Vorbereitung: Pendel

Marcel Köpke
Gruppe 7

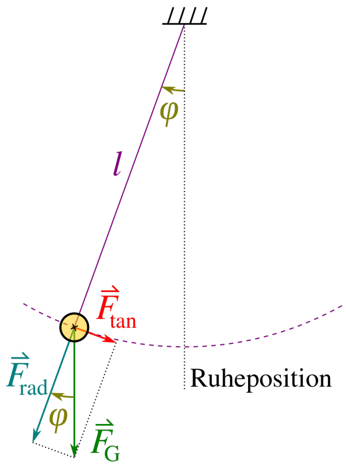
10.12.2011

Inhaltsverzeichnis

1 Augabe 1

1.1 Physikalisches Pendel

Zum Verständnis des physikalischen Pendels sei zuerst einmal das mathematische Pendel beschrieben:



(Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches_Pendel)

Abbildung 1.1: mathematisches Pendel

Die Abbildung 1.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines mathematischen Pendels. Dabei ist die Aufhängung des Massenpunkts über die gesamte Länge l masselos. Wenn m die Masse des Massenpunkts (gelb), φ die Auslenkung und g die Erdbeschleunigung bezeichnet dann folgt:

$$F_{tan} = mg \cdot \sin\varphi$$

wobei F_{tan} die Rückstellkraft des Pendels ist. F_{rad} wird durch die Aufhängung kompensiert. Die Rückstellkraft bewirkt ein Drehmoment:

$$M = l \cdot F_{tan} = mgl \cdot \sin\varphi$$

Stellt man nun die Bewegungsgleichung auf so folgt:

$$\Theta \cdot \ddot{\varphi} = -M$$

wobei Θ das Trägheitsmoment des Pendels ist. Der Massenpunkt selbst besitzt kein Trägheitsmoment für Drehungen um seinen Schwerpunkt. Da die Drehung aber um eine aus dem Schwerpunkt verschobene Achse stattfindet folgt:

$$\Theta = ml^2$$

Damit folgt dann schlussendlich:

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \cdot \sin\varphi = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin\varphi = 0$$

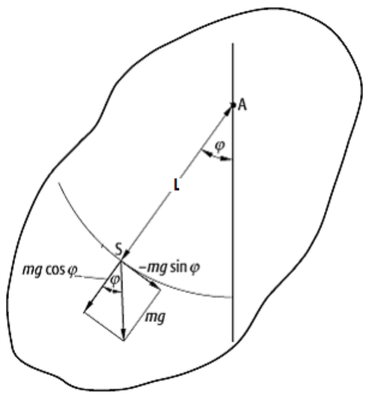
Für kleine Winkel folgt mit $\sin\varphi \approx \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines harmonisches Oszillators. Damit folgt

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}$$

Kommen wir nun zum physikalischen Pendel:



(Quelle: http://www.techniklexikon.net/d/pendel/pendel.htm)

Abbildung 1.2: physikalisches Pendel

Das physikalische Pendel besteht aus einem ausgedehnen Körper, welcher an einem Punkt A aufgehängt ist, sodass er um diesen schwingen kann. Die Kräfte greifen am Schwerpunkt S an, welcher um eine Strecke l von der Aufhängung entfernt ist. Damit folgt dann analog zum mathematsichen Pendel ein rückstellendes Drehmoment:

$$M = mgl \cdot \sin\varphi$$

Der Körper besitzt nun jedoch ein eigenes Trägheitsmoment für Drehungen um seinen Schwerpunkt. Im Versuch kommt ein zylinderförmiger Körper zum Einsatz:

$$\Theta_K = \frac{1}{12} m \cdot (L^2 + 3R^2)$$

wobei R den Zylinderradius und L die Länge des Zylinders bezeichnet. Damit gilt natürlich $L = 2l$ wenn der Zylinder an einem Ende aufgehängt wird. Die Drehung erfolgt hier also ebenfalls um eine verschobene Achse. Daher gilt für das resultierende Trägheitsmoment:

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta_K + ml^2 \\ &\Updownarrow \\ \Theta &= \frac{4}{3} ml^2 + \frac{1}{4} mR^2 \end{aligned}$$

Damit folgt für die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{\Theta} \cdot \sin\varphi = 0$$

bzw. für kleine Winkel:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{\Theta} \varphi = 0$$

Man definiert nun die reduzierte Pendellänge folgendermaßen:

$$l_r = \frac{\Theta}{ml} \quad \left[= l \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{4} \frac{R^2}{l^2}\right) \right]$$

Damit wird die Bewegungsgleichung zu:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l_r} \varphi = 0$$

Man erhält also die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels mit Länge l_r. Dies ermöglicht es den ausgedehnten Körper wie ein idealisiertes Punktteilchen mit Masse m zu beschreiben. Anders ausgedrückt: Der ausgedehnte Körper verhält sich ähnlich wie ein Punktteilchen derselben Masse, welches jedoch an einem masselosen Faden der Länge l_r aufgehängt ist.

