



~~X~~/WS 20.11../12..

Praktikum: (P1/~~X~~) (~~X~~o/Di/~~X~~/1/~~X~~) Gruppe-Nr: ..11..

Name: Fleig Vorname: Georg

Name: Krause Vorname: Marcel

Versuch: Pendel (mit/o/~~X~~e) Fehlerrechnung

Betreuer: ...Vanessa Wiedmann... Durchgeführt am: 22.11.11.

Abgabe am:

Rückgabe am:

Begründung:

2. Abgabe am:

Ergebnis: (+ / 0 / -)

Fehlerrechnung: ja / nein

Datum:

Handzeichen:

Bemerkungen:



Schwingungen sind in der Natur sehr häufig auftretende Bewegungsformen und deshalb in der Physik so wichtig. Der Begriff 'Schwingung' zieht sich durch alle Teilgebiete der Physik hindurch. Bei diesem Versuch geht es um mechanische Schwingungen. Er bietet die Gelegenheit, sich mit einer ganzen Reihe von Schwingungsaspekten sowie einigen Problemen der Bewegung starrer Körper zu beschäftigen. Meistens werden die Versuchsbedingungen so gewählt, daß es gestattet ist, das bei den Schwingungen wirkende Kraftgesetz (wirksame Kraft als Funktion des Ortes) der einfacheren Mathematik wegen zu linearisieren. Die mathematischen Lösungen sind dann harmonische Schwingungen. Daß das nur ein Verhalten im Grenzfall ist, von dem auch bei noch recht 'normalen' Verhältnissen schon erhebliche Abweichungen auftreten, wird bei diesen Versuchen deutlich.

Achtung: Die schwingende Kugel des Fadenpendels ist gefährlich! Aufpassen und die Absperrung beachten!

Aufgaben:

1.1 Berechnen Sie vorbereitend auf den Versuch die reduzierte Pendellänge l_r eines physikalischen Pendels, das aus einem zylindrischen, an einem Ende drehbar aufgehängten Stab der Länge L besteht. Überzeugen Sie sich rechnerisch davon, daß Massenänderungen im Abstand l_r vom Drehpunkt die Schwingungsdauer nicht verändern. Die Klauen, mit denen die Schneiden des Pendellagers am Stab befestigt sind, sollten also nur zu geringfügigen Abweichungen des Rechenwerts vom Meßwert führen.

1.2 Bestimmen Sie die Fallbeschleunigung g mit Hilfe des Reversionspendels.

Suchen Sie experimentell jenen Schneidenabstand auf, der der reduzierten Pendellänge entspricht, bei dem also die Schwingungsdauern gleich sind, wenn das Pendel einmal um die eine, dann um die andere Schneide schwingt. Messen Sie dabei ein geeignetes kleines Intervall um den berechneten Wert herum sorgfältig aus. Beschränken Sie sich auf kleine Auslenkungen des Pendels.

Frage: Mit welchem systematischen Fehler müssen Sie bei Ihrer Amplitudenwahl noch rechnen?

Tragen Sie nach jeder Messung die Schwingungsdauer in ein Diagramm für beide Schwingungsdauern über dem Schneidenabstand ein. Sie erkennen bald die nähere Umgebung von l_r und können die weiteren Meßpunkte entsprechend wählen. Entnehmen Sie dem Diagramm l_r und $T(l_r)$ und berechnen Sie daraus g .

Bei ausführlicher Fehlerrechnung ist hier Ausgleichsrechnung nötig. Bei der Messung wird eine Lichtschranke mit Zeitmeßeinrichtung benutzt. Eine Messung kann nur bei offener Schranke (rote Leuchtdiode an der Schranke leuchtet) gestartet werden. Der relative Eichfehler der Zeitmeßeinrichtung beträgt $\pm 0,2\%$. Dazu kommt bei Zusammenwirken mit Lichtschranke und Start-Stop-Steuergerät noch ein meßzeitunabhängiger Fehler, der aus einer Meßreihe zu bestimmen ist, bei der nur die einstellbare Anzahl der Schwingungen für die Zeitmessung verändert wird. Bei den Messungen kann es zweckmäßig sein, durch entsprechende Bereichswahl die Anzeigegegenauigkeit um eine Dezimale zu steigern und dafür auf die Anzeige der höchsten Zehnerstelle zu verzichten. Die Lichtschranke muß sorgfältig justiert werden so, daß das Schalten sehr nahe beim Nulldurchgang erfolgt.

Zum Überlegen: Wie sieht wohl ein Reversionspendel aus, bei dem der Schneidenabstand fest ist, und das dennoch auf gleiche Schwingungsdauern um beide Schneiden eingestellt werden kann? Hat es Vorteile?

2.1 Bestimmen Sie die Fallbeschleunigung g mit Hilfe des Fadenpendels bei kleinen Auslenkungen.

Auch hier kann eine Lichtschranke benutzt werden. (Die Kugel nicht in den Aufhängerdraht fallen lassen. Der Draht reißt sonst.)

2.2 Untersuchen Sie die Abhängigkeit der Schwingungsdauer des Fadenpendels von der Schwingungsweite. Messen Sie fortlaufend, beginnend bei großer Auslenkung. Vergleichen Sie die Abhängigkeit mit theoretischen Vorhersagen. Stellen Sie die Ergebnisse in geeigneter Weise graphisch dar.

3.1 Stellen Sie bei zwei gleichartigen Pendeln (Massen m ; Abstand L_Z zwischen Drehpunkt und Zentrum der Pendelscheibe) durch Verschieben einer der Pendelscheiben gleiche Schwingungsdauern T_0 ein. Verwechseln Sie hier und im weiteren nicht L_Z mit dem Schwerpunktsabstand.

3.2 Koppeln Sie die Pendel mittels einer Schraubenfeder (Federkonstante D) in jeweils gleichem Abstand l von den Drehpunkten und messen Sie die Schwingungsdauern T_{gl} und T_{geg} der beiden Fundamentalschwingungen. Das sind die beiden Schwingungsformen, bei denen keine Schwebung auftritt. Wiederholen Sie die Messungen bei veränderter Koppellänge l , die aber, wie auch im ersten Fall keine sehr feste Kopplung bewirken soll, $\Delta(T^2) \ll T^2$. Vergleichen Sie T_0 , T'_{gl} , T'_{geg} , T''_{gl} , T''_{geg} . Welche Schwingungsdauern bleiben konstant? Welche Schwingungsdauer ist kopplungsabhängig? Berechnen Sie daraus mit Hilfe der Theorie die Werte von mgL/Θ und Dl^2/Θ (mit L ist hier der Abstand vom Drehpunkt zum Schwerpunkt gemeint). Vergleichen Sie das resultierende Trägheitsmoment Θ mit dem aus den gegebenen Daten berechneten Wert, und berechnen Sie dann auch die Federkonstante D . Bestimmen Sie D auch mit Hilfe einer statischen (eingebaut als Koppelfeder oder auch anders) und einer weiteren dynamischen Methode (nämlich im Federpendel mit verschiedenen Massen).

3.3 Messen Sie die Schwingungsdauer T_{osz} und die Schwebungsdauer T_{mod} bei Anregung der gekoppelten Pendel zu Schwebungen. Dabei soll eine der Koppellängen von 3.2 benutzt werden. Prüfen Sie den theoretischen Zusammenhang von T_{osz} und T_{mod} mit T_{gl} und T_{geg} .

Zubehör:

-Bodenstativ mit Schneidenpfanne für das Reversionspendel. Dieses besteht aus einem zylindrischen Stab (0,962m; 4,96 g/cm), einer festen und einer verschiebbaren Klaue mit Schneide (Klauenmasse ca. 86g; Klauenhöhe 12mm, Schneide 4mm unterhalb der Klauenmitte bzw. 2mm oberhalb der unteren Klauenfläche). Die feste Klaue befindet sich an einem Stabende, die Schneide also 10mm vom Stabende entfernt. Von dieser Schneide ab zählt die in den Stab eingeritzte Teilung, die auf ± 0.2 mm genau ist.

-2 Lichtschranken für Aufgaben 1 und 2, justierbar bezüglich des Pendelstabes, mit Start-Stop-Steuergerät und digital anzeigendem Zeitmeßgerät (Info dazu am Versuchsplatz!)

-Fadenpendel: dünner Stahldraht, $l \approx 2$ m, aktuelle Länge am Versuchsplatz angegeben, Aufhängung mit richtungsstabilisierendem Kugellager, Eisenkugel von 860g Masse) mit Winkelskala an der Wand;

-zwei koppelbare Pendel: Pendelschaft mit einer Masse je Länge von 7,44 g/cm, Pendelscheibe mit der Masse 1221g einschließlich des in ihr steckenden Schaftabschnitts, Entfernung zwischen Drehpunkt und Scheibenzentrum, wenn der Schaft gerade nicht durch die Scheibe hindurchragt, 1020mm, Masse der Koppelfederbefestigung 44g, Durchmesser der Pendelscheibe 100mm;

-verschiedene Schraubenfedern als Koppelfedern - Achtung: nur mäßig dehnen, um plastische Verformung zu vermeiden!

-Maßstab mit mm-Teilung

-weiterer Maßstab, aufstellbar, mit verschiebbaren Marken

-Satz von Hängegewichtsstücken

-zwei Stoppuhren

Die Versuchsausstattung ist trotz der Doppelbelegung nur einmal vorhanden. Die beiden Praktikantengruppen arbeiten unabhängig an jeweils verschiedenen Teilaufgaben, die in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden können.

Literatur:

Alle Lehrbücher der Physik!

Zu Aufg. 1 speziell: Kretschmar et al.; *Praktikum der Physik*, Kap. 3.4

Zu Aufg. 2.2 speziell: Kittel et al.; Berkeley Physics Course, *Mechanics*, Kap.7

Zu Aufg. 3 speziell: Walcher; *Praktikum der Physik*, 2. Aufl., Kap. 2.7, 7.4

Physikalisches Anfängerpraktikum P1

**Versuch:
P1-20,21
Pendel**

Schriftliche Ausarbeitung von Georg Fleig
Gruppe: Di-11

Datum der Versuchsdurchführung:
22.11.2011

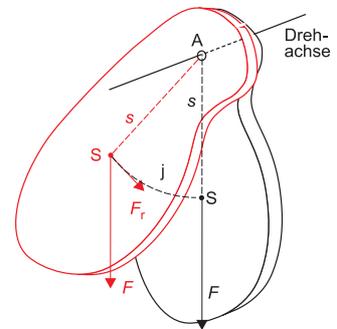
Einführung

In den folgenden Versuchen soll mit verschiedenen Pendelarten und Kombinationen mehrerer Pendel experimentiert werden. Dabei wird zum einen das mathematische und zum anderen das physikalische Pendel verwendet. Der Unterschied zwischen diesen beiden Pendelarten liegt darin, dass beim mathematischen Pendel angenommen wird, dass die gesamte Masse als Punktmasse im Schwerpunkt konzentriert ist. Beim physikalischen Pendel wird hingegen die Masseverteilung berücksichtigt. Durch dieses zusätzlich zu betrachtende Trägheitsmoment des gesamten Pendels, stimmen die Berechnungen eher mit dem Experiment überein als beim mathematischen Pendel.

Aufgabe 1: Reversionspendel

Aufgabe 1.1 - reduzierte Pendellänge l_r

Wir bestimmen zunächst die reduzierte Pendellänge l_r eines zylindrischen Stabes der Länge L , der an einem Ende drehbar aufgehängt ist. Ein solches physikalisches Pendel ist rechts schematisch dargestellt. Da der Zylinder starr ist und eine Masseverteilung besitzt, handelt es sich hierbei um ein physikalisches Pendel, wodurch das Trägheitsmoment Θ_A beim Aufhängen im Punkt A berücksichtigt werden muss.



