

Versuch P1-20

Pendel

Vorbereitung

Gruppe Mo-19
Yannick Augenstein

Versuchsdurchführung: 9. Januar 2012

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1	2
1.1 Reduzierte Pendellänge	2
1.2 Fallbeschleunigung am Reversionspendel	3
Aufgabe 2	3
2.1 Fallbeschleunigung am Fadenpendel	3
2.2 Schwingungsdauer und Schwingungsweite	4
Aufgabe 3	4
3.1 Gleiche Schwingungsdauer bei gleichartigen Pendeln	4
3.2 Gekoppelte Schwingung	4
3.2.1 Statische Bestimmung der Federkonstanten	5
3.2.2 Dynamische Bestimmung der Federkonstanten	5
3.3 Schwebungen	5

Aufgabe 1

1.1 Reduzierte Pendellänge

Es soll berechnet werden, dass verschiedene Massen bei gleichbleibender Länge eines Pendels dessen Schwingungsdauer nicht verändern.

Für das rücktreibende Drehmoment eines Pendels gilt:

$$M = -mgl \cdot \sin \varphi$$

Wobei m die Masse des Körpers, l dessen Abstand zum Rotationszentrum, g die Gravitationskonstante und φ der Auslenkungswinkel des Pendels aus der Gleichgewichtslage ist. Für kleine Winkel gilt $\sin \varphi \approx \varphi$:

$$M = -mgl \cdot \varphi$$

Wir wissen, dass $M = \Theta \cdot \ddot{\varphi}$, wobei Θ das Trägheitsmoment ist. Wir können in obige Gleichung einsetzen und erhalten:

$$\ddot{\varphi} + mg \cdot \frac{l}{\Theta} = 0$$

Diese homogene DGL können wir mit dem Exponentialansatz von $\varphi = \varphi_0 \cdot e^{i\omega t}$ lösen:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{\Theta}}$$

So ergibt sich eine Schwingungsdauer T von:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{mgl}}$$

Das Trägheitsmoment eines massiven Zylinders mit der Länge s ist $\Theta_Z = \frac{1}{3}ms^2$, wobei $s = \frac{l}{2}$. Das setzen wir in die obige Gleichung für die Schwingungsdauer ein und erhalten:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

Die Schwingungsdauer eines mathematischen beträgt:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_r}{g}}$$

Man sieht also, dass für die reduzierte Pendellänge gilt:

$$l_r = \frac{2}{3} \cdot l$$

Nun sollen wir uns davon überzeugen, dass eine Massenänderung im Abstand l_r vom Rotationszentrum die Schwingungsdauer des Systems nicht verändert. Hierzu bringen wir eine Masse m_0 im Abstand l_r an das Pendel an:

$$\Theta_0 = \frac{1}{3} m l^2 + m_0 \cdot \left(\frac{2}{3} l \right)^2$$

Setzen wir das in die Schwingungsdauer ein erhalten wir:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m l^2 + m_0 \cdot \left(\frac{2}{3} l \right)^2}{\left(\frac{1}{2} m + \frac{2}{3} m_0 \right) \cdot g l}}$$

Daraus folgt:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g}} = T$$

Wie man sieht, wirkt sich die Masse nicht auf die Periodendauer aus. Auch die Klauen, mit denen die Schneiden des Pendellagers am Stab befestigt sind, sollten nur geringfügige Abweichungen der Messwerte zur Folge haben.

1.2 Fallbeschleunigung am Reversionspendel

Die Fallbeschleunigung g erhält man durch Umformen der Gleichung für das mathematische Pendel:

$$g = l_r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$$

In unserem Versuch bestimmen wir l_r . Es muss darauf geachtet werden, dass wir ausreichend kleine Auslenkungen wählen (Kleinwinkelnäherung).

Aufgabe 2

2.1 Fallbeschleunigung am Fadenpendel

Da das Fadenpendel dem mathematischen Modell nahe kommt, müssen wir hier nicht die reduzierte Pendellänge l_r berechnen. Die Ausdehnung der Kugel mit Radius r hingegen sollten wir nicht vernachlässigen.

Für das Trägheitsmoment des Pendels gilt:

$$\Theta = \Theta_K + m \cdot (l + r)^2$$

Wobei Θ_K das Trägheitsmoment der Kugel ist, $\Theta_K = \frac{2}{5} m r^2$.

Nun setzen wir dieses Trägheitsmoment in die Gleichung für die Periodendauer ein und erhalten:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5} m r^2 + m \cdot (l + r)^2}{m g \cdot (l + r)}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5} r^2 + (l + r)^2}{g \cdot (l + r)}}$$

Dies lösen wir nach g auf und erhalten:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{\frac{2}{5}r^2 + (l+r)^2}{l+r}$$

2.2 Schwingungsdauer und Schwingungsweite

Da es sich hier um große Auslenkungen handelt, gilt die Kleinwinkelnäherung nicht mehr und wir müssen eine neue Lösung für die DGL finden:

$$\Theta \cdot \ddot{\varphi} + mg \cdot \sin \varphi = 0$$

Dies führt näherungsweise zu einer Schwingungsdauer von:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5}r^2 + (l+r)^2}{g \cdot (l+r)}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \frac{9}{64} \sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right) + \dots\right)$$

Wahrscheinlich werden unsere Messwerte jedoch von den theoretischen abweichen, da hier z.B. Reibungskräfte vernachlässigt wurden.