Für die Kreisfrequenz und die Periodendauer folgt analog:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{l_r}} = \sqrt{\frac{g}{l \cdot (\frac{4}{3} + \frac{1}{4} \frac{R^2}{l^2})}} \\ T &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_r}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l \cdot (\frac{4}{3} + \frac{1}{4} \frac{R^2}{l^2})}{g}} \end{aligned}$$

bzw. mit Bezug auf die Zylinderlänge L:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{l_r}} = \sqrt{\frac{g}{L \cdot (\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{R^2}{L^2})}} \\ T &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_r}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L \cdot (\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{R^2}{L^2})}{g}} \end{aligned}$$

Nun soll untersucht werden, ob sich die Schwingungsdauer ändert, falls man eine zusätzliche Masse m_z im Abstand l_r anbringt. Wir nehmen diese Masse als punktförmig an. Damit verschiebt sich der Schwerpunkt:

$$\widetilde{l} = \frac{ml + m_z l_r}{m + m_z}$$

Auch ändert sich das Trägheitsmoment zu:

$$\begin{aligned} \Theta' &= \Theta + m_z l_r^2 \\ &= \frac{4}{3}ml^2 + \frac{1}{4}mR^2 + m_z l^2 (\frac{4}{3} + \frac{1}{4}\frac{R^2}{l^2})^2 \end{aligned}$$

Damit wird die reduzierte Pendellänge zu:

$$\begin{aligned} l_r' &= \frac{\Theta'}{(m + m_z)\widetilde{l}} = \frac{\Theta'}{ml + m_z l_r} \\ &= \frac{\frac{4}{3}ml^2 + \frac{1}{4}mR^2 + m_z l^2 (\frac{4}{3} + \frac{1}{4}\frac{R^2}{l^2})^2}{ml + m_z l \cdot (\frac{4}{3} + \frac{1}{4}\frac{R^2}{l^2})} \\ &= l \cdot (\frac{4}{3} + \frac{1}{4}\frac{R^2}{l^2}) = l_r \end{aligned}$$

Die reduzierte Pendellänge ändert sich also nicht. Damit ändert sich auch $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_r}{g}}$ nicht!

1.2 Reversionspendel

Das Reversionspendel besteht hier aus einem physikalischen Pendel mit 2 einstellbaren Aufhängungspunkten. Man soll nun die reduzierte Pendellänge l_r bestimmen. Sie ist genau diejenige Länge, die dem Abstand der Aufhängungspunkte entspricht, wenn das Pendel an jedem der Punkte die gleiche Schwingungsdauer zeigt.

Damit folgt dann für die Erdbeschleunigung:

$$g = 4\pi^2 \frac{l_r}{T^2}$$

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass während der Messung die Amplituden nicht zu groß gewählt werden, da sonst die oben benutzte Näherung für kleine Winkel nicht mehr gültig ist!

2 Aufgabe 2

2.1 Fadenpendel

Das Fadenpendel besteht aus einem dünnen Faden der Länge l, an dem ein kugelförmiger Körper der Masse m aufgehängt wird. Dabei werden m und l so gewählt, dass das Trägheitsmoment und die Masse des Fadens vernachlässigbar wird (große Masse m, langer Faden l). Für das Trägheitsmoment gilt dann:

$$\begin{aligned}\Theta &= \Theta_{Kugel} + m(r+l)^2 \\ &= \frac{2}{5}mr^2 + m(r+l)^2 \\ &= \frac{7}{5}mr^2 + ml^2 + 2mrl\end{aligned}$$

Damit folgt für die reduzierte Pendellänge:

$$l_r = \frac{\Theta}{m(l+r)} = \frac{\frac{7}{5}r^2 + l^2 + 2rl}{l+r}$$

Für die Erdbeschleunigung folgt dann wieder:

$$g = 4\pi^2 \frac{l_r}{T^2} = 4\pi^2 \frac{\frac{7}{5}mr^2 + ml^2 + 2mrl}{T^2(l+r)}$$

2.2 große Auslenkungen

Für große Auslenkungen gilt die oben benutzte Nährung $\sin\varphi = \varphi$ nicht mehr. Damit ist folgende Bewegungsgleichung zu lösen:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l_r}\sin\varphi = 0$$

Tut man dies, so folgt für die Periodendauer:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} \cdot (1 + (\frac{1}{2})^2 \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + (\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2 \sin^4\frac{\varphi_0}{2} + (\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^2 \sin^6\frac{\varphi_0}{2} + ...)$$

wobei φ_0 die maximale Amplitude der Schwingung ist. Aufgrund von Dämpfung ist zu erwarten, dass die maximale Amplitude eine Funktion der Zeit sein wird ($\varphi_0 \approx \hat{\varphi} \cdot e^{-\gamma t}$). Damit ist auch die Schwingungsdauer stark abhängig von der Zeit! Hier sind also starke Abweichungen von der Theorie zu erwarten.