Nach dem Satz von Steiner gilt:

$$\Theta_A = \frac{1}{3}mL^2$$

Wird das Pendel nun um den Winkel φ aus der Ruhelage ausgelenkt, so entsteht durch die Schwerkraft eine rücktreibende Kraft $F_r = -mgs \sin \varphi$, die am Schwerpunkt S angreift und immer senkrecht auf dem Zylinder steht. Durch diese Kraft entsteht ein Drehmoment M_r mit dem Hebel s (Abstand zwischen Schwerpunkt und Aufhängepunkt):

$$M_r = -sF_r = -mgs \sin \varphi \approx -mgs\varphi$$

Hierbei wurde die Kleinwinkelnäherung verwendet.

Zwischen Drehmoment und Beschleunigung gilt folgende Beziehung:

$$M_p = \Theta_A \ddot{\varphi}$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Drehmomente erhält man die Bewegungsgleichung des Pendels:

$$\begin{aligned} M_p &= M_r \\ \Leftrightarrow \Theta_A \ddot{\varphi} &= -mgs\varphi \\ \Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{mgs}{\Theta_A} \varphi &= 0 \end{aligned}$$

Als Lösung dieser DGI wird folgender Ansatz verwendet:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 e^{i\omega t} \\ \ddot{\varphi} &= -\varphi_0 \omega^2 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$-\omega^2 + \frac{mgs}{\Theta_A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{mgs}{\Theta_A}}$$

Mit $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ erhält man die Periodendauer T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_A}{mgs}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Durch den Vergleich dieser Periodendauer mit der eines mathematischen Pendels T_m , lässt sich eine Gleichung für die reduzierte Pendellänge l_r finden, welche gerade die Länge darstellt, bei der die Periodendauer des mathematischen Pendels mit der des physikalischen Pendels der Länge L übereinstimmt.

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}$$

$$l_r = \frac{2}{3}L$$

Nun soll nachgewiesen werden, dass die Schwingungsdauer invariant unter Massenänderungen im Abstand l_r vom Aufhängepunkt ist. Dazu wird eine zweite Masse m_2 mit Trägheitsmoment $\Theta_2 = m_2 l_r^2 = m_2 \left(\frac{2}{3}L\right)^2$ eingeführt. Der Schwerpunkt liegt dabei bei $s_2 = \frac{2}{3}L$. Die neue Periodendauer T_{neu} ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned} T_{neu} &= 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_A + \Theta_2}{mgs + m_2gs_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2 + m_2\left(\frac{2}{3}L\right)^2}{mg\frac{L}{2} + m_2g\frac{2}{3}L}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{m}{2} + \frac{2}{3}m_2\right)\frac{2}{3}L^2}{\left(\frac{m}{2} + \frac{2}{3}m_2\right)gL}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = T \end{aligned}$$

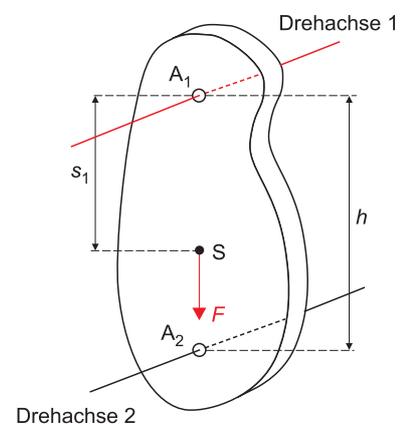
Damit ist gezeigt, dass eine zusätzliche Masse an dieser Stelle die Schwingungsdauer nicht verändert. Es kann lediglich durch die Klauen am Stab zu leichten Abweichungen des Messwertes kommen.

Aufgabe 1.2 - Erdbeschleunigung g

In diesem Versuch soll mit Hilfe eines Reversionspendels die Erdbeschleunigung g bestimmt werden. Ein Reversionspendel ist ein physikalisches Pendel, welches zwei zueinander parallele Drehachsen besitzt. Wir suchen nun experimentell den Abstand h zwischen den beiden Drehachsen, bei welchem die Schwingungsdauer beider Achsen gleich ist. Dieser Abstand entspricht der reduzierten Pendellänge l_r des Reversionspendels. Durch umstellen von T_m erhält man eine Gleichung für g :

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}l_r$$

Beim Bestimmen von l_r muss darauf geachtet werden, dass das Pendel nur um kleine Winkel ausgelenkt wird, da ansonsten die Kleinwinkelnäherung nicht mehr gilt. Außerdem würden größere Auslenkungen



höhere Geschwindigkeiten verursachen die wiederum für eine verstärkte Luftreibung sorgen und somit die Messung weiter verfälschen.

Aufgabe 2: Fadenpendel

In den folgenden Versuchen experimentieren wir mit einem Fadenpendel, welches hier als mathematisches Pendel angesehen werden kann.

Aufgabe 2.1 - Erdbeschleunigung g

Nun soll die Erdbeschleunigung g mittels eines Fadenpendels bestimmt werden. Dabei kann die Masse des Drahtes der Länge l gegenüber der Masse m der Kugel mit Radius R am Ende des Pendels vernachlässigt werden. Allerdings muss weiterhin das Trägheitsmoment Θ_K der Kugel berücksichtigt werden, da die Masse nicht auf einen einzelnen Massepunkt reduziert ist.

Für das Trägheitsmoment der Kugel gilt nach dem Satz von Steiner:

$$\Theta_K = \frac{2}{5}mR^2 + m(R+l)^2$$

Außerdem gilt für den Abstand s des Schwerpunktes zur Pendelachse:

$$s = R + l$$

Woraus sich die Periodendauer T für das Pendel ergibt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_K}{mgs}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}mR^2 + m(R+l)^2}{mg(R+l)}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}R^2 + (R+l)^2}{g(R+l)}}$$

Umstellen nach g liefert die gesuchte Erdbeschleunigung:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{\frac{2}{5}R^2 + (R+l)^2}{R+l}$$

Aufgabe 2.2 - Zusammenhang zwischen Amplitude und Periodendauer

Da bei diesem Versuch auch große Auslenkungen des Pendels betrachtet werden sollen, dürfen wir die Kleinwinkelnäherung nicht mehr verwendet. Damit ergibt sich die Schwingungs-DGL ohne Näherung zu

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgs}{\Theta} \sin \varphi = 0$$

Da sich diese DGL nicht einfach lösen lässt, muss auf die Reihendarstellung zurückgegriffen werden:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}R^2 + (R+l)^2}{g(R+l)}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right)$$

Diese wurde aus "Eichler, Krohnfeld, Sahn: Das neue physikalische Grundpraktikum" entnommen, auf eine Herleitung wird verzichtet.

Mit dieser Formel können nun die theoretischen Periodendauern berechnet und mit den gemessenen verglichen werden. Wir erwarten trotz dieser relativ genauen Formel bei großen Amplituden Abweichungen, da hier weiterhin die Luftreibung vernachlässigt wurde, die gerade bei großen Geschwindigkeiten zum tragen kommt.

Aufgabe 3: Kopplung zweier Pendel

Nun betrachten wir zwei miteinander gekoppelte Pendel die zur Schwingung angeregt werden. Dabei ist nun zu berücksichtigen, dass sich die Pendel gegenseitig beeinflussen. Die dabei entstehenden Effekte sollen im Folgenden untersucht werden.

Aufgabe 3.1 - Vorbereitung

Bei zwei gleichartigen Pendeln sollen durch Verschieben einer der Pendelscheiben gleiche Periodendauern T_0 erzeugt werden. Dies kann erreicht werden, indem L_Z variiert wird, welches den Abstand zwischen Aufhängepunkt des Pendels und Zentrum der Pendelscheibe darstellt.

Aufgabe 3.2 - Fundamentalschwingungen

Die beiden Pendel werden nun mit einer Schraubenfeder mit der Federkonstante D im Abstand l von den Drehpunkten gekoppelt. Es sollen die Periodendauern T_{gl} und T_{geg} der beiden Fundamentalschwingungen bestimmt werden. Dazu müssen Schwingungen in Phase sowie gegenphasige Schwingungen bei zwei verschiedenen Koppellängen l betrachtet werden.

Zusätzlich zur Schwerkraft wirkt nun noch die Federkraft auf jedes Pendel, die wiederum von der aktuellen Auslenkung beider Pendel abhängig ist. Daher erhalten wir zwei gekoppelte Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 &= -\Omega^2 (\varphi_1 - \varphi_2) \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 &= -\Omega^2 (\varphi_2 - \varphi_1)\end{aligned}$$

hier sei

$$\omega_0^2 = \frac{mgL_S}{\Theta} ; \quad \Omega^2 = \frac{Dl^2}{\Theta}$$

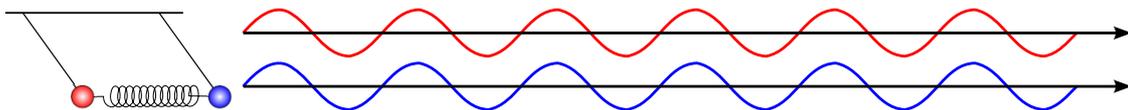
L_S bezeichnet den Abstand zwischen Schwerpunkt und Drehachse und berechnet sich aus den Schwerpunkten der einzelnen Komponenten:

$$L_S = \frac{m_{Scheibe} \cdot LZ + m_{Koppel} \cdot l + m_{Stab} \cdot \frac{L}{2}}{m_{ges}}$$

wobei $m_{ges} = m_{Scheibe} + m_{Stab} + m_{Koppel}$ gilt.

Durch Anwenden des bereits oben verwendeten Lösungsansatz erhält man zwei Gleichungen, die die DGI lösen. Diese sollen nun genauer betrachtet werden.

i) 1. Fundamentalschwingung: gleichphasig

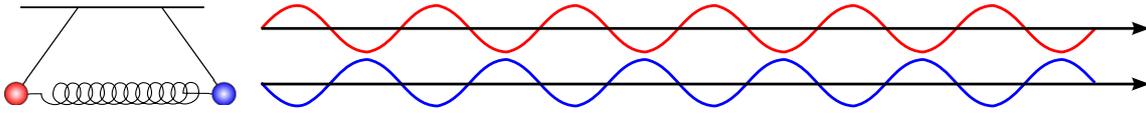


Eine gleichphasige Schwingung erhält man, wenn beide Pendel um dieselbe Amplitude in gleicher Richtung ausgelenkt werden. Bei dieser Schwingung spielt die Feder keine Rolle, da sie durchgehend entspannt bleibt. Daher ist sie unabhängig von der Kopplung.

Die Kreisfrequenz der resultierenden Schwingung lautet:

$$\omega_{gl} = \omega_0$$

ii) 2. Fundamentalschwingung: gegenphasig



Durch Auslenkung beider Pendel um dieselbe Amplitude, jedoch in entgegengesetzte Richtung, erhält man eine gegenphasige Schwingung. Diese Schwingung ist abhängig von der Kopplung, da die Feder entweder gedehnt oder gestaucht wird. Hier ergibt sich die Kreisfrequenz zu:

$$\omega_{geg} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2}$$

Bei anderen Schwingungsformen entsteht eine Superposition aus diesen beiden Fundamentalschwingungen. Diese sollen hier allerdings nicht weiter betrachtet werden. Lediglich die Schwebung wird für Aufgabe 3.3 benötigt und soll dort erläutert werden.

Es werden bei jeder Kopplung Messungen mit zwei verschiedenen Koppellängen l durchgeführt und mit einer Messung ohne Kopplung (T_0) verglichen. Dabei erwarten wir, dass T_0 gleich T'_{gl} und T''_{gl} ist, da diese Fundamentalschwingung unabhängig von der Feder ist.

Um nun das Trägheitsmoment Θ und die Federkonstante D zu bestimmen, bestimmen wir zunächst Ω durch Umstellen von ω_{geg} :

$$\Omega = \sqrt{\frac{\omega_{geg}^2 - \omega_0^2}{2}}$$

ω_0^2 erhalten wir aus der Messung bei der 1. Fundamentalschwingung, da hier gilt $\omega_0^2 = \omega_{gl}^2$.

