpunkt genau auf einer Linie oder genau zwischen zwei befindet, kann man viel besser erkennen. Dieses Problem hat man am elektronischen Frequenzzähler nicht, denn dieser gibt die momentane Frequenz recht genau und vor allem sehr gut lesbar an. Deshalb haben wir uns dazu entschieden, die Frequenz an Stellen gut ablesbarer Auslenkungen des Lichtpunktes zu messen. Wir meinen, auf diese Art und Weise zuverlässigere Messwerte zu erhalten.

[1] http://www.wolfram.com/mathematica/

1.1.2 Messwerte

Δd	M1	M2	M3	M4	$\overline{x}$	σ
0,5	81,17	67,5	69,33	64,83	68,42	7,21
0,75	100,33	-	95,5	-	97,92	3,42
1	137,83	131,67	135,83	132,18	134	2,96
1,25	166,33	-	164,5	-	165,42	1,3
1,5	200,67	192,5	193	197,17	195,08	3,84
1,75	232,17	-	232,17	-	232,17	1
2	268,67	265	268,83	265,67	267,17	1,99
2,25	298,33	-	304,33	-	301,33	4,24
2,5	338	327,5	332,67	327,17	330,08	5,12
2,75	373,67	-	364,83	-	369,25	6,25
3	407	399	399,67	396,33	399,33	4,57
3,25	432,67	-	429,5	-	431,08	2,24
3,5	477,17	466	461,67	461,17	463,83	7,43

Δd ist der Abstand des Lichtpunktes vom Ausgangspunkt (bei $f_d = 0Hz$) in mm. M1-M4 sind unsere Messreihen (abgelesen vom Frequenzzähler, Angabe in Hz). Wir haben unabhängig voneinander jeweils zwei Messungen durchgeführt, beide Male in halben Millimeter Schritten bis zur maximal einstellbaren Frequenz, in jeweils einer Messung noch in viertel Millimeter Schritten. Durch unabhängiges Messen haben wir versucht, Fehler (z.B. durch fehlerhaftes Ablesen der Werte) zu vermeiden. $\overline{x}$ ist der arithmetische Mittelwert der vier bzw. zwei Messwerte, σ ist die auf den Mittelwert bezogene Standardabweichung und ist durch folgende Formel gegeben:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} \qquad \text{mit} \qquad \overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Man stellt fest, dass in der Messung für $\Delta d = 1,75$ die Standardabweichung eigentlich 0 sein müsste, aus rechnerischen Gründen[2] haben wir jedoch den Wert 1 angenommen. Die Werte für $\overline{x}$ haben wir nun (mit ihrer Standardabweichung) auf eine Skala aufgetragen und eine Regressionsgerade der Form $f(x) = a \cdot x + b$ erstellt. Die Lichtgeschwindigkeit ergibt sich dann aus der in der Vorbereitung hergeleiteten Formel

$$c \approx 8\pi \cdot d_{ld} \cdot (d_{ue} + d_{du}) \cdot \frac{f}{s} \tag{1}$$

[2]Bei der Regression benutzen wir $\frac{1}{\sigma^2}$ zur Gewichtung der einzelnen Messwerte, jedoch muss dabei $\sigma \neq 0$ sein.