Aufgabe 3

3.1 Gleiche Schwingungsdauer bei gleichartigen Pendeln

Hier sollen zwei gleichartige Pendel so eingestellt werden, dass sie die selbe Schwingungsdauer besitzen. Hierzu bleibt ein Pendel statisch und man verschiebt das Gewicht am anderen so lange, bis das zweite Pendel synchron mit dem ersten schwingt.

3.2 Gekoppelte Schwingung

In diesem Versuch untersuchen wir jene beiden Schwingungen der Pendel, bei denen keine Schwebungen auftreten. Die ist der Fall, wenn die beiden Pendel gleichphasig oder gegenphasig schwingen. Wir messen dies für verschiedene Kopplungslängen l , wobei $\Delta T^2 \ll T^2$ gelten muss.

Die Bewegungsgleichungen für zwei gekoppelte Pendel lauten:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 - \Omega \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 - \Omega \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0\end{aligned}$$

Wobei $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{\Theta}}$ und $\Omega = \sqrt{\frac{Dl^2}{\Theta}}$.

Mit dem Exponentialansatz (siehe Aufgabe 1) erhält man:

$$\begin{aligned}(-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2) \cdot \varphi_1 - \Omega \varphi_2 &= 0 \\ (-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2) \cdot \varphi_2 - \Omega \varphi_1 &= 0\end{aligned}$$

Damit dieses Gleichungssystem lösbar ist, muss $-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2 = \pm\Omega^2$ sein. Die Pendel schwingen für $\omega^2 = \omega_0^2$ in Phase und für $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2$ gegenphasig.

Wie man sieht, sind ist die gleichphasige Schwingung von der Feder unabhängig. Das ist logisch, denn bei einer gleichphasigen Schwingung beider Pendel wird die Feder weder gestaucht noch gestreckt, manipuliert die Schwingung des Systems also nicht.

3.2.1 Statische Bestimmung der Federkonstanten

Für die statische Bestimmung werden verschiedene Massen m an die Feder gehängt und es wird die Auslenkung x der Feder gemessen. Zur Berechnung wird folgende Formel verwendet:

$$D = \frac{mg}{x}$$

3.2.2 Dynamische Bestimmung der Federkonstanten

Hierzu wird eine Masse m an die Feder gehängt, lenkt diese aus und beobachtet die resultierende Schwingung. Wir wissen, dass

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Also gilt für die Federkonstante:

$$D = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{T^2}$$

3.3 Schwebungen

Versetzt man eines der beiden gekoppelten Pendel in Schwingung, so wird auch das andere zu einer Schwingung angeregt, man spricht von einer erzwungenen Schwingung. Die Schwingung des zweiten Pendels wird dabei immer stärker, die des ersten wird schwächer. Dann kommt das erste Pendel zur Ruhe, während das zweite immer noch schwingt. Dadurch regt das zweite Pendel wieder das erste zum Schwingen an und so weiter. Bei Schwebungen sehen die Lösungen der Bewegungsgleichungen folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_0 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}t \cdot \left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}t \cdot \left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0\right)\right) \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t \cdot \left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t \cdot \left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0\right)\right)\end{aligned}$$

Diese Gleichungen beschreiben zwei verschiedene Schwingungszustände, und zwar:

$$\begin{aligned}\omega_{mod} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0\right) \\ \omega_{osz} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0\right)\end{aligned}$$

Aus diesen Kreisfrequenzen lassen sich T_{mod} und T_{osz} ableiten:

$$\begin{aligned} T_{mod} &= \frac{2\pi}{\omega_{mod}} \\ &= \frac{2T_{gl} \cdot T_{geg}}{T_{gl} - T_{geg}} \\ T_{osz} &= \frac{2\pi}{\omega_{osz}} \\ &= \frac{2T_{gl} \cdot T_{geg}}{T_{gl} + T_{geg}} \end{aligned}$$

Diese Rechnung sollen wir nun im Versuch bestätigen.