Durch Umstellen der oben angesprochenen Formeln erhält man nun:

$$\Theta = \frac{mgL_S}{\omega_0}$$
$$D = \frac{\Theta\Omega^2}{l^2}$$

Die Federkonstante soll nun noch über zwei weitere Methoden bestimmt werden.

i) statische Methode

Es werden verschiedene Gewichte der Massen m an die Feder gehängt und die Auslenkung x gemessen. Durch das Hook'sche Gesetz lässt sich D dann einfach bestimmen:

$$D = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x}$$

Dabei ist darauf zu achten, dass die Feder nicht durch zu große Gewichte ihre Streckgrenze erreicht, da sonst die Messung verfälscht wird.

ii) dynamische Methode

Die dynamische Methode zur Bestimmung von D stellt ein Federpendel dar. Es werden verschiedene

Massen m an die Feder gehängt und ausgelenkt. Für das schwingende System gilt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

$$\Rightarrow D = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$$

Es soll noch das theoretische Trägheitsmoment Θ_{ges} des Systems berechnet werden, um es mit dem eben bestimmten zu vergleichen. Das Trägheitsmoment setzt sich aus den drei Trägheitsmomenten der einzelnen Komponenten zusammen.

Das Trägheitsmoment $\Theta_{Scheibe}$ der Scheibe mit dem Radius r lautet

$$\Theta_{Scheibe} = \frac{1}{2} m_{Scheibe} r^2 + m_{Scheibe} (r + L_Z)^2$$

wobei L_Z den Abstand zwischen Zentrum und Drehachse angibt.

Für Trägheitsmoment der als punktförmig betrachteten Aufhängung der Feder im Abstand l von der Drehachse gilt:

$$\Theta_{Koppel} = m_{Koppel} l^2$$

Für das Trägheitsmoment Θ_{Stab} eines Stabes mit der Länge L^* und dem Abstand x zwischen seinem Schwerpunkt und Pendelachse ergibt sich:

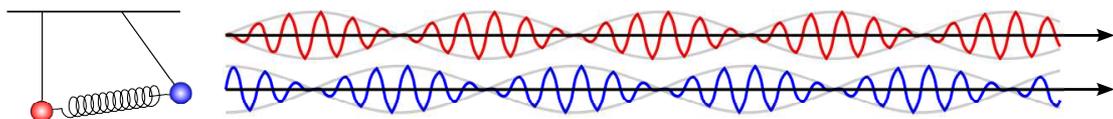
$$\Theta_{Stab} = \frac{1}{12} m_{Stab} (L^*)^2 + m_{Stab} x^2$$

Θ_{ges} erhält man nun über Summierung dieser drei Trägheitsmomente:

$$\Theta_{ges} = \Theta_{Scheibe} + \Theta_{Koppel} + \Theta_{Stab}$$

Aufgabe 3.3 - Schwebung

Eine Schwebung kann erzeugt werden, in dem man ein Pendel in der Ruhelage festhält und das andere gleichzeitig voll auslenkt. Nun lässt man beide Pendel los und das System beginnt zu schwingen. Diese Schwingung der beiden Pendel ist im folgenden Graph dargestellt:



Die Bewegungsgleichungen eines zur Schwebung angeregten System lauten:

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} t\right)$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_0 \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} t\right)$$

Daraus ergeben sich zwei Frequenzen. Zum einen die Schwebungsfrequenz ω_{mod} :

$$\omega_{mod} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2}$$

und zum anderen die Schwingungsfrequenz ω_{osz} der einzelnen Pendel:

$$\omega_{osz} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2}$$

Daraus lassen sich die gesuchten Schwingungsdauern berechnen:

$$T_{mod} = \frac{2\pi}{\omega_{mod}} = \frac{2 T_{gl} T_{geg}}{T_{gl} - T_{geg}}$$
$$T_{osz} = \frac{2\pi}{\omega_{osz}} = \frac{2 T_{gl} T_{geg}}{T_{gl} + T_{geg}}$$

T_{mod} und T_{osz} sollen experimentell bestimmt und mit den theoretischen Werten verglichen werden.

Quellenangabe

Demtröder, W.: Experimentalphysik 1

Eichler, Krohnfeld, Sahn: Das neue physikalische Grundpraktikum

Skizzen des physikalischen Pendels und des Reversionspendels:

Eichler, Krohnfeld, Sahn: Das neue physikalische Grundpraktikum

Skizzen der Fundamentalschwingungen und Schwebung:

https://de.wikipedia.org/wiki/Gekoppelte_Pendel, abgerufen am 20.11.2011

Physikalisches Anfängerpraktikum P1

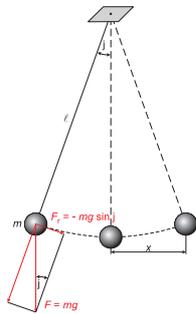
**Versuch:
P1-20,21
Pendel**

Schriftliche Vorbereitung von Marcel Krause (mrrrc@leech.it)
Gruppe: Di-11

Datum der Versuchsdurchführung:
22.11.11

Theoretische Grundlagen

Mathematisches und physikalisches Pendel



Man bezeichnet als mathematisches Pendel häufig eine vereinfachte Version eines physikalischen bzw. realen Pendels. Die vereinfachende Annahme besteht darin, dass die gesamte Masse des Pendels in dessen Schwerpunkt konzentriert sei. Als Beispiel eines mathematischen Pendels sei das Fadenpendel genannt, dessen Faden als Aufhängung masselos betrachtet werden soll.

Das physikalische Pendel berücksichtigt hingegen die Masseverteilung des Pendelkörpers, wodurch dieser ein gewisses Trägheitsmoment erhält. Dadurch werden die Bewegungsgleichungen des Pendels leicht verändert. Die Idealisierung des mathematischen Pendels trifft bei vielen realen Pendelkörpern nicht oder nur eingeschränkt zu.

Aufgabe 1: Reversionspendel

Wir werden in dieser Versuchsreihe ein physikalisches Pendel betrachten. Damit wird es uns möglich sein, die Fallbeschleunigung g zu bestimmen.

Aufgabe 1.1: Vorbereitung

Zunächst wird vorbereitend für den Versuch die reduzierte Pendellänge l_r eines zylindrischen, an einem Ende drehbar aufgehängten Stabs bestimmt. Dieses System kann als physikalisches Pendel betrachtet werden. Ein solches ist schematisch in nebenstehender Skizze aufgezeigt.

Als starrer Körper besitzt das am Aufhängepunkt A befestigte Pendel ein Trägheitsmoment Θ_A , welches sowohl Geometrie als auch Aufhängepunkt des Körpers berücksichtigt. Wir betrachten als Pendel einen dünnen Zylinder, welcher nach dem Satz von Steiner das Trägheitsmoment

$$\Theta_A = \frac{1}{3}mL^2$$

besitzt, sofern er an einem Ende drehbar aufgehängt ist.

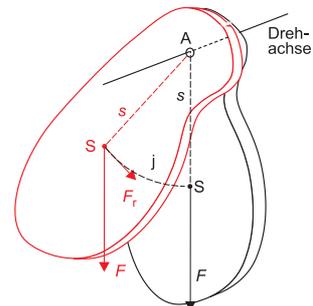
Lenkt man den Zylinder, dessen Schwerpunkt S sich im Abstand s vom Aufhängepunkt A befinden soll, um den Winkel φ aus der Ruhelage aus, so greift am Schwerpunkt bedingt durch die Schwerkraft eine rücktreibende Kraft $F_r = -mg \sin \varphi$ an, welche tangential zum vom Pendel beschriebenen Bogen steht. Dadurch wird ein Drehmoment mit dem Hebelarm s erzeugt, welches als rücktreibendes Drehmoment M_r mit

$$M_r = -sF_r = -mgs \cdot \sin \varphi \approx -mgs\varphi$$

bezeichnet wird. Dabei wurde die Kleinwinkelnäherung des Sinus genutzt.

Analog zur Newtonschen Bewegungsgleichung der Translation findet man für Rotationen, dass auf rotationsbeschleunigte Körper des Trägheitsmoments Θ_A ein Drehmoment M wirken muss mit

$$M = \Theta_A \ddot{\varphi}$$



Das Pendel nimmt dieses Drehmoment zur Beschleunigung des Körpers aus dem rücktreibenden Moment, daher gilt:

$$\begin{aligned} M &= M_r \\ \Leftrightarrow \Theta_A \cdot \ddot{\varphi} &= -mgs\varphi \\ \Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{mgs}{\Theta_A}\varphi &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist die Differentialgleichung des physikalischen Pendels. Als Lösungsansatz bieten sich Terme der Form $\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}$ mit $\ddot{\varphi} = -\varphi_0 \omega^2 e^{i\omega t}$ an. Setzt man diese in die DGL ein, so erhält man:

$$-\omega^2 + \frac{mgs}{\Theta_A} = 0$$

woraus $\omega = \sqrt{\frac{mgs}{\Theta_A}}$ folgt. Somit lässt sich die Differential- oder auch Schwingungsgleichung des physikalischen Pendels schreiben als:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$$

Da die Kreisfrequenz ω nun bekannt ist, lässt sich daraus leicht die Periodendauer T ermitteln:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_A}{mgs}}$$

Diese soll nun mit der Schwingungsdauer T_m eines mathematischen Pendels verglichen werden:

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}$$

Dabei führen wir die reduzierte Pendellänge l_r ein, also die Pendellänge, für die ein mathematisches Pendel dieselbe Periodendauer besitzt wie ein physikalisches mit Pendelkörperlänge L .

Der Schwerpunkt des Zylinders liegt bei $s = \frac{L}{2}$. Setzt man dies zusammen mit dem Trägheitsmoment des Körpers in die Periodendauer des physikalischen Pendels ein, so erhält man

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_A}{mgs}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg\frac{L}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{L}{g}}$$

Ein Vergleich dieser Periodendauer mit T_m lässt sofort erkennen, dass für die reduzierte Pendellänge gelten muss:

$$l_r = \frac{2}{3}L$$

Es soll nun noch gezeigt werden, dass Massenänderungen im Abstand l_r von der Drehachse keine Auswirkung auf die Schwingungsdauer haben. Dazu bringen wir an dieser Stelle eine Masse m_2 an, die das Trägheitsmoment $\Theta_2 = m_2 l_r^2 = m_2 \left(\frac{2}{3}L\right)^2$ besitzt und deren Schwerpunkt bei $s_2 = \frac{2}{3}L$ liege. Dann ergibt sich die Periodendauer T_{var} zu:

$$\begin{aligned} T_{var} &= 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_A + \Theta_2}{mgs + m_2 g s_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2 + m_2 \left(\frac{2}{3}L\right)^2}{mg\frac{L}{2} + m_2 g \frac{2}{3}L}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{m}{2} + \frac{2}{3}m_2\right) \frac{2}{3}L^2}{\left(\frac{m}{2} + \frac{2}{3}m_2\right) gL}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{L}{g}} \\ &= T \end{aligned}$$

Es wurde also rechnerisch gezeigt, dass eine zusätzliche Masse bei l_r keine Veränderung der Schwingungsdauer hervorruft. Experimentell wird erwartet, dass die Schwingungsdauer dann im Rahmen der Messgenauigkeit ebenfalls konstant bleibt, wenn wir eine zusätzliche Masse bei l_r anbringen.

Aufgabe 1.2: Bestimmung der Erdbeschleunigung

Wir betrachten nun ein Reversionspendel, also ein physikalisches Pendel, welches zwei unterschiedliche, zueinander parallele Drehachsen besitzt. Je nachdem, um welche Achse das Pendel schwingt, ergeben sich im Allgemeinen unterschiedliche Drehmomente, Schwerpunktabstände und demzufolge auch Schwingungsdauern.