Für die aus der Regression ermittelte Steigung gilt

$$a = \frac{f}{s}$$

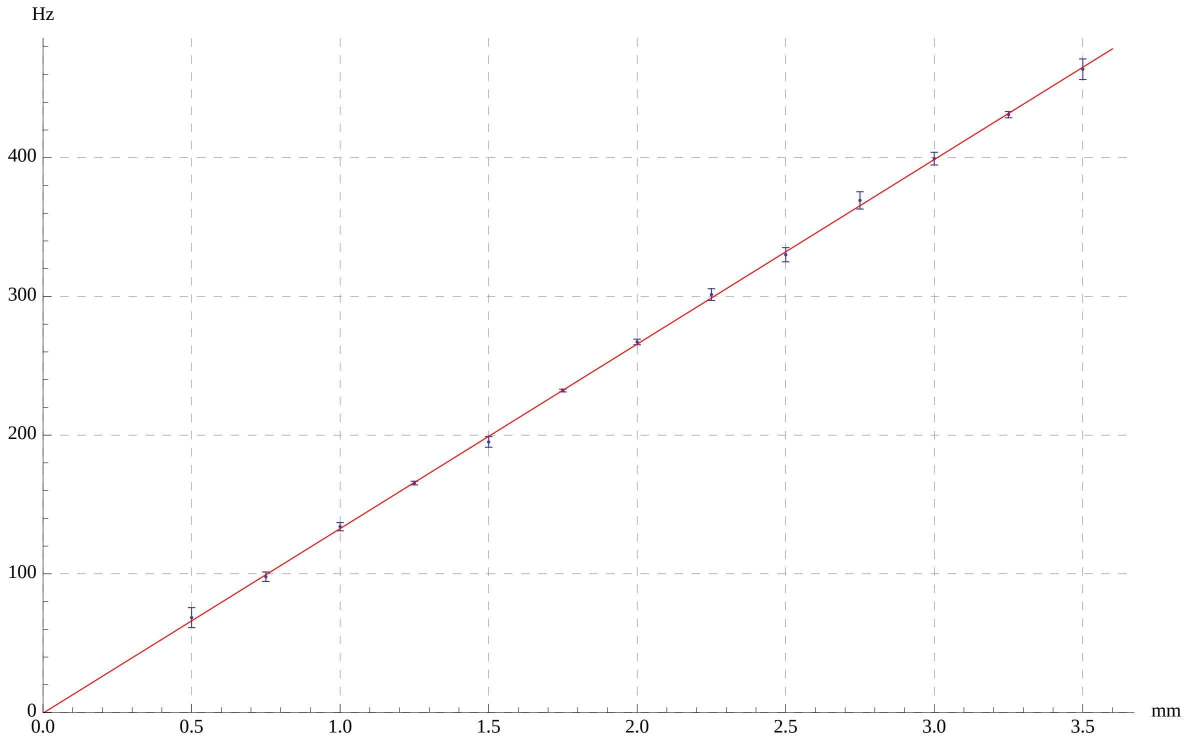
Daher ergibt sich die Lichtgeschwindigkeit folgendermaßen:

$$c \approx 8\pi \cdot d_{ld} \cdot (d_{ue} + d_{du}) \cdot a \tag{2}$$

1.1.3 Stimmgabel

Wir sollten außerdem probieren, die Frequenz von $440Hz$ mittels Schwebung, die durch Überlagerung eines Stimmgabeltons mit dem Motorgeräusch auftritt, zu bestimmen. Dies gelang uns ohne große Probleme, die Schwebung war im richtigen Frequenzbereich deutlich zu hören.

1.2 Auswertung



Zur Regression ist zu sagen, dass wir die nur zweifach gemessenen Werte (Viertelschritte) nur halb so stark wie die vierfach gemessenen Werte gewichteten (zusätzlich zur bereits erwähnten Gewichtung). Dies taten wir einerseits auf Grund der ungenaueren Messung (schwer ablesbar) und andererseits wegen der statistischen Zuverlässigkeit der Werte (Anzahl der Messungen).

Die Regressionsgerade (rot) ist durch folgende Funktion gegeben:

$$f(x) = -0,977643 + 133,219 \cdot x$$

Damit ergibt sich aus der Formel (2) ein Wert von $c \approx 304026000\frac{m}{s}$ für die Lichtgeschwindigkeit, was einer Abweichung von $1,41\%$ vom Literaturwert ($c = 299792458\frac{m}{s}$) entspricht. Es freut uns, so einen genauen Wert erhalten zu haben. Es folgt nun trotzdem eine ausführliche Fehlerbetrachtung.

1.3 Fehlerrechnung

1.3.1 Statistischer Fehler

Der statistische Fehler ist (durch die σ-abhängige Gewichtung der Messwerte bei der Regression) in der Steigung der Geraden enthalten. Zur Steigung der berechneten Regressionsgeraden gab *Mathematica*® uns einen Fehler von

$$a = (133,219 \pm 0,766156) \cdot \frac{Hz}{mm}$$

an[3]. Das entspricht einem relativen Fehler von $0,58\%$. Zur Bestimmung des endgültigen statistischen Fehlers in unserem Wert für die Lichtgeschwindigkeit verwenden wir das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta c = \sqrt{(\frac{\partial c}{\partial a} \cdot \Delta a)^2}$$

Daraus folgt für das c aus (2):

$$\Delta c = \pm 8\pi d_{ld}(d_{ue} + d_{du}) \cdot \Delta a$$

Und somit erhalten wir

$$\Delta c = 1748490\frac{m}{s}$$

Man erkennt, dass die statistische Abweichung kleiner als die absolute Abweichung unseres Messwertes vom Literaturwert ist. Außerdem muss erwähnt werden, dass bei lediglich vier Messungen der statistische Fehler nicht sehr aussagekräftig ist.