3 Aufgabe 3

3.1 gleiche Schwingungsdauer

Hier sollen zwei Pendel «synchronisiert» werden, d.h. die Schwinungsdauer beider Pendel soll gleich sein. Dazu stellt man ein Pendel konstant ein und variiert beim zweiten den Abstand L_z zwischen Drehpunkt und Scheibenmittelpunkt bis die beiden Periodendauern übereinstimmen.

3.2 gekoppelte Pendel

In diesem Versuch werden gekoppelte Schwingungen untersucht. Dazu wird eine Feder im jeweils gleichen Abstand l zu den Drehpunkten an den Pendeln befestigt. Die Differentialgleichungen für die Schwingung lauten dann:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\Omega(x_1 - x_2)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -\Omega(x_2 - x_1)$$

wobei x_i die Auslenkungen aus der Ruhelage sind und $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{\Theta}}$, $\Omega = \sqrt{\frac{Dl^2}{\Theta}}$ (D Federkonstante, L Schwerpunktabstand vom Drehpunkt) ist. Addiert man beide Gleichungen bzw. subtrahiert man sie voneinander so folgt:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) + (\omega_0^2 + 2\Omega)(x_1 - x_2) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + \omega_0^2(x_1 + x_2) = 0$$

Führt man nun neue Koordinaten $y_1 = x_1 - x_2$ und $y_2 = x_1 + x_2$ ein so folgt:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 &= 0 \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{mit} \\ \omega_1^2 &= \omega_0^2 + 2\Omega \\ \omega_2^2 &= \omega_0^2 \end{aligned}$$

Dies sind wieder Differentialgleichungen des harmonischen Oszillators. Durch Superposition der beiden Fundamentallösungen y_1 und y_2 kann jede beliebige Schwingungsform der gekoppelten Pendel realisiert werden. Für y_1 schwingen die Pendel gegenphasig, für y_2 in Phase. Nur die gegenphasige Schwingung hängt also von der zwischen den Pendeln angebrachten Feder ab.

Im Versuch werden die Schwingungsdauern T_{geg} und T_{gl} gemessen und die Kopplungslänge l varriiert. Es ist zu erwarten, dass dabei T_{gl} konstant bleibt und T_{geg} variiert. Außerdem sollte $T_0 = T_{gl}$ gelten. Zudem folgt natürlich dann auch:

$$\begin{aligned}
\frac{mgL}{\Theta} &= \frac{4\pi^2}{T_{gl}^2} \\
\frac{Dl^2}{\Theta} &= \frac{2\pi^2}{T_{geg}^2} - \frac{2\pi^2}{T_{gl}^2}
\end{aligned}$$

bzw:

$$\begin{aligned}
\Theta &= mgL\frac{T_{gl}^2}{4\pi^2} \\
D &= \frac{\Theta}{l^2}(\frac{2\pi^2}{T_{geg}^2} - \frac{2\pi^2}{T_{gl}^2}) = \frac{mgL}{2l^2}(\frac{T_{gl}^2}{T_{geg}^2} - 1)
\end{aligned}$$

Weiterhin soll D auch noch durch 2 andere Messmethoden bestimmt werden:

- statisch:
  Man hängt verschieden Massen m an die Feder und misst die Auslenkung x:
  $$D = \frac{mg}{x}$$
- dynamisch:
  Man benutzt die Feder als Federpendel mit der Eigenfreuquenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{m}{D}}$:
  $$D = 4\pi^2\frac{m}{T^2}$$

3.3 Schwebung

Schwebungen sind Schwingungszustände, deren zeitlicher Maximalamplitudenverlauf $\varphi_0(t)$ periodisch ist. Sie kommen duch Überlagerung von Schwingungen mit verschiedener Frequenz zustande. Die Lösungen der Bewegungsgleichungen kann man mit dem Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen umschreiben zu:

$$x_1 = A\cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega} - \omega_0}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega} + \omega_0}{2}t\right)$$

$$x_2 = A\sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega} - \omega_0}{2}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega} + \omega_0}{2}t\right)$$

Man definiert nun:

$$\begin{aligned}
\omega_{mod} &= \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega} - \omega_0}{2} \\
\omega_{osz} &= \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega} + \omega_0}{2}
\end{aligned}$$

Damit folgt dann:

$$\begin{aligned}
T_{mod} &= \frac{2T_{gl}T_{geg}}{T_{gl} - T_{geg}} \\
T_{osz} &= \frac{2T_{gl}T_{geg}}{T_{gl} + T_{geg}}
\end{aligned}$$