Wir werden im Versuch das Reversionspendel abgleichen, das heißt wir suchen denjenigen Abstand h der beiden Pendelachsen, für den die Schwingungsdauern um beide Achsen genau gleich werden. Diesen Abstand nennt man dann die reduzierte Pendellänge l_r des abgeglichenen Reversionspendels.

Umstellen der oben genannten Gleichung für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels ergibt die Fallbeschleunigung g :

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l_r$$

Es ist von uns also die reduzierte Pendellänge des Reversionspendels zu bestimmen, wenn es um beide Achsen mit der Schwingungsdauer T schwingt. Dabei muss darauf geachtet werden, dass man sich auf kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage beschränkt, denn sonst gilt die Kleinwinkelnäherung nicht mehr und weitere Fehlerquellen wie stärkere Luftreibung verfälschen zusätzlich die Messergebnisse.

Aufgabe 2: Fadenpendel

In dieser Versuchsreihe betrachten wir nun ein Fadenpendel, welches in einer idealisierten Form als mathematisches Pendel betrachtet werden kann.

Aufgabe 2.1: Bestimmung der Erdbeschleunigung

Es wird von uns erneut die Erdbeschleunigung bestimmt, dieses Mal allerdings mit einem Fadenpendel anstatt mit einem Reversionspendel. Wir betrachten das Fadenpendel idealisiert als mathematisches Pendel insofern, als dass wir auf die Berechnung einer reduzierten Pendellänge verzichten können, da der Draht des Pendels mit Länge l als masselos angenommen wird. Das Trägheitsmoment der Kugel, die hier nicht als punktförmige Masse angenähert werden soll, ist allerdings nicht vernachlässigbar.

Eine homogene Vollkugel mit Radius R und Masse m , deren Rotationsachse im Mittelpunkt liege, besitzt das Trägheitsmoment $\Theta = \frac{2}{5}mR^2$. Die Rotationsachse des Pendels ist $R + l$ vom Mittelpunkt der Kugel entfernt, sodass sich mit dem Satz von Steiner als Trägheitsmoment Θ_K der Kugel ergibt:

$$\Theta_K = \frac{2}{5}mR^2 + m(R + l)^2$$

Wie oben erwähnt wird die Masse des Drahts vernachlässigt, sodass sich der Abstand s des Schwerpunkts von der Pendelachse ergibt zu:

$$s = R + l$$

Nun kann die Periodendauer des Pendels bestimmt werden:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_K}{mgs}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5}mR^2 + m(R+l)^2}{mg(R+l)}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5}R^2 + (R+l)^2}{g(R+l)}}$$

Zur Bestimmung der Fallbeschleunigung kann man obige Formel nach g auflösen:

$$g = \frac{4\pi^2 \frac{2}{5}R^2 + (R+l)^2}{T^2 (R+l)}$$

Wir messen also bei bekanntem Kugelradius und bei bekannter Drahtlänge die Periodendauer der Schwingung und erhalten so die Erdbeschleunigung.

Aufgabe 2.2: Abhängigkeit von Periodendauer und Amplitude

Es soll ein weiterer Versuch am Fadenpendel durchgeführt werden. Dabei bestimmen wir die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Schwingungweite. Es ist bekannt, dass bei größeren Auslenkungen die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ ihre Gültigkeit verliert. Deshalb muss man nun die ursprüngliche Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgs}{\Theta} \sin \varphi = 0$$

betrachten. Die Lösung dieser elliptischen Differentialgleichung ist nicht elementar berechenbar, allerdings lässt sie sich in einer Reihendarstellung angeben. Dadurch erhält man die Periodendauer ebenfalls in einer Reihendarstellung der Form

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgs}} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right)$$

Setzt man das Trägheitsmoment und den Schwerpunkt ein, so erhält man schließlich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5}R^2 + (R+l)^2}{g(R+l)}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right)$$

Mit obiger Formel können wir die theoretischen Periodendauern des Fadenpendels in Abhängigkeit der Anfangsauslenkungen φ_0 bestimmen. Gleichzeitig werden wir bei diesen Amplituden die Periodendauer experimentell bestimmen und anschließend vergleichen.

Aufgabe 3: Kopplung zweier Pendel

Im Folgenden betrachten wir ein System zweier Pendel, die durch eine Feder miteinander verbunden sind. Zwei auf diese Art gekoppelte Pendel sind nicht nur jeweils von der eigenen, sondern auch von der Amplitude des anderen Pendels abhängig.

Aufgabe 3.1: Vorbereitung

Vorbereitend auf den nächsten Versuch werden wir zunächst bei zwei gleichartigen Pendeln die gleichen Schwingungsdauern T_0 einstellen. Dazu können wir den Abstand L_Z zwischen dem Drehpunkt des Pendels und dem Zentrum der Pendelscheibe für eines der beiden Pendel festlegen und diesen Abstand beim

zweiten Pendel so variieren, dass beiden Pendel synchron schwingen. Es ist dabei zu beachten, dass L_Z nicht mit dem Schwerpunktabstand s zu verwechseln ist.

Im Folgenden soll eine Formel dieses Schwerpunktabstands bestimmt werden, da sie in der Auswertung benötigt wird. Gegeben sind die Massen der Pendelscheibe $m_{scheibe}$, des Stabs m_{stab} und der Koppfederbefestigung m_{koppel} mit der Gesamtlänge des Stabs L und den jeweiligen Abständen von der Drehachse L_Z und l . Die Gesamtmasse sei gegeben durch $m_{ges} = m_{scheibe} + m_{stab} + m_{koppel}$. Der Schwerpunkt des gesamten Pendels liegt dann im Abstand L_S von der Drehachse:

$$L_S = \frac{m_{scheibe} \cdot L_Z + m_{koppel} \cdot l + m_{stab} \cdot \frac{L}{2}}{m_{ges}}$$

Aufgabe 3.2: Fundamentalschwingungen

Die synchronisierten Pendel werden nun mittels einer Schraubenfeder mit der Federkonstanten D gekoppelt. Die Feder wird dabei bei gleichen Abständen l von den Drehpunkten beider Pendel befestigt. Das auf jedes Pendel wirkende Moment setzt sich aus dem durch die Schwerkraft erzeugten Drehmoment sowie dem rückstellenden Moment der Feder zusammen, wobei letzteres von der Amplitude beider Pendel abhängt. Es ergeben sich die Momente:

$$\begin{aligned} M_1 &= -mgL_S \cdot \varphi_1 + Dl^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \\ M_2 &= -mgL_S \cdot \varphi_1 - Dl^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

Dabei sei L_S der Abstand zwischen Drehpunkt und Schwerpunkt eines jeden Pendels. Aus den Newtonschen Gleichungen, angewandt auf Torsionsbewegungen, folgen daraus mit den Trägheitsmomenten Θ der Pendel (die, da sie gleichartig sind, ebenfalls gleich sind) die gekoppelten Differentialgleichungen

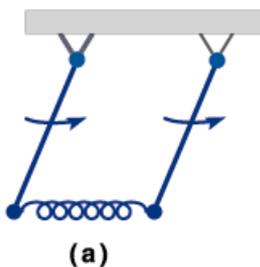
$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 &= -\Omega^2 (\varphi_1 - \varphi_2) \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 &= -\Omega^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\omega_0^2 = \frac{mgL_S}{\Theta}, \quad \Omega^2 = \frac{Dl^2}{\Theta}$$

Mit dem bekannten Lösungsansatz erhält man für die resultierende Kreisfrequenz ω der Schwingung zwei verschiedene Fundamentallösungen, die im Folgenden betrachtet werden sollen.

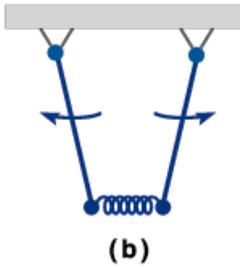
(a) Fundamentalschwingung 1: Gleichsinnige Schwingung



Diese Schwingungsform entsteht, wenn man beide Pendel zu Beginn um die gleiche Amplitude und Richtung auslenkt. Dabei bleibt die Feder stets entspannt, diese Fundamentalschwingung ist also kopplungsunabhängig. Als Kreisfrequenz der resultierenden Schwingung ergibt sich:

$$\omega_a = \omega_0$$

(b) Fundamentalschwingung 2: Gegensinnige Schwingung

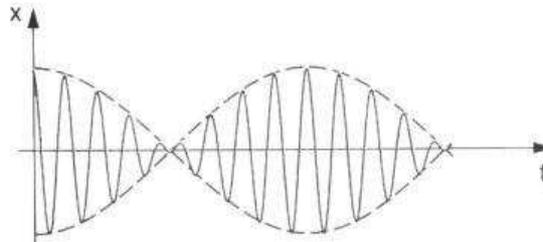


Lenkt man beide Pendel um die gleiche Amplitude, aber in unterschiedliche Richtungen aus, so entstehen gegensinnige Schwingungen. Diese Art der Schwingung ist kopplungsabhängig, denn die Feder wird stets gedehnt oder gestaucht. Für die Kreisfrequenz gilt hier:

$$\omega_b = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2}$$

(c) Superposition: Schwebung

Alle anderen möglichen Schwingungsformen des gekoppelten Pendels stellen eine Superposition der obigen Fundamentalschwingungen dar. Lenkt man beispielsweise ein Pendel zu Beginn aus und hält das andere dabei in der Gleichgewichtslage fest, so ergibt sich das typische Bild einer Schwebung, wie es in unten stehender Skizze dargestellt ist.



Wir werden experimentell in dieser Teilaufgabe Fall (a) und (b) betrachten. Dabei messen wir jeweils die Schwingungsdauern dieser beiden Fundamentalschwingungen bei zwei verschiedenen Koppellängen l , wobei darauf geachtet werden muss, dass die Kopplung nicht zu fest wirken soll: $\Delta T^2 \ll T^2$.

Es ist dabei zu erwarten, dass die Schwingungsdauer T_0 eines einzelnen Pendels gleich der beiden Schwingungsdauern T'_{gl} und T''_{gl} bei unterschiedlicher Koppellänge sein müsste, denn die erste Fundamentalschwingung ist kopplungsunabhängig, demzufolge müssten die Periodendauern dieser Schwingung konstant bleiben.

Sind die Schwingungsdauern gemessen, so kann man mittels der Relation $T = \frac{2\pi}{\omega_{a,b}}$ nach der Kreisfrequenz $\omega_{a,b}$ umstellen und diese für jede Kopplung und jede Mode berechnen. Nach obiger Überlegung lässt sich mit der Kreisfrequenz für die gegensinnige Schwingung daraus zunächst Ω berechnen:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\omega_{geg}^2 - \omega_0^2}{2}}$$

wobei ω_0^2 mit $\omega_0^2 = \omega_{gl}^2$ gemessen wird.

Es lässt sich durch Umstellen von obiger Formel das Trägheitsmoment Θ bestimmen:

$$\Theta = \frac{mgL_S}{\omega_0^2}$$

Anschließend ergibt sich die Federkonstante durch die ebenfalls schon angesprochene Formel:

$$D = \frac{\Theta\Omega^2}{l^2}$$

Weitere Bestimmungen von D

Die Federkonstante soll anschließend über zwei weitere Experimente bestimmt werden.

(a) Statische Methode

An die Feder werden verschiedene Gewichte der Massen m gehängt und die Auslenkung x der Feder bestimmt. Dabei ist zu beachten, dass man die elastische Streckgrenze der Feder nicht überschreitet, da sonst plastische Verformungen zurückbleiben. Nach dem Hookeschen Gesetz gilt:

$$D = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x}$$

So können wir D direkt bestimmen.