[3] Alle Rechnungen finden sich im Anhang, deshalb erläutern wir diese hier nicht näher.

1.3.2 Systematische Fehler

Dass die im obigen Abschnitt ausgerechnete Abweichung vom Literaturwert kleiner ist, als die tatsächlich gemessene, lässt sich durch systematische Fehler im Versuchsaufbau bzw. der Versuchsdurchführung erklären. Wenn man den relativen statistischen Fehler von der relativen Abweichung unseres Wertes vom Literaturwert abzieht, bleibt uns ein Spielraum von $0,83\%$ für systematische Fehler. Das ist selbstverständlich kein sonderlich zuverlässiger Wert, lässt uns aber zumindest grobe Fehler im Versuchsaufbau und bei der Messung ausschließen.
Zur Berechnung unseres systematischen Fehlers verwenden wir die Formel (1), also

$$c \approx 8\pi \cdot d_{ld} \cdot (d_{ue} + d_{du}) \cdot \frac{f}{s} \equiv c(d_{ld}, d_{ue}, d_{du}, f, s) \equiv c(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

So können wir die geschätzten Fehler der Abstände im Versuchsaufbau (d_{ld}, d_{ue}, d_{du}), die auf dem Frequenzzähler angegebene Messungenauigkeit (f) sowie geschätze Fehler beim Ablesen von der Millimeterskala (s) berücksichtigen. Folgende Messungenauigkeiten können wir angeben:

- $\Delta d_{ld}, \Delta d_{ue}, \Delta d_{du} = \pm 0,01m$
- $\Delta f = 0,1\%$
- $\Delta s = 0,1mm = 0,0001m$

Δf war auf dem Frequenzmessgerät angegeben. Δs ist die geschätzte Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte vom Projektionsschirm. Diese haben wir relativ klein gewählt, da wir einerseits eine Lupe zum Ablesen benutzten und andererseits auch auf Grund unserer (wie oben beschriebenen) Messmethode recht genau messen konnten.
Wegen der Relation $a = \frac{f}{s}$ können wir ein Wertepaar von f und s aus unseren mittleren Messwerten nehmen und dieses anstatt der berechneten Steigung verwenden. Das ist streng genommen nicht ganz korrekt, da wir beim Verwenden des Wertepaars eigentlich auch dessen statistischen Fehler berücksichtigen müssten. Das würde die Rechnung jedoch unnötig komplizieren, deshalb suchen wir uns das mittlere Wertepaar (aus vier Messungen), das die geringste Standardabweichung σ aufweist aus und nehmen an, dass es bis auf vernachlässigbare Abweichungen korrekt ist.
Somit haben wir folgende Werte:

	Wert	Δ
d_{ld}	$6,58,$	$0,01m$
d_{ue}	$6,57m$	$0,01m$
d_{du}	$7,23m$	$0,01m$
f	$267,17Hz$	$0,26717Hz$
s	$2 \cdot 10^{-3}m$	$0,1 \cdot 10^{-3}m$

Den systematischen Fehler berechnen wir nun wieder mit Hilfe des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes:

$$\Delta c = \sum_{i=1}^{5} |\frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i|$$

Dadurch erhalten wir

$$\Delta c = \frac{8\pi(x_2 + x_3)x_4}{x_5} \cdot \Delta x_1 + \frac{8\pi x_1 x_4}{x_5} \cdot \Delta x_2 + \frac{8\pi x_1 x_4}{x_5} \cdot \Delta x_3$$
$$+ \frac{8\pi x_1(x_2 + x_3)}{x_5} \cdot \Delta x_4 - \frac{8\pi x_1(x_2 + x_3)x_4}{x_5^2} \cdot \Delta x_5$$

Nun müssen wir nur noch alle Werte einsetzen und erhalten einen systematischen Fehler von

$$\Delta c = 0,140331 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 14033100 \frac{m}{s}$$

Das ergibt einen relativen systematischen Fehler unserer Messungen von $4,62\%$.