Versuch P1-15

Pendel

Auswertung

Gruppe Mo-19
Yannick Augenstein
Patrick Kuntze

23.12.11

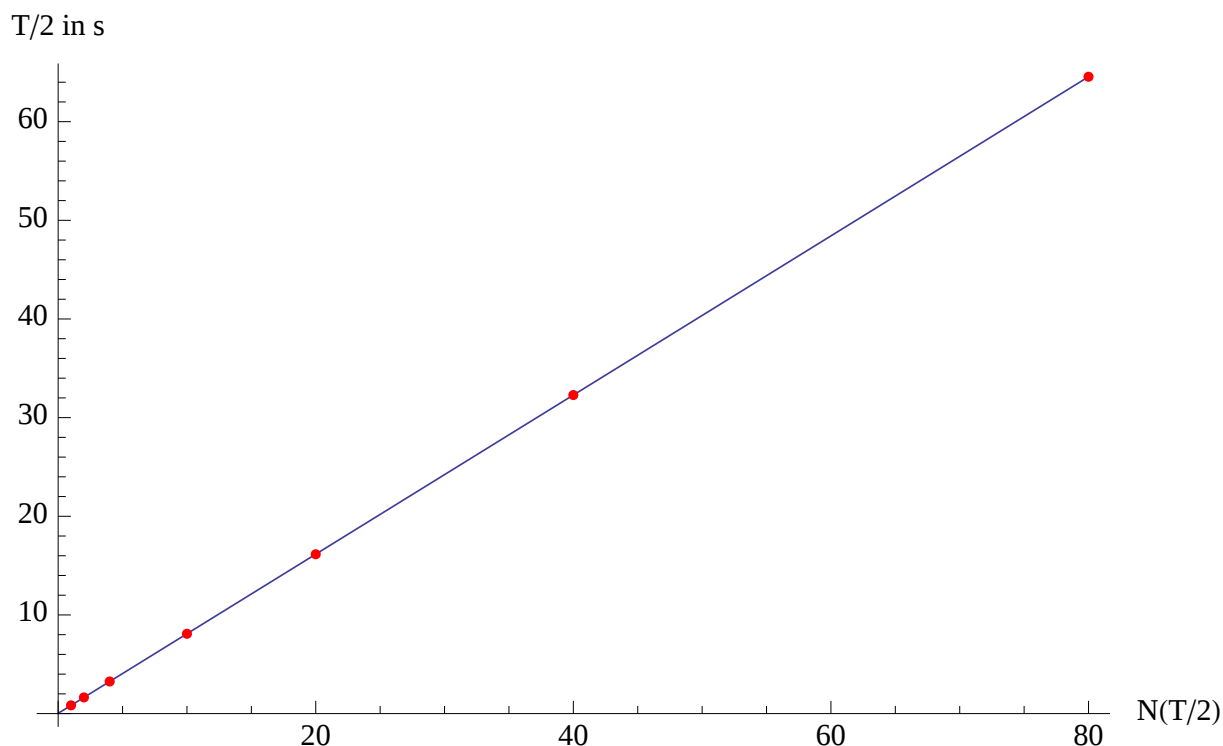
Inhaltsverzeichnis

1	Reversionspendel	3
1.0	Eichmessung	3
1.1	Reduzierte Pendellänge	3
1.2	Fallbeschleunigung	4
2	Fadenpendel	5
2.0	Eichmessung	5
2.1	Fallbeschleunigung	5
2.2	Schwingungsdauer und Schwingungsweite	6
3	Gekoppeltes Pendel	7
3.1	Einstellen der Pendel	7
3.2	Koppeln der Pendel	7
3.3	Angeregtes, gekoppeltes Pendel	9
4	Fehlerrechnung	9
4.1	Reversionspendel	9
4.2	Fadenpendel	11

1 Reversionspendel

1.0 Eichmessung

Bevor wir unsere Messreihen zum Reversionspendel aufnehmen konnten mussten wir zunächst eine Eichmessung vornehmen, um Messfehler des Messgerätes miteinbeziehen zu können. Dafür maßen wir die Zeit in Abhängigkeit zur Anzahl der Schwingungen des Pendels.



$$\text{Ausgleichsgerade: } \frac{T}{2} \approx 0.026s + 0.807s \cdot N$$

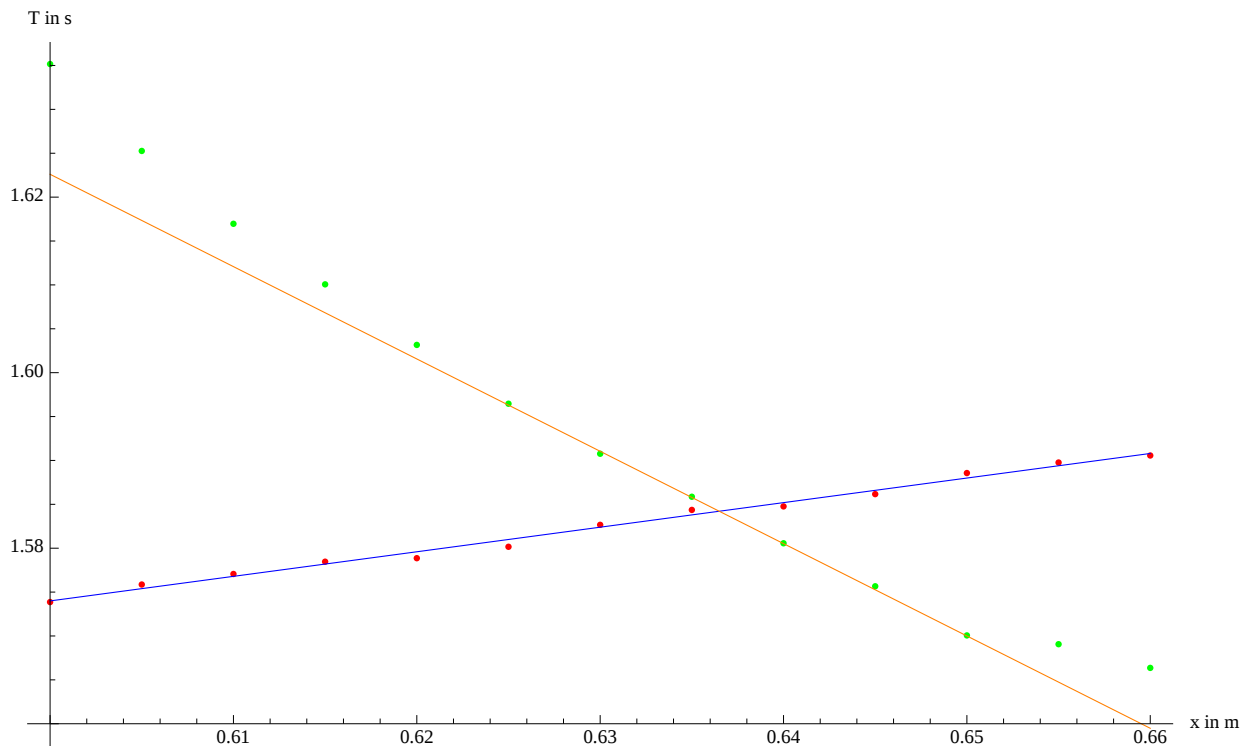
Aus der Geradengleichung ermitteln wir nun einen Messgerät-Offset von $0.026s$. Um daraus resultierende Verfälschungen der Messwerte auszuschließen ziehen wir zukünftig genau diesen Offset-Wert ab.