(b) Dynamische Methode

Es werden wieder Gewichte mit Massen m an die Feder gehängt, die dann jedoch zusätzlich aus ihrer Ruhelage ausgelenkt wird. Man erhält ein schwingendes System, das Federpendel. Für die Periodendauer T eines solchen Federpendels gilt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

woraus nach Umstellen sofort folgt:

$$D = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$$

Theoretisches Trägheitsmoment

Es soll abschließend das Trägheitsmoment der Anordnung theoretisch berechnet und mit dem experimentell bestimmten verglichen werden. Da das Trägheitsmoment vom genauen Versuchsaufbau abhängt, sollen hier nur die Grundzüge der Berechnung angesprochen werden. Die genaue Berechnung erfolgt in der Auswertung.

Das Trägheitsmoment Θ_{ges} des gesamten Pendels setzt sich aus mehreren Trägheitsmomenten zusammen, die alle addiert werden müssen. Die einzelnen Trägheitsmomente lassen sich mithilfe des Satzes von Steiner berechnen.

Für das Trägheitsmoment $\Theta_{scheibe}$ der Scheibe mit Radius r , deren Zentrum sich im Abstand L_Z von der Drehachse befindet, gilt:

$$\Theta_{scheibe} = \frac{1}{2}m_{scheibe} \cdot r^2 + m_{scheibe} (r + L_Z)^2$$

Die Aufhängung der Feder im Abstand l von der Achse wird als punktförmig betrachtet und besitzt das Trägheitsmoment

$$\Theta_{koppel} = m_{koppel} \cdot l^2$$

Ein Stab der Länge L^* , dessen Schwerpunkt sich im Abstand x von der Pendelachse befindet, besitzt das Trägheitsmoment

$$\Theta_{stab} = \frac{1}{12}m_{stab} \cdot (L^*)^2 + m_{stab} \cdot x^2$$

Aufgabe 3.3: Schwebungen

Abschließend sollen noch Experimente am gekoppelten Pendel durchgeführt werden, wenn es zu Schwebungen angeregt wird. Diese Superposition der beiden Fundamentalschwingungen wurde bereits zuvor theoretisch angerissen, es soll nun weiter darauf eingegangen werden. Im Fall einer Schwebung ergeben sich als Lösungen der Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \varphi_0 \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2}t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2}t\right) \\ \varphi_2(t) &= -\varphi_0 \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2}t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2}t\right)\end{aligned}$$

Es ist leicht ersichtlich, dass hierdurch zwei Schwingungszustände charakterisiert werden, nämlich die Schwebung des Systems und die Schwingung der Pendel. Man findet die Kreisfrequenzen

$$\omega_{mod} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} \quad \omega_{osz} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2}$$

denn die Schwebungsfrequenz ω_{mod} liegt unterhalb der Schwingungsfrequenz ω_{osz} . Aus den Kreisfrequenzen lassen sich nun die Periodendauern bestimmen:

$$\begin{aligned}T_{osz} &= \frac{2\pi}{\omega_{osz}} = \frac{2T_{gl}T_{geg}}{T_{gl} + T_{geg}} \\ T_{mod} &= \frac{\pi}{\omega_{mod}} = \frac{T_{gl}T_{geg}}{T_{gl} - T_{geg}}\end{aligned}$$

Wir werden experimentell T_{osz} und T_{mod} bestimmen und mit den theoretisch errechneten Werten vergleichen.

Quellenverzeichnis

Demtröder, W.: Experimentalphysik 1

Meschede, D.: Gerthsen Physik

Skizzen des mathematischen und physikalischen Pendels:

Eichler, Krohnfeld, Sahm: Das neue physikalische Grundpraktikum

Graph der Schwebung:

http://www.pi1.uni-stuttgart.de/teaching/Vorlesungsversuche/Bilder/B411_1.jpg

Skizzen der Fundamentalschwingungen:

http://www.sprott.net/science/physik/taschenbuch/daten/bild_4/09_0250.gif

Physikalisches Anfängerpraktikum P1

**Versuch:
P1-20,21
Pendel**

Auswertung inklusive
ausführlicher Fehlerrechnung

von

Georg Fleig (georg@leech.it)
Marcel Krause (mrrrc@leech.it)

Gruppe: Di-11

Datum der Versuchsdurchführung:
22.11.11

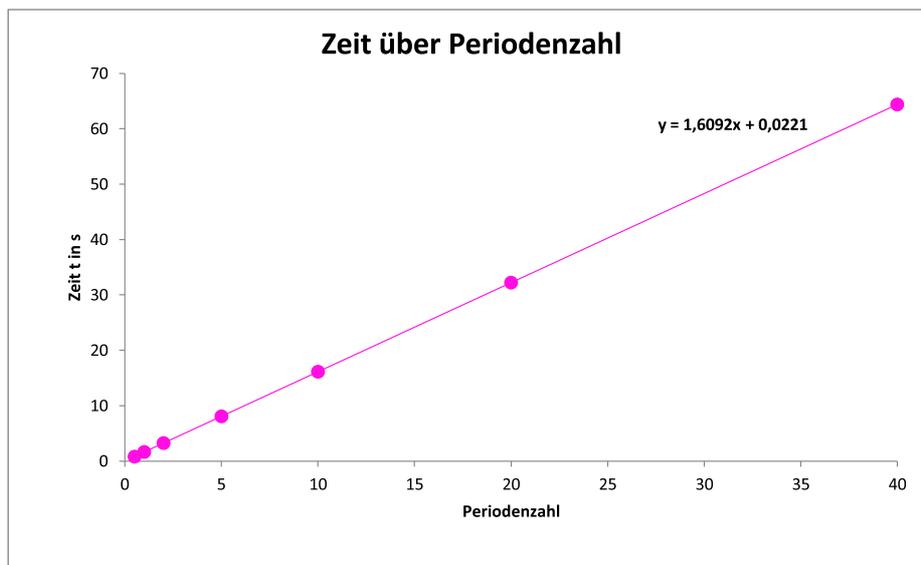
Aufgabe 1: Reversionspendel

Im ersten Versuchsteil betrachteten wir das Reversionspendel, mit dessen Hilfe wir unter anderem die Erdbeschleunigung messen konnten. Das Pendel bestand aus einem Eisenstab mit zwei Schneiden, deren Abstand variiert werden konnte. Mittels einer Lichtschranke konnte die Zeit bestimmt werden, die das Pendel für eine vorher bestimmte Anzahl an Schwingungen benötigt.

Eichung

Zunächst war es notwendig, die Lichtschranke zu eichen, denn durch leichte Abweichungen von der Lichtschranke aus der horizontalen Lage und durch eine nicht ganz mittige Ausrichtung ergibt sich ein Offset, welchen wir berücksichtigen müssen. Wir haben am Zeitmessgerät zunächst eingestellt, wie viele Schwingungen wir messen wollen. Dann haben wir das Pendel in einem kleinen Winkel aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt und die Zeit bestimmt, die es für diese Schwingungszahl benötigt. Es war dabei darauf zu achten, dass die Auslenkung des Pendels nicht zu gering ausfiel, da die Lichtschranke sonst eventuell nicht mehr registrieren kann, ob das Pendel durchgeschwungen ist. Nachfolgend sind unsere Messergebnisse mit dazugehörigem Schaubild dargestellt.

Periodenzahl	Zeit t in s
0,5	0,799
1	1,636
2	3,246
5	8,071
10	16,127
20	32,218
40	64,382



Laut der Formel der Regressionsgeraden ergibt sich ein y-Achsenabschnitt von $t = 0,0221s$. Diesen Offset haben wir in allen nachfolgenden Messungen der Aufgabe 1 von unseren Messwerten abgezogen.

Aufgabe 1.1: Vorbereitung

Vorbereitend wurde von uns zunächst die Pendellänge gemessen. Es ergab sich eine Länge von $L = 95,20\text{cm}$. Wie in der Vorbereitung gezeigt, ergibt sich die reduzierte Pendellänge l_r dann mittels

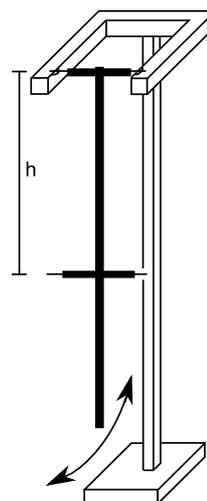
$$L_r = \frac{2}{3}L = 63,47\text{cm}$$

Dadurch wissen wir nun, wo wir die reduzierte Pendellänge ungefähr erwarten können. Deshalb starten wir im nachfolgenden Versuch unsere Messreihe bei einem Schneidenabstand von 60cm und erhöhen ihn dann, bis wir die reduzierte Pendellänge treffen.

Aufgabe 1.2: Bestimmung der Erdbeschleunigung

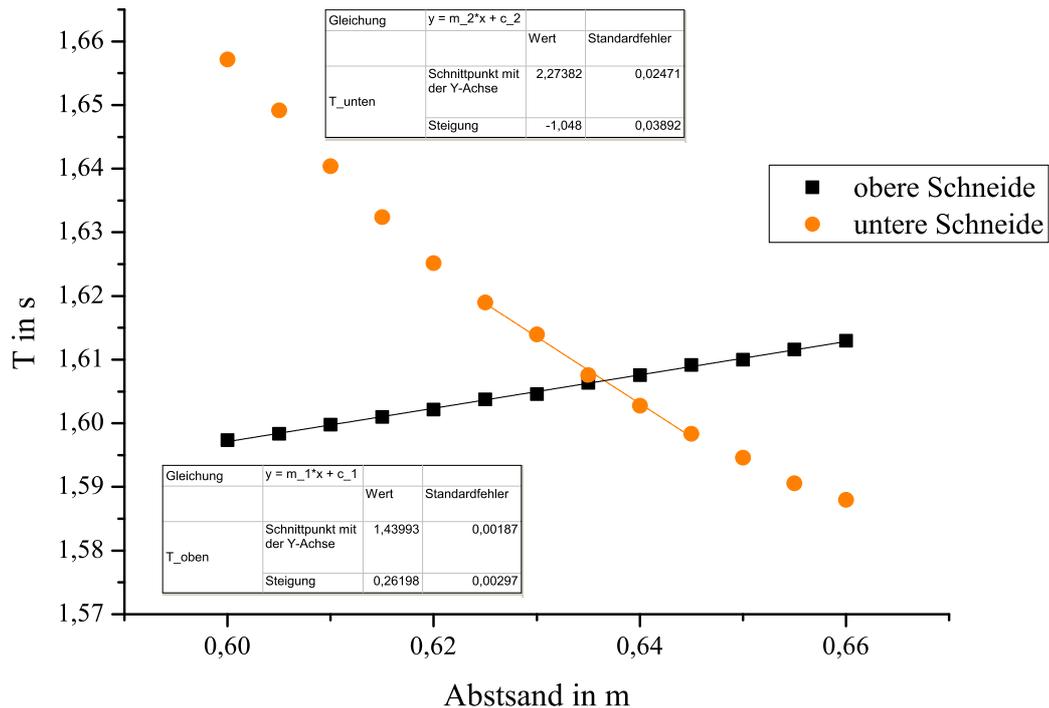
Mit Hilfe eines Reversionspendels (entsprechend der Abbildung rechts) sollte die Erdbeschleunigung g bestimmt werden. Dazu wurde zunächst der Abstand h zwischen den beiden Schneiden variiert und jeweils die Periodendauer bei Schwingungen um die obere sowie um die untere Schneide bestimmt. Wir suchten den Abstand h , bei welchem die Periodendauer beider Schneiden gleich war. Dieser Abstand h entspricht dann genau l_r .

Im Folgenden sind unsere Messwerte dargestellt. Die Periodendauern wurden bereits mit dem Offset-Wert von $\Delta_{T_0} = 0,022\text{s}$ korrigiert.