1.4 Abschließende Betrachtung

Unser gemessener Wert für die Lichtgeschwindigkeit einschließlich Fehler beträgt also

	Messwert	stat. Δ	sys. Δ	$\sum$	Δ Literatur
absolut	$304026000 \frac{m}{s}$	$\pm 1748490 \frac{m}{s}$	$\pm 14033100 \frac{m}{s}$	$\pm 15781590 \frac{m}{s}$	$4233542 \frac{m}{s}$
relativ	$304026000 \frac{m}{s}$	$0,58\%$	$4,62\%$	$5,2\%$	$1,41\%$

Man sieht, dass der Literaturwert mitten im Bereich unserer Fehlerrechnung liegt. Abschließend sagen wir also, dass wir sehr zufrieden mit unserer Messung sein können, denn so eine geringe Abweichung unserer Messung vom Literaturwert war eigentlich (in Anbetracht der Versuchsbedingungen) kaum zu erwarten.

2 Phasenvergleichsmethode

2.1 Justierung und Eichung

Zuerst maßen wir die Frequenzen der Signale mit Hilfe eines Frequenzzählers:

$$\frac{\omega}{10} = 2\pi \cdot 5998,8kHz \quad \text{und} \quad \omega - \Omega = 2\pi \cdot 100,05kHz$$

Aus diesen Werten folgt der Zeitdehnungsfaktor:

$$k = \frac{\omega - \Omega}{\omega} \approx 0,00166783$$

Anschließend mussten wir noch die Zeitablenkung des Oszilloskops eichen. Wie wir zu unserer Freude feststellten, musste das Gerät nicht geeicht werden, denn es zeigte immer die korrekte Anzahl von Perioden/Zeit an. Das ist nicht unbedingt verwunderlich, denn es handelte sich um ein sehr neues Messgerät.