1.1 Reduzierte Pendellänge

Dieser Versuch wurde bereits ausführlich in der Vorbereitung abgehandelt.

1.2 Fallbeschleunigung

Wir wollen nun mit Hilfe der Messdaten des Reversionspendels die Erdbeschleunigung g experimentell bestimmen. Hier gilt: $g = l_r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$. Wir variierten den Abstand zwischen einer festen oberen Schneide und einer verstellbaren unteren Schneide und maßen jeweils die Schwingdauern bei oberer und unterer Aufhängung.



Ausgleichsgeraden:

$$\text{Rot(untere Aufh.)} \rightarrow T \approx 2.254s + -1.052 \frac{s}{m} \cdot x;$$

$$\text{Blau(obere Aufh.)} \rightarrow T \approx 1.406s + 0.280 \frac{s}{m} \cdot x$$

Um den Schnittpunkt der beiden Kurven, und damit die reduzierte Pendellänge, zu berechnen haben wir sie mit Graden angenähert, wobei wir bei der Kurve für die untere Aufhängung nur die nächsten Messwerte zum Schnittpunkt gefittet haben, da sonst keine lineare Regression möglich gewesen wäre. Durch Gleichsetzen der Ausgleichsgeraden erhalten wir $l_r \approx 0.636m$. Nach Einsetzen in einer der Geradengleichungen erhalten wir wiederum $T \approx 1.608s$. Nun ergibt sich für die Erdbeschleunigung:

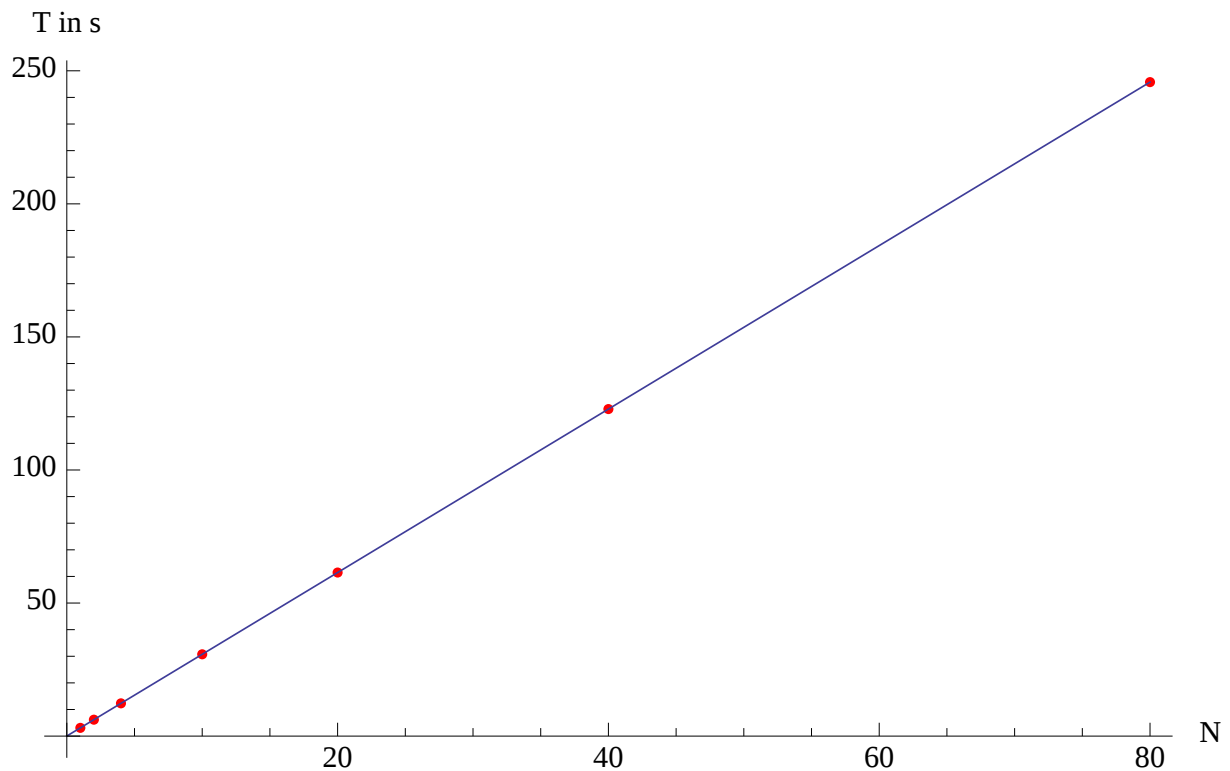
$$g = l_r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = 0.636m \cdot \frac{4\pi^2}{(1.608s)^2} \approx 10.01 \frac{m}{s^2}$$

Bei einem Literaturwert von $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ macht das eine Abweichung von 2%.