Abstand in m	Obere Schneide	Untere Schneide
	Periodendauer T in s	
0,600	1,597	1,657
0,605	1,598	1,649
0,610	1,600	1,640
0,615	1,601	1,632
0,620	1,602	1,625
0,625	1,604	1,619
0,630	1,605	1,614
0,635	1,606	1,608
0,640	1,608	1,603
0,645	1,609	1,598
0,650	1,610	1,595
0,655	1,612	1,591
0,660	1,613	1,588

Durch Auftragen der Periodendauern über den Abstand h erhält man zwei Kurven, die sich in einem Punkt schneiden. Über diesen Schnittpunkt erhalten wir l_r und T_{l_r} .



l_r berechnet sich nun folgendermaßen aus dem Schnittpunkt der Geradengleichungen der linearen Regressionskurven:

$$l_r = \frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}$$

Statistischer Fehler

Der statistische Fehler σ_{l_r} wird mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet. Er setzt sich aus den Steigungsfehlern und den Fehlern des Y-Achsenabschnitts zusammen. Aus Origin entnehmen wir direkt: $\sigma_{m_1} = 0,0030$; $\sigma_{m_2} = 0,0389$; $\sigma_{c_1} = 0,0019$; $\sigma_{c_2} = 0,0247$.

Damit lässt sich nun σ_{l_r} bestimmen:

$$\begin{aligned} \sigma_{l_r} &= \sqrt{\left(\frac{\partial l_r}{\partial c_1} \sigma_{c_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial l_r}{\partial c_2} \sigma_{c_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial l_r}{\partial m_1} \sigma_{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial l_r}{\partial m_2} \sigma_{m_2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{|m_1 - m_2|} \sqrt{(-\sigma_{c_1})^2 + (\sigma_{c_2})^2 + \left(-\frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2} \sigma_{m_1}\right)^2 + \left(-\frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2} \sigma_{m_2}\right)^2} \\ &= 0,0270m \end{aligned}$$

Systematischer Fehler

Als systematischen Fehler nehmen wir den Fehler der Skalierung des Stabes an, der mit $\Delta_s = \pm 0,2mm$

angegeben ist.

Berechnung von l_r

Nach obiger Formel ergibt sich l_r zu:

$$\begin{aligned} l_r &= \frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2} = \frac{2,274 - 1,440}{0,2610 + 1,048} \\ &= (0,6371 \pm 0,0270 \pm 0,0002)m \end{aligned}$$

Verglichen mit dem theoretischen Wert ($l_r = 0,6347$) haben wir eine relative Abweichung von 0,38%. Dies ist ein sehr genauer Messwert, zusätzlich liegt der theoretische Wert in unserem angegebenen Fehlerbereich.

Um g zu bestimmen wird außerdem noch T_{l_r} benötigt, das ist die Periodendauer bei l_r , die bei Schwingungen um beide Schneiden gleich groß ist. Löst man eine der beiden Geradengleichungen nach l_r auf und setzt sie in die andere ein, so erhält man:

$$T_{l_r} = \frac{c_2 m_1 - c_1 m_2}{m_1 - m_2}$$

Statistischer Fehler

Der statistische Fehler $\sigma_{T_{l_r}}$ ergibt sich wieder mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung und den Fehlern der Steigungen und y-Achsenabschnitte:

$$\begin{aligned} \sigma_{T_{l_r}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial T_{l_r}}{\partial c_1} \sigma_{c_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial T_{l_r}}{\partial c_2} \sigma_{c_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial T_{l_r}}{\partial m_1} \sigma_{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial T_{l_r}}{\partial m_2} \sigma_{m_2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{|m_1 - m_2|} \sqrt{(-m_2 \sigma_{c_1})^2 + (m_1 \sigma_{c_2})^2 + \left(\frac{(c_1 - c_2)m_2}{(m_1 - m_2)} \sigma_{m_1}\right)^2 + \left(\frac{(c_2 - c_1)m_1}{(m_1 - m_2)} \sigma_{m_2}\right)^2} \\ &= 0,0073s \end{aligned}$$

Systematischer Fehler

Als Systematischen Fehler haben wir hier den relativen Eichfehler des Zeitmessgeräts, der mit $\Delta_t = \pm 0,2\%$ angegeben ist. Damit ergibt sich:

$$\Delta_{T_{l_r}} = 0,002 \cdot 1,606s = 0,003s$$

Berechnung von T_{l_r}

Für T_{l_r} erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned} T_{l_r} &= \frac{c_2 m_1 - c_1 m_2}{m_1 - m_2} = \frac{2,274 \cdot 0,2610 + 1,440 \cdot 1,048}{0,2610 + 1,048} \\ &= (1,606 \pm 0,007 \pm 0,003)s \end{aligned}$$

Hier zeigt ein Vergleich mit dem theoretischen Wert ($T_{l_r} = 1,598s$ mit $g = 9,807\frac{m}{s^2}$) eine relative Abweichung von -0,50%. Auch hier liegt der theoretische Wert im von uns angegebenen Fehlerbereich.

Aus diesen gemessenen Werten lässt sich nun nach der Formel aus der Vorbereitung die Erdbeschleunigung g bestimmen:

$$g = \frac{4\pi^2}{T_{l_r}^2} l_r$$

Statistischer Fehler

T_{l_r} sowie l_r sind wie eben gezeigt mit einem statistischen Fehler behaftet. Daher ergibt sich für σ_g nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned} \sigma_g &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T_{l_r}} \sigma_{T_{l_r}}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l_r} \sigma_{l_r}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{8\pi^2}{T_{l_r}^3} l_r \sigma_{T_{l_r}}\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2}{T_{l_r}^2} \sigma_{l_r}\right)^2} \\ &= 0,4219 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Systematischer Fehler

T_{l_r} sowie l_r sind außerdem mit einem systematischen Fehler behaftet. Mit dem arithmetischen Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta_g &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T_{l_r}} \Delta_{T_{l_r}}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l_r} \Delta_{l_r}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{8\pi^2}{T_{l_r}^3} l_r \Delta_{T_{l_r}}\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2}{T_{l_r}^2} \Delta_{l_r}\right)^2} \\ &= 0,0366 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Berechnung von g

Nach obiger Formel ergibt sich nun für g :

$$\begin{aligned} g &= \frac{4\pi^2}{T_{l_r}^2} l_r = \frac{4\pi^2}{(1,606s)^2} \cdot 0,6371m \\ &= (9,752 \pm 0,422 \pm 0,037) \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Verglichen mit dem Literaturwert ($g = 9,807\frac{m}{s^2}$) haben wir lediglich eine relative Abweichung von -0,56%. Unter Berücksichtigung der angegebenen Fehler liegt der Literaturwert in unserem gemessenen Bereich.

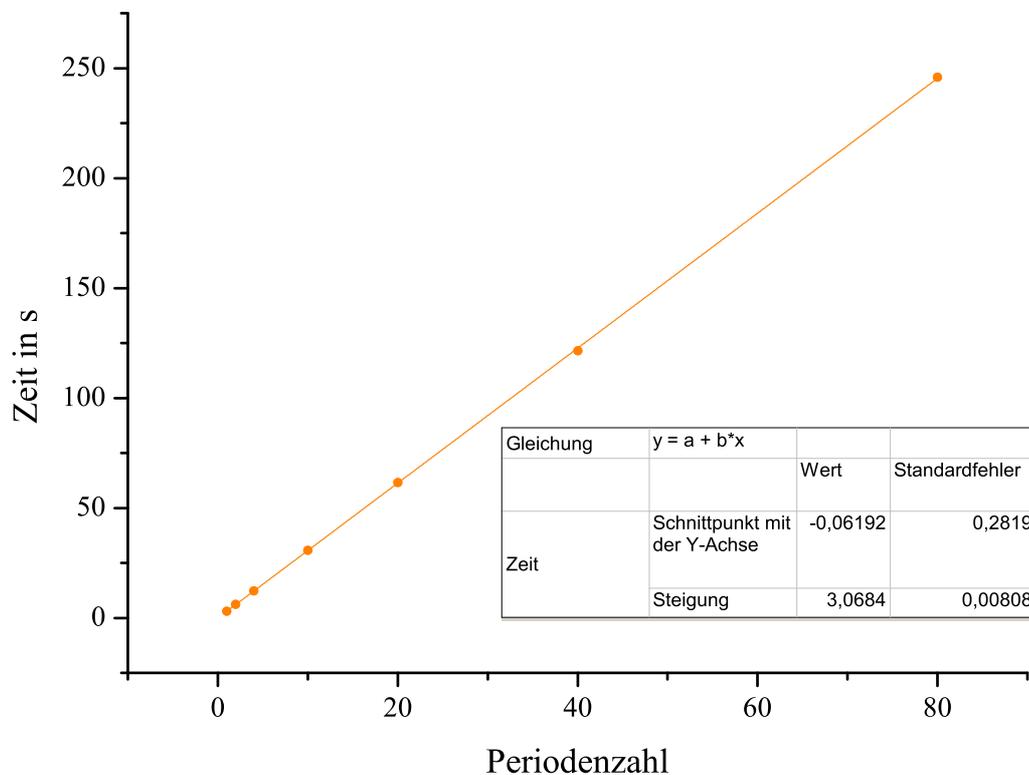
Aufgabe 2: Fadenpendel

In diesem Versuchsblock wird nun ein Fadenpendel betrachtet, welches sich in erster Näherung als mathematisches Pendel behandeln lässt. Da die Ausmaße der verwendeten Kugel diese Näherung allerdings übersteigen, behandeln wir diese so, als wäre es ein physikalisches Pendel.

Eichung

Wie das Reversionspendel zuvor muss auch beim Fadenpendel zunächst die Zeitmessenrichtung geeicht werden. Wir gehen dabei analog zur Eichung in Aufgabe 1 vor und messen die Zeiten, die das Pendel für verschieden gewählte Perioden benötigt. Nachfolgend sind die Messwerte und der zugehörige Graph abgebildet.

Periodenzahl	Zeit t in s
1	3,099
2	6,173
4	12,321
10	30,766
20	61,510
40	121,535
80	245,902



Aus der Regressionsgeraden lässt sich hier ein Offset von $t = -0,0619s$ ablesen. Wir werden also für alle nachfolgenden Messungen in Aufgabe 2 diesen Offset von unseren Messwerten abziehen, das heißt, wir addieren den Betrag dieses Offsets auf alle gemessenen Werte.

Aufgabe 2.1: Bestimmung der Erdbeschleunigung

Nun sollte mit dem Fadenpendel ebenfalls die Erdbeschleunigung g bestimmt werden.

Wie in der Vorbereitung hergeleitet, lässt sich aus den gemessenen Daten g folgendermaßen berechnen:

$$g = \frac{4\pi^2 \frac{2}{5}R^2 + l^2}{T^2 l}$$

Für den Kugelradius R haben wir $R = (0,0280 \pm 0,002)m$ angenommen. Der relativ große Fehler von $0,002m$ rührt daher, dass die Kugel einige Dellen und Unebenheiten hatte. Die Pendellänge l war am Versuchstisch mit $l = (2,360 \pm 0,003)m$ angegeben. Die Periodendauer $T = 3,068s$ erhalten wir aus der Steigung der Regressionsgeraden aus der zuvor durchgeführten Eichung. Damit sind alle benötigten Größen gegeben um g zu berechnen.