2.2 Messung der Lichtgeschwindigkeit in Luft

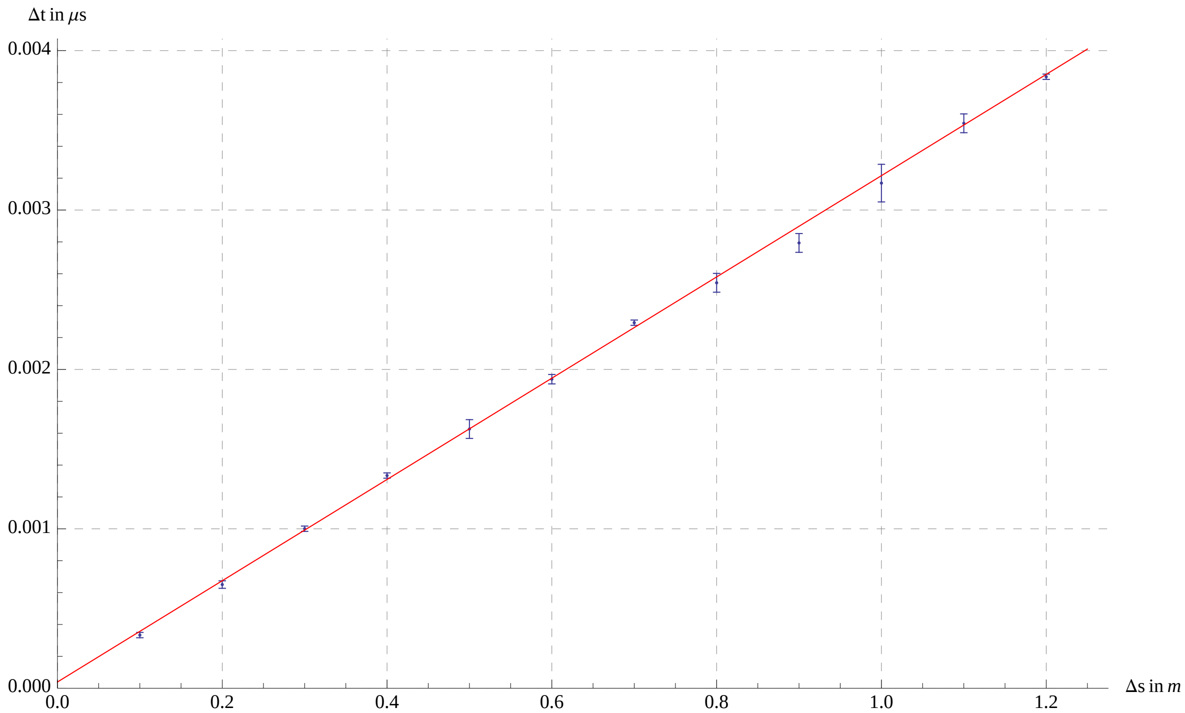
2.2.1 Messwerte

Δs in m	M1 (μs)	M2 (μs)	$\overline{\Delta t}$ (μs)	σ (μs)
0	0	0	0	0
0,1	0,2	0,2	0,2	0,01
0,2	0,4	0,38	0,39	0,0141
0,3	0,6	0,6	0,6	0,01
0,4	0,8	0,8	0,8	0,01
0,5	1	0,95	0,975	0,0354
0,6	1,175	1,15	1,1625	0,0177
0,7	1,375	1,375	1,375	0,01
0,8	1,5	1,55	1,525	0,0354
0,9	1,7	1,65	1,675	0,0354
1	1,95	1,85	1,9	0,0707
1,1	2,15	2,1	2,125	0,0354
1,2	2,3	2,3	2,3	0,01

Hierbei ist Δs die Verschiebungsstrecke zu dem Punkt, an dem die Phasenverschiebung am Oszilloskop auf Null gestellt wurde. M1 und M2 sind unsere zwei Messreihen, $\overline{\Delta t}$ ist der Mittelwert dieser Messungen und σ die Standardabweichung von diesem Wert. Die Frequenzwerte und σ müssen noch mit dem Faktor k multipliziert werden.

Diese Werte haben wir wieder in einem Schaubild aufgetragen und eine passende Gerade mittels linearer Regression zu den Werten gefunden.

2.2.2 Auswertung



Die Messwerte wurden alle mit einer Gewichtung von $\frac{1}{\sigma^2}$ in die Regression mit einbezogen, wobei wir bei Werten mit $\sigma = 0$ wieder die kleinste anzunehmende Abweichung gewählt haben. Außerdem wurden die bereits mit k multiplizierten Werte für $\overline{\Delta t}$ und σ für die Regression verwendet (nachzulesen in den Rechnungen im Anhang). Die Funktion für die rote Gerade lautet also

$$f(x) = 0,000039156 + 0,00317651 \cdot x$$

mit der Steigung $a = 0,00317651 \frac{\mu s}{m}$. Um die Lichtgeschwindigkeit herauszufinden, muss man also lediglich den Kehrwert der Steigung nehmen:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{0,00317651 \frac{\mu s}{m}} \approx 314,811 \frac{m}{\mu s} \approx 3,14811 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Die Abweichung zum Literaturwert beträgt bei dieser Messung $5,01\%$. Widmen wir uns nun also der Fehlerrechnung.

2.2.3 Fehlerrechnung

Statistischer Fehler:

Der statistische Fehler lässt sich wie in Aufgabe 1 über die Steigung ermitteln. Die Steigung a wurde von *Mathematica*® mit einem Fehler von

$$a = (0,00317651 \pm 0,0000210588)\frac{\mu s}{m}$$

angegeben. Das entspricht einem relativen Fehler von $\approx 0,66\%$, welches somit auch unser statistischer Fehler ist. Also ist

$$\Delta c = 0,0207331 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Systematischer Fehler:

Um den systematischen Fehler auszurechnen, betrachten wir

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t_{mess} \cdot k}$$

Δs, die Verschiebungsstrecke der Lichtquelle entlang der Zeiß-Schiene in Bezug auf den Anfangspunkt, geben wir mit einem Fehler von $0,5mm$ an. Den systematischen Fehler von Δt_{mess} (unser am Oszilloskop abgelesener Wert für Δt ohne Korrekturfaktor) schätzen wir auf $0,01\mu s$. Dieser Fehler entstand zum einen deshalb, weil die Kurve am Oszilloskop mit zunehmendem Abstand der Lichtquelle von der Photodiode immer flacher wurde (schwächeres Signal) und somit weniger genau abzulesen war. Dazu kam, dass sie mit zunehmendem Abstand auch breiter bzw. etwas diffus wurde, was wohl mit der zunehmenden Streuung des Quellen-Lichts zu tun hatte. Schließlich müssten wir eigentlich auch noch einen systematischen Fehler für den Korrekturfaktor k angeben, da dieser über ein Frequenzmessgerät bestimmt wurde. Da wir jedoch keine Fehlerangabe zu diesem Gerät haben, müssen wir unserem Wert für k vertrauen.
Zur Rechnung verwenden wir analog zur Aufgabe 1 unsere genauesten Messwerte. Mit Hilfe des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ergibt sich ein systematischer Fehler von

$$\Delta c = \frac{1}{\Delta t_{mess} \cdot k} \cdot 0,0005m + \frac{\Delta s}{\Delta t_{mess}^2 \cdot k} \cdot 0,01\mu s \approx 0,164885 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Das entspricht einem relativen Fehler von $\approx 5,5\%$.

2.2.4 Lichtgeschwindigkeit mit Fehler

Unsere gemessene Lichtgeschwindigkeit mit Fehlern beträgt also

$$c = 3,14811 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \pm 0,02073 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \pm 0,1649 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Das entspricht einem relativen Fehler von insgesamt $\approx 6,16\%$. Da die Abweichung unserer Messung vom Literaturwert nur $5,01\%$ beträgt, liegt letzterer also im Bereich unserer Fehlerangabe, die damit also plausibel ist.

2.3 Bestimmung der Brechzahl von Wasser

2.3.1 Messung und Rechnung

Um die Brechzahl von Wasser zu bestimmen, stellten wir die Lichtquelle in verschiedenen Entfernungen zur Photodiode auf, stellten die Laufzeitverschiebung am Oszilloskop auf null, legten ein $d = 1m$ langes, mit Wasser gefülltes Rohr zwischen Leuchtquelle und Photodiode, und maßen dann noch einmal die Phasenverschiebung. Diese Verschiebung maßen wir zwar fünf mal, lasen jedoch jedes mal denselben Wert ($\Delta t = 0,7\mu s$) am Gerät ab. Deshalb ersparen wir uns eine Auflistung der einzelnen Messreihen. Auch die statistische Fehlerbetrachtung wird hier nicht möglich sein. Die Formel zur Berechnung der Brechzahl von Wasser lautet

$$n_{Wasser} = c_{Luft} \cdot \frac{k \cdot \Delta t_{Wasser}}{d_{Wasser}} + 1$$

Wir verzichten auf die Verwendung der Vakuumslichtgeschwindigkeit, da der Versuch nicht im Vakuum stattfand und der Brechungsindex von Luft bekannt ist. Es würde nur eine unnötige Fehlerquelle darstellen. Setzt man nun alle Werte in die obige Formel ein erhält man

$$n_{Wasser} = 2,99105 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot \frac{0,00167 \cdot 0,7\mu s}{1m} + 1 \approx 1,3492$$

Ganz korrekt ist obige Formel jedoch nicht, denn eigentlich ist die Strecke, die das Licht durch Wasser geht, nur $0,994m$ lang, die restlichen $6mm$ sind Glas. Man muss also eigentlich erst die Laufzeitdifferenz ausrechnen, die sich beim Durchqueren der $6mm$ Glas ergibt, diese von der gemessenen Laufzeitdifferenz abziehen, und obige Formel noch einmal mit $d_{Wasser} = 0,994m$ berechnen. Für die Glasschicht haben wir einen für Laborglas üblichen Brechungsindex von etwa $1,5$ angenommen. Auf diese Art und Weise ergibt sich unser neuer Brechungsindex:

$$n_{Wasser} = 1,3488$$

Dieser Wert weicht nur um $1,41\%$ vom Literaturwert ($n_{Wasser} = 1,33$) ab.