2 Fadenpendel

2.0 Eichmessung

Auch hier mussten wir wieder eine Eichmessung durchführen um den Offset des Messgerätes zu ermitteln.



Ausgleichsgerade: $T = 0.0259s + 3.0715s \cdot N$

Der Offset beträgt $0.0259s$.

2.1 Fallbeschleunigung

Nun wollen wir die Erdbeschleunigung mithilfe eines mathematischen Pendels bestimmen. Hierfür benötigen wir das Trägheitsmoment Θ des Pendels, welches wir dann in die Gleichung für die Periodendauer T einsetzen. Mit der Formel aus der Vorbereitung können wir dann g berechnen.

$$\Theta = \frac{2}{5}mR^2 + m(l + R)^2$$
$$\Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{\frac{2}{5}R^2 + (l + R)^2}{l + R} = \frac{4\pi^2}{(3.072s)^2} \cdot \frac{\frac{2}{5}0.061m^2 + (2.36m + 0.061m)^2}{2.36m + 0.061m} \approx 10.13 \frac{m}{s^2}$$

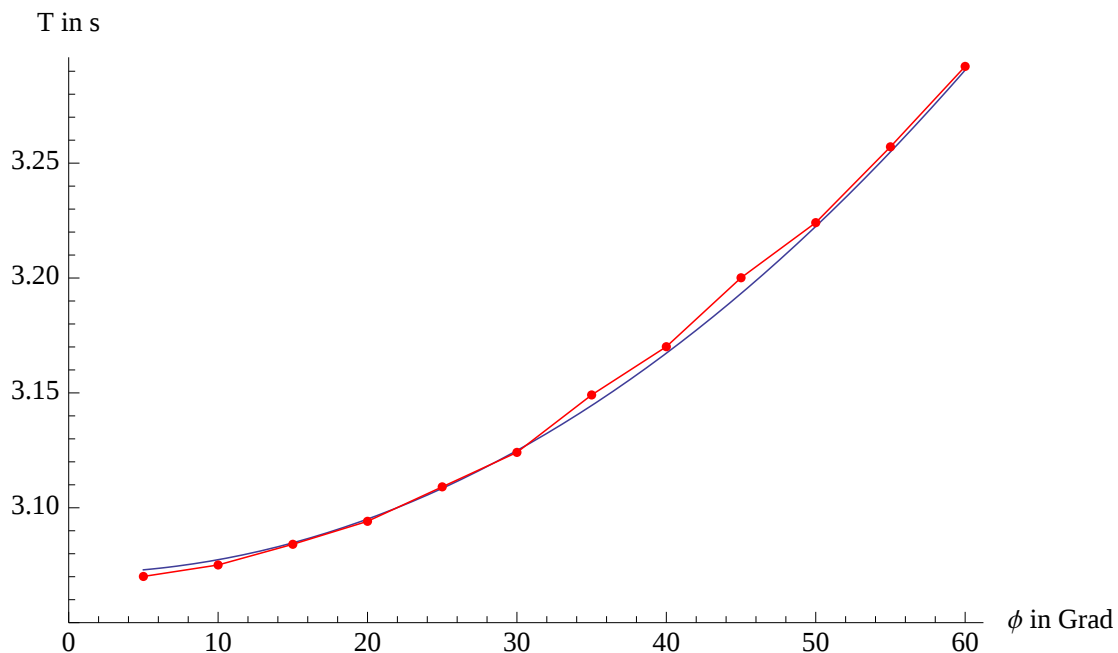
Hier weicht unser Wert um 3.3% vom Literaturwert ab.

2.2 Schwingungsdauer und Schwingungsweite

Bei großen Winkeln gilt die Kleinwinkelnäherung nicht mehr (wer hätte das gedacht?). Deshalb nähern wir die Schwingungsdauer nun über eine Reihenentwicklung an und nennen sie T_{Theo} :

$$T_{Theo} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2r^2}{5} + (l+r)^2}{g(l+r)}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left[\frac{\phi}{2} \right] + \frac{9}{64} \sin^4 \left[\frac{\phi}{2} \right] \right)$$

Mit unseren Messwerten konnten wir folgendes Schaubild machen:



Die blaue Kurve entspricht hierbei dem theoretischen Verlauf (bei gleicher Fallbeschleunigung g). Die roten Werte sind unsere Messwerte (nicht gefittet, nur verbunden).

Auslenkung	T_{Mess} in s	T_{Theo} in s	ΔT in s
60	3.292	3.291	0.0016
55	3.257	3.255	0.0022
50	3.224	3.222	0.0016
45	3.200	3.193	0.0069
40	3.170	3.167	0.0028
35	3.149	3.145	0.0046
30	3.124	3.125	-0.0008
25	3.109	3.108	0.0007
20	3.094	3.095	-0.0010
15	3.084	3.085	-0.0006
10	3.075	3.077	-0.0023
5	3.070	3.073	-0.0029

Ursprünglich lagen unsere Messwerte *über* dem theoretischen Verlauf. Nachdem wir jedoch einen Offset von 0.0259 s (aus Aufgabe 2.0) abzogen, lagen sie fast genau auf der theoretischen Kurve. Wir konnten bei dieser Messung nicht sehen, dass die Differenz zwischen theoretischem und ermitteltem Wert bei größeren Auslenkungen ansteigt, wie es eigentlich zu erwarten wäre.