Statistischer Fehler

Nur T ist mit einem statistischen Fehler behaftet. Da T der Steigung der Regressionsgeraden aus der Eichung entspricht, erhält man den statistischen Fehler σ_T aus dem Steigungsfehler der Geraden. Dieser wird direkt von Origin als $\sigma_T = 0,0081s$ angegeben. Für σ_g ergibt sich mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned} \sigma_g &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T} \sigma_T\right)^2} = \left| -\frac{8\pi^2 \frac{2}{5}R^2 + l^2}{T^3 l} \sigma_T \right| \\ &= 0,022 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Systematischer Fehler

Hier sind die Größen R , T und l mit einem systematischen Fehler behaftet. $\Delta_T = 0,0061s$ erhalten wir wieder aus der Messungsgenauigkeit des Zeitmessers von $\pm 0,2\%$. Die übrigen Fehler sind bereits oben angegeben. Mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung erhält man:

$$\begin{aligned} \Delta_g &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial R} \Delta_R\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} \Delta_T\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l} \Delta_l\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{16\pi^2 R}{5lT^2} \Delta_R\right)^2 + \left(-\frac{8\pi^2 \frac{2}{5}R^2 + l^2}{T^3 l} \Delta_T\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2(5l^2 - 2R^2)}{5l^2T^2} \Delta_l\right)^2} \\ &= 0,0413 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Berechnung von g

Schließlich können wir g mit oben angegebener Formel berechnen:

$$\begin{aligned} g &= \frac{4\pi^2 \frac{2}{5}R^2 + l^2}{T^2 l} = \frac{4\pi^2}{(3,068s)^2} \frac{\frac{2}{5}(0,0280m)^2 + (2,360m)^2}{2,360m} \\ &= (9,899 \pm 0,022 \pm 0,043) \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Auch dieses Mal ist die relative Abweichung zum Literaturwert ($g = 9,807 \frac{m}{s^2}$) mit 0,94% sehr gering, jedoch liegt der Literaturwert nicht in dem von uns berechneten Fehlerbereich. Eventuell hätten wir den Fehler des Kugelradius größer annehmen sollen.

Aufgabe 2.2: Abhängigkeit von Periodendauer und Amplitude

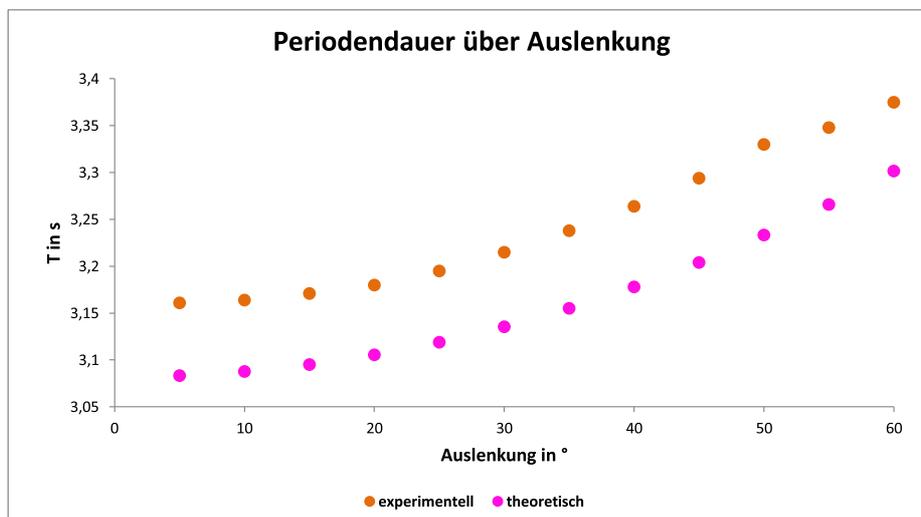
Als letztes Experiment am Fadenpendel haben wir verifiziert, dass die Periodendauer nur für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage konstant ist. Dazu haben wir, beginnend bei der größten Auslenkung, die Periodendauer in Abhängigkeit von der Auslenkung gemessen. Anschließend wurden diese experimentell bestimmten Periodendauern mit den theoretischen Periodendauern verglichen, die sich ergeben, wenn man für jede Auslenkung die Formel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{3}R^2 + (R+l)^2}{g(R+l)}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right)$$

auswertet. Wir haben die Reihe dabei bis zur vierten Potenz des Sinus ausgeführt. Zur Berechnung haben wir den angegebenen Wert der Länge des Fadens inklusive des Kugelradius $l + R = 2,36m$ verwendet, sowie die Erdbeschleunigung zu $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$. Dadurch ergaben sich folgende Werte:

Auslenkung in °	T _{exp} in s	T _{theor} in s	ΔT in s
60	3,3749	3,302	0,073
55	3,3479	3,266	0,082
50	3,3299	3,233	0,097
45	3,2939	3,204	0,090
40	3,2639	3,178	0,086
35	3,2379	3,155	0,083
30	3,2149	3,135	0,079
25	3,1949	3,119	0,076
20	3,1799	3,105	0,074
15	3,1709	3,095	0,076
10	3,1639	3,088	0,076
5	3,1609	3,083	0,078

Diese Werte wurden von uns nun noch in ein Schaubild eingetragen.



Es ist schön zu erkennen, dass sich zwar eine annähernd konstante Abweichung der experimentellen und theoretischen Werte ergab, dass der Verlauf der gemessenen Periodendauern aber dem Verlauf der theoretisch bestimmten entspricht. Des Weiteren ist erkennbar, dass die Periodendauern nur für sehr kleine Auslenkungen annähernd konstant sind.

Als Fehlerquelle lässt sich hier vor allem die ungenaue Einstellung der Anfangsauslenkung anbringen, denn der Abstand zwischen dem Pendel und der Winkelskala an der Wand ist recht groß, sodass es hier zu großen Parallaxenfehlern gekommen ist.

Aufgabe 3: Kopplung zweier Pendel

Die folgenden Versuche führten wir an zwei Pendeln durch, die im späteren Verlauf durch eine Feder gekoppelt wurden.

Aufgabe 3.1: Vorbereitung

Wir haben die beiden Pendel zunächst synchronisiert. Dabei haben wir beim einen Pendel den Abstand L_Z der Kreisscheibe zum Drehpunkt konstant gehalten und beim anderen Pendel diesen Abstand leicht verändert. Nach jeder Variation wurde von uns die Periodendauern beider Pendel bestimmt. Bei einem Abstand von

$$L_Z = 0,911m$$

ergaben sich experimentell für beide Pendel dieselbe Periodendauer T_0 mit

$$T_0 = 1,850s$$

Aufgabe 3.2: Fundamentalschwingungen

Es wurden von uns nun beide Pendel mittels einer Feder verbunden, sodass ein gekoppeltes System vorlag. Dabei haben wir zunächst nur die in den Vorbereitungen angesprochenen Fundamentalschwingungen betrachtet, eine Schwebung wurde während allen Messungen weitestgehend verhindert. In Abhängigkeit vom Abstand l der Feder zum Drehpunkt, also von der Koppellänge, wurden von uns nun die Periodendauern der beiden Fundamentalschwingungen in jeweils drei Einzelmessungen bestimmt. Aus diesen wurde dann der Mittelwert gebildet. Nachfolgend eine Tabelle mit unseren Messwerten und den daraus gebildeten Mittelwerten.

l_2 in cm	20	
Messung	T_{gl}' in s	T_{geg}' in s
1	1,846	1,751
2	1,842	1,727
3	1,850	1,724
Mittelwert	1,846	1,734

l_3 in cm	25	
Messung	T_{gl}'' in s	T_{geg}'' in s
1	1,828	1,668
2	1,830	1,674
3	1,834	1,686
Mittelwert	1,831	1,676

Es wurde bei den gewählten Koppellängen darauf geachtet, dass die Kopplung nicht zu fest wirken sollte. Es lässt sich erkennen, dass T_0 , T_{gl}' und T_{gl}'' für die gleichsinnige Schwingung im Rahmen der Messgenauigkeit konstant blieben, wohingegen bei der gegensinnigen Schwingung der Trend $T_0 > T_{geg}' > T_{geg}''$

zu erkennen war.

Dies deckt sich auch mit unseren Vermutungen aus der Vorbereitung, denn im gleichsinnigen Schwingungsfall bleibt die Feder theoretisch immer entspannt, die Pendel schwingen also so, als seien sie nicht durch die Feder gekoppelt. Daher ist dieser Schwingungstyp auch kopplungsunabhängig.

Im gegensinnigen Schwingungsfall hingegen wird die Feder permanent ge- und entspannt, sodass die Koppellänge hier einen deutlichen Einfluss auf die Periodendauer nimmt. Es ist dabei zu erkennen, dass bei steigender Koppellänge, und damit auch bei festerer Kopplung, die Periodendauer abnimmt.

Gründe für die leichte Abweichung der Periodendauern für die gleichsinnige Schwingung sind vor allem Messungenauigkeiten, denn zur Zeitmessung wurde eine Stoppuhr und Augenmaß benutzt, sodass hier relativ große Fehler auftreten. Des Weiteren ist es praktisch fast unmöglich, die Pendel so auszulenken, dass sie genau die Fundamentalschwingungen annehmen, ohne leichte Schwebungsanteile mit einzubauen. Außerdem ist es schwer, beide Pendel zum exakt gleichen Zeitpunkt loszulassen.

Da die so bestimmten Periodendauern fehlerbehaftet sind, werden auch die nachfolgend berechneten Werte aus denselben Gründen fehlerbehaftet sein.

Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmoments und der Federkonstanten

Es soll nun das Trägheitsmoment aus den von uns gemessenen Werten berechnet werden. Als Gesamtlänge L_{ges} des Stabs haben wir $L_{ges} = 106,8\text{cm}$ gemessen. Die Längendichte des Stabs betrug $\rho = 7,44\frac{\text{g}}{\text{cm}}$, dadurch ergibt sich die Stabmasse m_{stab} zu:

$$m_{stab} = \rho \cdot L_{ges} = 7,44\frac{\text{g}}{\text{cm}} \cdot 106,8\text{cm} = 794,592\text{g}$$

Die Pendelscheiben besaßen den Durchmesser $d = 10\text{cm}$. Als Literaturangabe findet sich mit $m = 1221\text{g}$ gerade die Masse der Pendelscheibe inklusive der Masse des 10 Zentimeter langen Stababschnitts, welcher durch die Pendelscheibe hindurchgeht. Für die wahre Masse der Pendelscheibe $m_{scheibe}$ muss die Stabmasse davon abgezogen werden:

$$m_{scheibe} = 1221\text{g} - \rho \cdot d = 1221\text{g} - 7,44\frac{\text{g}}{\text{cm}} \cdot 10\text{cm} = 1146,600\text{g}$$

Die Masse der Koppelbefestigung m_{koppel} ist als Literaturwert gegeben mit

$$m_{koppel} = 44\text{g}$$

Somit ergibt sich als Gesamtmasse m_{ges} des Pendels:

$$m_{ges} = m_{stab} + m_{scheibe} + m_{koppel} = 1985,192\text{g}$$

Da die Schwerkraft am Schwerpunkt des Pendels angreift, muss dieser zunächst gemäß der Formel

$$L_S = \frac{m_{scheibe} \cdot L_Z + m_{koppel} \cdot l + m_{stab} \cdot \frac{L}{2}}{m_{ges}}$$

für beide Koppellängen l berechnet werden. Anschließend haben wir aus den Mittelwerten der Periodendauern die Kreisfrequenzen der gleich- und gegensinnigen Schwingungen mittels

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

berechnet. Zusätzlich ist die Berechnung der Frequenz Ω notwendig, die bei gegensinniger Schwingung auftritt. Diese lässt sich dann über

$$\Omega = \sqrt{\frac{\omega_{geg}^2 - \omega_{gl}^2}{2}}$$

für beide Koppellängen bestimmen.

Nun sind alle Größen bekannt, die zur Bestimmung des Trägheitsmoments Θ und der Federkonstanten D nötig sind. Wie in der Vorbereitung gezeigt, ergibt sich das Trägheitsmoment über

$$\Theta = \frac{m_{ges} g L_S}{\omega_{gl}^2}$$

und die Federkonstante über

$$D = \frac{\Theta \Omega^2}{l^2}$$

Nachfolgend sind alle berechneten Werte in einer Tabelle zusammengefasst.

	l _i in cm	
	20	25
L _S in m	0,7443	0,7455
ω _{gl} in s ⁻¹	3,404	3,432
ω _{geg} in s ⁻¹	3,624	3,749
Ω in s ⁻¹	0,879	1,066
Θ in kgm ²	1,251	1,232
D in N/m	24,163	22,425

Es ist zu erkennen, dass sich die Federkonstanten bei unterschiedlichen Koppellängen unterscheiden. Dies ist auf oben angesprochene Messungenauigkeiten zurückzuführen, die nun auch in die berechneten Werte einfließen.