2.3.2 Fehlerbetrachtung

Da wir keine Abweichungen in unseren Messreihen haben, können wir an dieser Stelle nur den systematischen Fehler bestimmen. Die Ableseungenauigkeit am Oszilloskop geben wir wieder mit $\Delta t = 0,01\mu s$ an. Die Verschiebungsstrecke Δs spielt in diesem Fall keine Rolle, da sie beim Ablesen der Werte nicht verändert wurde und die Phasenverschiebung vor jedem Messen wieder auf null gesetzt wurde (und ist somit wieder abhängig von Δt). c_{Luft} trägt keinen (bzw. einen vernachlässigbaren) Fehler. Der Angabe für die Länge der Wasserstrecke ($0,994m$) geben wir einen Fehler von $\Delta s = 1mm$. k trägt zwar wahrscheinlich einen systematischen Fehler, dieser ist uns jedoch wie oben schon erläutert nicht bekannt. Also können wir den systematischen Fehler nur in Abhängigkeit von einer Variablen (Δt) bestimmen:

$$\frac{\partial n}{\partial \Delta t_{mess}} \cdot \Delta t_{Fehler} + \frac{\partial n}{\partial \Delta s_{Wasser}} \cdot \Delta s_{Fehler} \approx 0,00502374$$

Das entspricht einer Abweichung von $0,37\%$ von unserem Messwert. Man sieht, dass der Literaturwert somit außerhalb des von uns gemessenen Wertes (inklusive Fehler) liegt. Das ist aber nicht sehr verwunderlich, wenn man folgende (zusätzliche) Fehlerquellen beachtet:

- Wir haben $n_{LGlas} = 1,5$ angenommen. Es ist aber gut möglich, dass der eigentliche Wert darüber liegt.
- Es ist möglich, dass unser Fehler beim Ablesen vom Oszilloskop größer war als $\Delta t = 0,01\mu s$.
- Der Fehler im Korrekturfaktor k konnte nicht berücksichtigt werden.
- Es ist wahrscheinlich, dass der Lichtstrahl das Wasserrohr nicht absolut senkrecht durchlaufen hat und somit die eigentliche Strecke $d_{Wasser} \geq 0,994m$ war.
- Auch wenn die Auswirkung auf das Ergebnis minimal wäre, kann es sein, dass der angenommene Wert für c_{Luft} nicht exakt stimmt.

Trotz allem können wir eigentlich zufrieden mit unserem Messwert sein, da dieser eine doch sehr geringe Abweichung vom Literaturwert aufweist. Es ist zwar bedauerlich, dass wir keine zufriedenstellende Fehlerrechnung machen konnten, war aber in Hinsicht auf unsere Mittel jedoch kaum zu vermeiden.

2.4 Bestimmung der Brechzahl von Plexiglas

2.4.1 Messung und Rechnung

Im Gegensatz zur letzten Aufgabe hatten wir zwei verschieden lange Plexiglasstangen ($x_1 = 30cm$, $x_2 = 8cm$) zur Verfügung, entsprechend maßen wir die Brechzahl auch bei beiden. Abgesehen davon gingen wir analog zur vorherigen Aufgabe vor.
Wir maßen die Zeitverschiebung am Oszilloskop jeweils acht Mal (für jede Plexiglasstange), kamen aber bei jeder Messung auf dasselbe Ergebnis, nämlich $0,3\mu s$ für x_1 und $0,1\mu s$ für x_2. Eine statistische Fehlerbetrachtung wird deshalb wieder nicht möglich sein.
Unsere beiden Plexiglasstangen haben einen Brechungsindex von

$$n_{x_1} = c_{Luft} \cdot \frac{k \cdot \Delta t_{x_1}}{d_{x_1}} + 1 \approx 1,49886$$

$$n_{x_2} = c_{Luft} \cdot \frac{k \cdot \Delta t_{x_2}}{d_{x_2}} + 1 \approx 1,62357$$

Es fällt auf, dass der Wert n_{x_1} sehr nahe am tatsächlichen Wert für den Brechungsindex von Plexiglas ($n_{Plexi} = 1,49$) liegt, er hat eine Abweichung von lediglich $0,59\%$. Der Wert n_{x_2} ist mit einer Abweichung von $8,96\%$ wesentlich weiter vom tatsächlichen Wert entfernt.