3 Gekoppeltes Pendel

3.1 Einstellen der Pendel

Um die Schwingungen der beiden einzelnen Pendel aneinander anzupassen veränderten wir eines so wie in der Vorbereitung beschrieben. Nach etwas Ausprobieren erreichten wir nahezu identische Schwingdauern. So maßen wir bei 10 ganzen Schwingungen für das linke Pendel $T_{l,10} = 18.40s$ und für das rechte $T_{r,10} = 18.48s$. Das macht eine Differenz von $\Delta T_1 = 0.008s$ die bei unseren Versuchsbedingungen absolut vernachlässigbar gering ist.

3.2 Koppeln der Pendel

Nun koppelten wir beide Pendel mit einer Feder bei unterschiedlichen Abständen von Drehpunkt zu Federhalterung. Wir maßen die Periodendauern sowohl für gleich- als auch für gegenphasige Schwingung:

Schwingung	Periodendauer (in s) bei Abstand	
	$L_1 = 36.8cm$	$L_2 = 52cm$
gleichphasig	1.811	1.835
gegenphasig	1.639	1.34

Unsere Messergebnisse zeigen deutlich, das bei gleichphasiger Schwingung die Feder keinerlei Arbeit verrichtet und deshalb auch nicht die Periodendauer beeinflusst. Sie entspricht der Schwingdauer des ungekoppelten Pendels $T_1 = 1.848s$. Demnach ist es auch egal, an welcher Stelle des Pendels sie befestigt ist. Bei gegenphasiger Schwingung hingegen ist diese kopplungsabhängig, da die Feder gestreckt und gestaucht wird und somit Arbeit am Pendel verrichtet. Desweiteren zeigt unsere Auswertung, das bei größerem Abstand die Schwingdauer deutlich abnimmt, was darauf zurückzuführen ist, dass die Feder an einem tieferen Punkt weiter ausgelenkt wird.

Jetzt sollen wir folgende Größen berechnen: $\omega^2 = \frac{MgL_{S,i}}{\Theta}$; $\Omega^2 = \frac{Dl_i^2}{\Theta}$; $\omega_{gl}^2 = \omega^2$; $\omega_{geg}^2 = \omega^2 + 2\Omega^2$; Θ ; D .

Dafür müssen wir zunächst noch den Abstand Drehpunkt-Schwerpunkt $L_{S,i}$ sowie die Masse M des Pendels bestimmen:

$$M = m_{Stab} + m_{Scheibe} + m_{Aufhaengung} = (0.00744 \frac{kg}{cm} \cdot 107.75cm) + 1.1466kg + 0.044kg \approx 1.99kg$$

$$L_{S,i} = \frac{1}{M}((m_{Scheibe} \cdot L_{Scheibe}) + (m_{Aufhaengung} \cdot l_i) + (m_{Stab} \cdot \frac{L_{Stab}}{2}))$$

$\Rightarrow$

$$L_{S,1} = \frac{1}{1.99kg}((1.1466kg \cdot 91.25cm) + (0.044kg \cdot 36.8cm) + (0.8264kg \cdot \frac{107.75cm}{2})) \approx 75.76cm$$

$$L_{S,2} = \frac{1}{1.99kg}((1.1466kg \cdot 91.25cm) + (0.044kg \cdot 52cm) + (0.8264kg \cdot \frac{107.75cm}{2})) \approx 76.1cm$$

Hiermit lassen sich nun die Rechnungen durchführen, bei denen wir zu folgenden Ergebnissen kommen:

	Kopplungslänge $l_1 = 36.8cm$ 36.8 cm	Kopplungslänge $l_2 = 52cm$ 52 cm
$\omega_{gl}^2 = \omega^2$	$12.04 \cdot s^{-2}$	$11.72 \cdot s^{-2}$
ω_{geg}^2	$14.7 \cdot s^{-2}$	$21.99 \cdot s^{-2}$
Ω^2	$1.33 \cdot s^{-2}$	$5.14 \cdot s^{-2}$
Θ	$0.753kgm^2$	$0.774kgm^2$
D	$7.395 \cdot \frac{N}{m}$	$14.713 \cdot \frac{N}{m}$

Wir erkennen zunächst, dass die Federkonstante D nicht wie erwartet gleichbleibt, sondern scheinbar mit der Kopplungslänge steigt. Dies führen wir auf ungenaues Messen zurück. Das Trägheitsmoment Θ hingegen bleibt relativ konstant.

Jetzt wollen wir unsere ermittelte Federkonstante mit theoretisch bestimmten Werten vergleichen. Dafür berechnen wir D auf zwei unterschiedlichen Wegen.

Zunächst belasten wir die Feder mit unterschiedlichen Gewichten und berechnen D mit der Formel: $D = \frac{m \cdot g}{x}$.