Weitere Bestimmungen der Federkonstanten

Wir haben anschließend die Federkonstante D über einen statischen und einen dynamischen Versuch bestimmt.

(a) Statische Methode

Die Feder wurde von uns an einem Stativ aufgehängt. Anschließend haben wir verschiedene Massen m an der Feder befestigt und deren Auslenkung x aus der Ruhelage gemessen. Nach dem Hookeschen Gesetz gilt:

$$D = \frac{mg}{x}$$

Auf diese Weise konnten wir für drei verschiedene Massen mit $m = 100g$, $m = 200g$ und $m = 300g$ direkt die Federkonstante bestimmen. Die Ergebnisse sind in nachfolgender Tabelle festgehalten. Zum Vergleich wurde daraus der Mittelwert gebildet.

Statische Bestimmung			
Messung	m in g	x in cm	D in N/m
1	100	4,0	24,53
2	200	8,0	24,53
3	300	12,1	24,32
Mittel			24,46

(b) Dynamische Methode

Wir haben an der selben Versuchsanordnung nun für Gewichte der Massen $m = 100g$ und $m = 200g$ Schwingungsversuche durchgeführt. Dabei wurde das Federpendel um eine gewisse Strecke ausgelenkt und mittels Stoppuhr die Periodendauer bestimmt. Aus ihr ergibt sich mittels der Formel

$$D = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$$

die Federkonstante. Nachfolgend ist auch hier die Messwertetabelle mit den berechneten Federkonstanten dargestellt. Dabei sind die angegebenen Periodendauern als Mittelwerte mehrerer Messungen zu verstehen.

Dynamische Bestimmung			
Messung	m in g	T in s	D in N/m
1	100	0,402	24,43
2	200	0,555	25,63
Mittel			25,03

Wie die Messungen zuvor sind auch die statische und die dynamische Methode fehlerbehaftet. Es ist zu erkennen, dass die auf diese Weise bestimmten Federkonstanten untereinander sowie im Vergleich zu den aus dem gekoppelten System bestimmten Werten leicht voneinander abweichen.

Beim statischen Versuch ergeben sich als hauptsächliche Fehlerquelle Ablesefehler.

Beim dynamischen Versuch hingegen ist die genaue Zeitmessung mit der Stoppuhr eine große Fehlerquelle, denn vor allem bei kleinen angehängten Massen ist die Frequenz des Pendels sehr hoch, was eine genaue zeitliche Messung erschwert. Unabhängig davon ist auch die Reaktionszeit des Experimentators eine nicht zu vernachlässigende Fehlerquelle.

Theoretische Berechnung des Trägheitsmoments

Zur Kontrolle soll nun eine theoretische Berechnung des Trägheitsmoments mittels der angegebenen Werte erfolgen. Das Trägheitsmoment Θ_{ges} des gesamten Pendels ergibt sich als Summe über alle relevanten Trägheitsmomente. Dabei gelten für die Massen die weiter oben angegebenen Werte. Zunächst sollen die Trägheitsmomente der einzelnen Komponenten des Pendels betrachtet werden. Da der Stab durch die Kreisscheibe in zwei Abschnitte aufgeteilt wird, soll die Berechnung von dessen Trägheitsmoment auch in zwei Teilen erfolgen. Daraus folgt direkt, dass man für das Trägheitsmoment der Scheibe nun wieder die im Literaturwert angegebene Masse $m_{scheibe}^* = 1221g$ verwenden muss.

Die Kreisscheibe mit dem Radius $r = \frac{d}{2}$, deren Zentrum sich im Abstand L_Z von der Drehachse befinde,

besitzt das Trägheitsmoment

$$\Theta_{\text{scheibe}} = \frac{1}{2} m_{\text{scheibe}} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 + m_{\text{scheibe}} \cdot \left(\frac{d}{2} + L_Z\right)^2$$

Die Aufhängung der Feder im Abstand l von der Drehachse wird von uns als punktförmig betrachtet. Sie besitzt dann das Trägheitsmoment

$$\Theta_{\text{koppel}} = m_{\text{koppel}} \cdot l^2$$

Für den oberen und unteren Teil des Stabs betrachten wir zunächst noch die Massen dieser beiden Stabteile.

Der obere Teil hat die Länge $L_{\text{stab,oben}} = L_Z - \frac{d}{2}$ und damit die Masse $m_{\text{stab,oben}} = L_{\text{stab,oben}} \cdot \rho = 640,584\text{g}$. Die Drehachse ist um $s_{\text{stab,oben}} = \frac{1}{2} \left(L_Z - \frac{d}{2}\right)$ vom Schwerpunkt verschoben. Mit der in der Vorbereitung angegebenen Formel folgt nun als Trägheitsmoment des oberen Stabteils

$$\Theta_{\text{stab,oben}} = \frac{1}{12} m_{\text{stab,oben}} \cdot L_{\text{stab,oben}}^2 + m_{\text{stab,oben}} \cdot s_{\text{stab,oben}}^2$$

Für die Länge des unteren Teils gilt $L_{\text{stab,unten}} = L_{\text{ges}} - L_Z - \frac{d}{2}$ und somit als Masse $m_{\text{stab,unten}} = L_{\text{stab,unten}} \cdot \rho = 79,608\text{g}$. Hier ist die Drehachse um $s_{\text{stab,unten}} = L_Z + \frac{d}{2} + \frac{L_{\text{stab,unten}}}{2}$ vom Schwerpunkt verschoben. Hier ergibt sich nun als Trägheitsmoment

$$\Theta_{\text{stab,unten}} = \frac{1}{12} m_{\text{stab,unten}} \cdot L_{\text{stab,unten}}^2 + m_{\text{stab,unten}} \cdot s_{\text{stab,unten}}^2$$

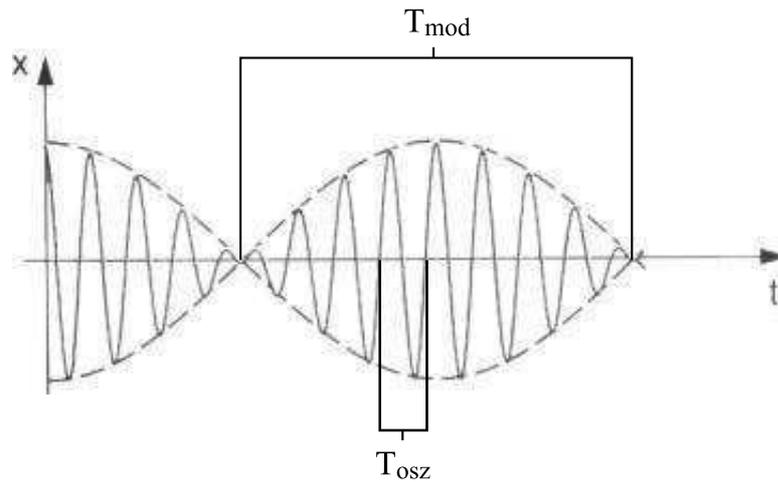
Es sind nun tabellarisch die Rechenergebnisse für verschiedene Koppellängen l zusammengefasst.

	l in cm	
	20	25
Θ_{scheibe} in kgm^2	1,129	
Θ_{koppel} in kgm^2	1,760E-03	2,750E-03
$\Theta_{\text{stab,oben}}$ in kgm^2	1,583E-01	
$\Theta_{\text{stab,unten}}$ in kgm^2	8,201E-02	
Θ_{ges} in kgm^2	1,371	1,372
$\Delta\Theta$	9,59%	11,34%

Es ist zu erkennen, dass die theoretisch errechneten Trägheitsmomente um etwa 10% von den experimentell bestimmten abweichen. Dies ist im Rahmen der Messgenauigkeit in Ordnung. Mögliche Fehlerquellen dafür sind bereits oben genannt. Es kommt hier hinzu, dass die verwendeten Körper alle nicht ideal sind, insbesondere ist die Koppelfederbefestigung in der Realität nicht punktförmig, wodurch sich ein anderes Trägheitsmoment ergeben würde. Außerdem waren die verschiedenen Abstände nur recht ungenau mit einem Lineal messbar.

Aufgabe 3.3: Schwebungen

Abschließend betrachten wir nun eine Überlagerung beider Fundamentalschwingungen: Schwebungszustände. Dabei wollen wir die Schwingungsdauer T_{osz} und die Schwebungsdauer T_{mod} bestimmen. Wie in der Skizze unten angedeutet ist darauf zu achten, dass die Schwebungsdauer nur auf eine halbe Periode definiert ist und nicht auf eine volle, wie die Schwingungsdauer.



Wir haben als Koppellänge $l = 25\text{cm}$ genutzt. Zur Bestimmung der Periodendauern haben wir anfangs eines der Pendel festgehalten und das andere um einen kleinen Winkel ausgelenkt. Dann wurden beide Pendel losgelassen. Zunächst schwang das ausgelenkte Pendel stark, wohingegen das festgehaltene nur leicht um die Ruhelage oszillierte. Nach einer Weile nahm das zweite Pendel immer mehr Schwung auf, und das Verhältnis kehrte sich um. Zwischen diesen Zuständen wechselte das System periodisch.

Bei der Bestimmung der Schwingungsdauer haben wir jeweils die Zeit bestimmt, die das anfangs ausgelenkte Pendel für vier volle Perioden benötigt. Mehr Perioden waren im Versuch nicht möglich, da das erste Pendel dann bereits so stark abgebremst wurde, dass keine genaue Messung mehr erfolgen konnte. Aus diesen Zeiten konnte dann die Schwingungsdauer bestimmt werden.

Für die Schwebungsdauer gingen wir ähnlich vor. Hier haben wir die Zeit gemessen, die verstrichen ist, bis das anfangs festgehaltene Pendel zum ersten Mal nach dem Loslassen wieder in Ruhe gerät. Dies lieferte uns dann direkt die Schwebungsdauer. Nachfolgend finden sich unsere Messwerte. Es wurden für jede Periodendauer drei Messungen durchgeführt und der Mittelwert gebildet.

Messung	$T_{\text{osz,exp}}$ in s	$T_{\text{mod,exp}}$ in s
1	1,702	19,410
2	1,706	19,520
3	1,706	19,230
Mittelwert	1,705	19,387

Anschließend haben wir mit den aus Aufgabe 3.2 berechneten Werten für T_{gl} und T_{geg} mittels der in der Vorbereitung angesprochenen Formeln

$$T_{\text{osz,theor}} = \frac{2T_{gl}T_{geg}}{T_{gl} + T_{geg}}$$

$$T_{\text{mod,theor}} = \frac{T_{gl}T_{geg}}{T_{gl} - T_{geg}}$$

die theoretischen Werte der Schwingungs- und Schwebungsdauern berechnet. Dies ist in unten stehender Tabelle dargestellt.

l in cm	T_{gl} in s	T_{geg} in s	$T_{\text{osz,exp}}$ in s	$T_{\text{mod,exp}}$ in s	$T_{\text{osz,theor}}$ in s	$T_{\text{mod,theor}}$ in s
25	1,831	1,676	1,705	19,387	1,750	19,837

Es lässt sich erkennen, dass unsere experimentell bestimmten Werte gut mit den theoretischen übereinstimmen. Mögliche Fehlerquellen sind hier wieder die ungenaue Bestimmung der Periodendauern mittels der Stoppuhr und die menschliche Reaktionszeit. Bei der Schwebungsdauer kommt hinzu, dass es schwer ersichtlich ist, wann das anfangs unausgelenkte Pendel wieder in die Ruhelage zurückfindet, da es immer etwas um sie herum oszilliert.