2.4.2 Fehlerbetrachtung

Wie bereits erwähnt wird es wieder nicht möglich sein, eine statistische Fehlerrechnung zu machen. Für den systematischen Fehler nahmen wir für Δt wieder einen Fehler von $0,01\mu s$ an. Die Länge der Plexiglasstangen konnten wir auch nicht genau überprüfen, deshalb nehmen wir hier einen Fehler von $5mm$ an. Damit ergibt sich aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für unseren systematischen Fehler

$$\Delta n_{x_1} = c_{Luft} \cdot \frac{k}{d_{x_1}} \cdot \Delta t + c_{Luft} \cdot \frac{k \cdot \Delta t_{x_1}}{d_{x_1}^2} \cdot \Delta d \approx 0,0249$$

$$\Delta n_{x_2} = c_{Luft} \cdot \frac{k}{d_{x_2}} \cdot \Delta t + c_{Luft} \cdot \frac{k \cdot \Delta t_{x_2}}{d_{x_2}^2} \cdot \Delta d \approx 0,1013$$

Mit diesen Fehlern liegt der Literaturwert also im Bereich unserer Messungen für unseren ersten Wert (n_{x_1}). Man sieht, dass der Fehler beim zweiten Wert zwar größer ist, dieser jedoch trotzdem nicht an den Literaturwert herankommt. Aber auch hier gilt, dass wir wieder den Fehler von k nicht berücksichtigt haben, genausowenig wie die anderen oben (2.3.2) bereits erwähnten zusätzlichen Fehlerquellen.

2.5 Bestimmung der Brechzahl mittels Lissajous-Figuren

Hier stellten wir das Oszilloskop auf XY-Betrieb um und stellten die Phasenverschiebung bei einem gegebenen Abstand (anfangs $1m$) so ein, dass auf dem Oszilloskop nur noch eine Gerade zu erkennen war. Dann stellten wir das Plexiglas wieder auf die Zeiß-Schiene. Dann verschoben wir die Lichtquelle entlang der Zeiß-Schiene so lange, bis auf dem Oszilloskop wieder eine Gerade zu erkennen war. Anschließend maßen wir die Strecke, um die wir die Lichtquelle verschieben mussten.

Abstand Quelle-Diode in m	Verschiebung Δs in m
0,9	0,148
1	0,158
1,2	0,168
1,3	0,158
1,4	0,191

$\overline{\Delta s}$ in m	σ in m	Fehler
0,1646	0,01636	$9,94\%$

An der Messtabelle kann man schon sehen, dass die Messung recht ungenau verlief. Denn eigentlich müsste Δs immer (zumindest näherungsweise) gleich groß sein, da der Abstand von der Lichtquelle zum Empfänger keine Auswirkung auf die Brechzahl des Mediums dazwischen haben kann. Deshalb errechneten wir den Mittelwert $\overline{\Delta s}$, die Standardabweichung σ und gaben einen statistischen Fehler von $9,94\%$ an. Die Brechzahl bestimmen wir nun anhand des Mittelwertes.

$$n_{Plexi} = \frac{\Delta s}{d_{Plexi}} + 1 \approx 1,54867$$

Es bleibt nun noch der systematische Fehler zu bestimmen. Wie gehabt geben wir einen Fehler für d_{Plexi} von $\Delta d = 5mm$ an. Bei der Verschiebungsstrecke schätzen wir unseren Fehler auf $\Delta s_{err} = 1mm$.
So ergibt sich ein systematischer Fehler von

$$\Delta n = \frac{\Delta s_{err}}{d_{Plexi}} + \frac{\Delta s}{d_{Plexi}^2} \cdot \Delta d \approx 0,0125$$

Das entspricht einem relativen Fehler von lediglich $0,81\%$. Zusammen mit unserer statistischen Unsicherheit ergibt das einen Gesamt-Fehler von $10,75\%$, was einer absoluten Abweichung von $\approx 0,1665$ entspricht. Das ist zwar ein sehr großer (wenn nicht zu großer) Fehler, ist aber durchaus realistisch. Vor allem die hohe Varianz von Δs in unseren Messreihen deutet auf eine hohe (relative) Ungenauigkeit im Versuchsaufbau hin. Das könnte z.B. daran liegen, dass die Messungen in sehr kleinen Bereichen durchgeführt wurden, wo sich sehr leicht Fehler einschleichen können.
Trotz (oder dank?) des großen Messfehlers liegt der Literaturwert im Bereich des von uns gemessenen Wertes, damit ist unsere Fehlerrechnung immerhin plausibel.