Gewicht (in kg)	Auslängung x (in cm)	D (in $\frac{N}{m}$)
0.1	0.04	24.53
0.2	0.08	24.53
0.3	0.12	24.53

Anstatt diese statische Bestimmung durchzuführen, kann man auch eine dynamische wählen. Hierzu lassen wir die Feder schwingen und benutzen die Formel: $D = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{T^2}$.

Gewicht (in kg)	Schwingdauer (in s)	D (in $\frac{N}{m}$)
0.1	0.44	20.39
0.2	0.59	22.68

Das ergibt einen Durchschnittswert von $D = 21.535 \frac{N}{m}$. Wir erkennen deutlich den Unterschied der statischen, wie auch der dynamischen Bestimmung zu den Ergebnissen aus den Messungen zum gekoppelten Pendel. So haben wir folgende Abweichungen:

	statisch	dynamisch
L_1	69.9%	65.7%
L_2	40%	31.7%

Als letztes in dieser Aufgabe wollen wir noch das Trägheitsmoment des Pendels über die Trägheitsmomente der einzelnen Pendelkomponente berechnen.

$$\Theta_{ges} = \Theta_{Scheibe} + \Theta_{Stab,oben} + \Theta_{Stab,unten} + \Theta_{Aufhaengung}.$$

Dabei gilt für die einzelnen Komponente:

$$\Theta_{Scheibe} = \frac{1}{2} m_{Scheibe} \cdot R^2 + m_{Scheibe} \cdot (L_{Scheibe})^2 \approx 1.02 kgm^2$$

$$\Theta_{Stab,oben} = \frac{1}{3}m_{Stab,oben} \cdot (L_{Scheibe} - R)^2 \approx 0.16kgm^2$$

$$\Theta_{Stab,unten} = \frac{1}{3}m_{Stab,unten} \cdot (L_{Stab} - (L_{Scheibe} + R))^2 + m_{Stab,unten} \cdot (L_{Stab} - \frac{1}{2}(L_{Stab} - (L_{Scheibe} + R)))^2 \approx 0.16kgm^2$$

$$\Theta_{Aufhaengung} = m_{Aufhaengung} \cdot L_i \Rightarrow L_1 : \approx 0.016kgm^2; L_2 : \approx 0.023kgm^2$$

Eingesetzt erhalten wir:

$$\Theta_{ges;L_1} \approx 1.356kgm^2; \Theta_{ges;L_2} \approx 1.363kgm^2$$

Somit ergeben sich Abweichungen von 44.5% für L_1 und 43.2% für L_2 im Vergleich zu den experimentell ermittelten Werten, was wie bei der Federkonstanten darauf hindeutet, dass unsere Messdaten sehr ungenau waren.

3.3 Angeregtes, gekoppeltes Pendel

In der letzten Aufgabe sollten wir die, in der Vorbereitung aufgeführten, Zusammenhänge zwischen T_{osz} , T_{mod} , T_{gl} und T_{geg} überprüft werden. Gemessen wurden bei 63.8cm Aufhängerabstand folgende Werte: $T_{osz} = 1.636s$; $T_{mod} = 16.42s$.

$$T_{osz} = \frac{T_{gl} \cdot T_{geg}}{T_{gl} - T_{geg}} = \frac{1.811s \cdot 1.639s}{1.811s - 1.639s} \approx 17.257s$$

$$T_{mod} = \frac{2T_{gl} \cdot T_{geg}}{T_{gl} + T_{geg}} = \frac{2 \cdot 1.811s \cdot 1.639s}{1.811s + 1.639s} \approx 1.721s$$

Mit jeweils einer Abweichung von 5.1% sowohl bei T_{osz} als auch bei T_{mod} können die Zusammenhänge als korrekt angesehen werden.

4 Fehlerrechnung

4.1 Reversionspendel

Mathematica gab uns für die beiden Geraden jeweils die Standardabweichung an:

Variable	Wert	σ
m_1	0.28 s/m	0.0076 s/m
c_1	1.406 s	0.0048 s
m_2	-1.052 s/m	0.0212 s/m
c_2	2.254 s	0.0134 s

Den statistischen Fehler berechneten wir nun aus diesen Werten und der Formel für $l_r = \frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}$ mit Hilfe der gaußschen Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned}\Delta l_{r,stat} &= \sqrt{\frac{\Delta c_1^2}{(m_1 - m_2)^2} + \frac{\Delta c_2^2}{(m_1 - m_2)^2} + \frac{(-c_1 + c_2)^2 \Delta m_1^2}{(m_1 - m_2)^4} + \frac{(-c_1 + c_2)^2 \Delta m_2^2}{(m_1 - m_2)^4}} \\ &= \sqrt{0.564 \Delta c_1^2 + 0.564 \Delta c_2^2 + 0.228 \Delta m_1^2 + 0.228 \Delta m_2^2} \\ &= 0.015 \text{ m}\end{aligned}$$

Zu diesem statistischen kommt noch ein durch den Versuchsaufbau bedingter systematischer Fehler dazu, dieser ist auf dem Aufgabenblatt angegeben mit 0.2 mm. Außerdem kommt hier noch die Messungenauigkeit beim Einstellen des Abstands hinzu. Diese haben wir auf 0.1 mm geschätzt. So ergibt sich für unser l_r also letztendlich:

$$l_r = 63.6493 \text{ cm} \pm 0.03 \text{ cm} \pm 1.5146 \text{ cm}$$

Den Fehler auf die Periodendauer berechnen wir analog. Für den statistischen Fehler gilt:

$$\begin{aligned}T_r &= \frac{c_2 m_1 - c_1 m_2}{m_1 - m_2} \\ &= \sqrt{0.623768 \Delta c_1^2 + 0.0441883 \Delta c_2^2 + 0.252703 \Delta m_1^2 + 0.0179017 \Delta m_2^2} \\ &= 0.0067 \text{ s}\end{aligned} \tag{1}$$

Hier haben wir einen systematischen Fehler von 0.2%. T_r ist also:

$$T_r = 1.5842 \text{ s} \pm 0.0032 \text{ s} \pm 0.0067 \text{ s}$$

Nun muss der Fehler für g berechnet werden.

$$g = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l_r}{T_r^2}$$

Der statistische Fehler ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}\Delta g_{stat} &= \sqrt{\frac{16\pi^4 \Delta l_{r,stat}^2}{T_{red}^4} + \frac{64\pi^4 l_{red}^2 \Delta T_{r,stat}^2}{T_{red}^6}} \\ &= \sqrt{247.438 \Delta l_{r,stat}^2 + 159.767 \Delta T_{r,stat}^2} \\ &= 0.2528 \text{ ms}^{-2}\end{aligned}$$

Und der systematische Fehler ergibt sich mit:

$$\begin{aligned}\Delta g_{sys} &= \sqrt{\frac{16\pi^4 \Delta l_{r,sys}^2}{T_{red}^4} + \frac{64\pi^4 l_{red}^2 \Delta T_{r,sys}^2}{T_{red}^6}} \\ &= \sqrt{247.438 \Delta l_{r,sys}^2 + 159.767 \Delta T_{r,sys}^2} \\ &= 0.0403 \text{ ms}^{-2}\end{aligned}$$

Also haben wir für g einen Wert von:

$$g = 10.0121 \text{ ms}^{-2} \pm 0.0403 \text{ ms}^{-2} \pm 0.2528 \text{ ms}^{-2}$$

Wir sehen, dass der Literaturwert von 9.81 ms^{-2} in dem von uns gemessenen Bereich liegt.

4.2 Fadenpendel

Der statistische Fehler entspricht hier genau dem Fehler auf die Steigung der Ausgleichsgeraden. Die Steigung gab uns Mathematica an als:

$$m = 3.07153 \text{ s} \pm 0.00004 \text{ s}$$

Das ist zwar eine sehr kleine Abweichung, allerdings liegen unsere Werte auch sehr gut auf der Ausgleichsgeraden. Der systematische Fehler entspricht wieder den 0.2% Messungenauigkeit, hat also einen Wert von 0.0061 s . Das ergibt nun für unsere Schwingungsdauer:

$$T = 3.07153 \text{ s} \pm 0.00004 \text{ s} \pm 0.0061 \text{ s}$$

Die Länge des Aufhängefadens des Pendels war angegeben mit $l = 2.36 \text{ m} \pm 0.003 \text{ m}$. Den Radius der Pendelkugel haben wir ausgemessen, dieser Betrag $r = 0.061 \text{ m} \pm 0.001 \text{ m}$. Unsere Formel für g lautet:

$$g = \frac{4\pi^2 \left(\frac{2r^2}{5} + (l+r)^2 \right)}{(l+r)T^2}$$

Den statistischen Fehler berechnen wir nur mit dem Fehler auf die Steigung (beim Rest handelt es sich um systematische Fehler):

$$\begin{aligned} \Delta g_{stat} &= 8\pi^2 \sqrt{\frac{\left(\frac{2r^2}{5} + (l+r)^2 \right)^2 \Delta T^2}{(l+r)^2 T^6}} \\ &= 6.59825 \sqrt{\Delta T^2} \\ &= 0.00026 \text{ ms}^{-2} \end{aligned} \tag{2}$$

Beim systematischen Fehler müssen wir nun den systematischen Fehler bei der Zeitmessung, beim Messen, und beim Ablesen der Werte berücksichtigen.

$$\begin{aligned} \Delta g_{sys} &= \sqrt{17.5016 \Delta l^2 + 18.2145 \Delta r^2 + 43.537 \Delta T^2} \\ &= 0.0426 \text{ ms}^{-2} \end{aligned}$$

Wir haben den Term für die gaußsche Fehlerfortpflanzung hier nicht aufgeführt, das dieser riesig ist. Es sei aber angemerkt, dass die Rechnung analog zu allen anderen hier verlief. Zusammengefasst erhalten wir also:

$$g = 10.1334 \text{ ms}^{-2} \pm 0.0426 \text{ ms}^{-2} \pm 0.00026 \text{ ms}^{-2}$$

Leider liegt der Literaturwert nicht im Bereich unseres Fehlers. Es könnte sein, dass sich verschiedene Reibungskräfte auf den Versuch ausgewirkt haben, die wir nicht berücksichtigen konnten (z.B. Luftreibung, Reibung an der Aufhängung). Merkwürdig ist dabei jedoch, dass unser Wert für die Fallbeschleunigung *größer* als der Literaturwert ist. Dafür haben wir eigentlich keine Erklärung. Möglicherweise waren die Messwerte nicht optimal.