

Vorbereitung

Resonanz

Carsten Röttele

17. Januar 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Drehpendel, freie Schwingungen	3
2	Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen	3
3	Messung der Winkelrichtgröße D^*	4
4	Drehpendel, erzwungene Schwingung	5
5	Serienschwingkreis, erzwungene Schwingung	6

Theoretische Grundlagen

In diesem Versuch beschäftigt man sich mit harmonische Schwingungen, zuerst noch dämpfungsfrei, danach gedämpft. Die allgemeine Schwingungsgleichung lautet:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Man erkennt hier den Dämpfungsfaktor β , weshalb die Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit ist. Außerdem spiegelt die Funktion $f(t)$ eine äußere Kraft wieder, welche die Schwingung antreibt.

Zunächst wird die homogene Lösung $x_h(t)$ betrachtet, für die $f(t) = 0$ ist. Man verwendet dazu den Ansatz $x(t) = c \cdot e^{-\lambda x}$. Durch einsetzen des Ansatzes erhält man:

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Aufgrund der Wurzel gilt es nun drei Fälle zu unterscheiden:

- **Schwingfall** $\beta < \omega_0$: Hier wird der Radikand kleiner als null, weshalb λ komplex wird. Daraus ergibt sich dann für unsere homogene Lösung:

$$x_h(t) = e^{-\beta t} \cdot (c_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} + c_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = A \cdot e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \psi)$$

Hierbei sind c_1, c_2, A Konstanten, die man durch die Anfangsbedingungen berechnen kann und ψ ist die Phasenverschiebung.

Die Schwingung hat hier eine konstante Frequenz, jedoch verkleinert sich die Amplitude mit der Zeit durch die Dämpfung.

- **aperiodischer Grenzfall** $\beta = \omega_0$: Hier ist die Wurzel null, weshalb man für die Lösung erhält:

$$x_h(t) = A \cdot (1 + Bt) \cdot e^{-\beta t}$$

Hier hat man keine Schwingung, sondern das System klingt sich sehr schnell ab.

- **Kriechfall** $\beta > \omega_0$: Jetzt ist der Radikand positiv und man erhält:

$$x(t) = e^{-\beta t} \cdot (c_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + c_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} = A \cdot e^{-\beta t} \cosh(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t)$$

Auch hier gibt es keine Schwingung und das System klingt langsam ab.

Dies sind die Lösungen der homogenen Gleichung. Ist nun $f(t) \neq 0$ so muss man auch noch die Partikuläre Lösung finden und die gesamte Lösung erhält man dann durch Addition der homogenen und partikulären Lösung.

1 Drehpendel, freie Schwingungen

Wir betrachten bei diesem Versuch zunächst ein die Schwingung eines Pohlschen Rades, was ein sogenanntes Drehpendel ist. Dieses besitzt eine Feder, wodurch es bei Schwingungen eine rücktreibende Kraft erfährt. Wir erhalten dadurch folgende Schwingungsgleichung, bei der θ das Trägheitsmoment, γ der Reibungskoeffizient und D die Federkonstante ist:

$$\theta\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + D\varphi = 0$$

Als erstes soll man sich mit dem Messwerterfassungssystem CASSY vertraut machen. Hierzu soll der zeitliche Verlauf des Phasenwinkels, die Winkelgeschwindigkeit sowie die kinetische Energie dargestellt werden. Hierbei ist dann der Verlauf des Phasenwinkels die Lösung der DGL (eine vermutlich periodische Schwingung), die Winkelgeschwindigkeit, die zeitliche Ableitung des Phasenwinkels (lässt sich mit CASSY berechnen). Die kinetische Energie ergibt sich mit der Formel $E = \frac{1}{2}\theta\dot{\varphi}^2$. Da man mit CASSY auch Funktionen angeben kann, brauchen wir für die kinetische Energie nur noch das Trägheitsmoment zu berechnen, damit wir die Formel eingeben können. Dieses lässt sich mithilfe der Daten aus dem Aufgabenblatt berechnen:

$$\theta = \int r^2 dm = \frac{1}{2}V \cdot \rho \cdot (r_a^2 + r_i^2) = \frac{1}{2}\pi(r_a^2 - r_i^2) \cdot d \cdot \rho \cdot (r_a^2 + r_i^2) = 1,39 \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Außerdem soll noch die Phasenraumdarstellung dargestellt werden, was man erhält, indem man den Phasenwinkel über die Phasengeschwindigkeit aufträgt. Auch die Periodendauer soll noch über $T = \frac{2\pi}{\omega}$ berechnet werden, ebenso soll man noch die Dämpfungskonstante β durch Anpassung von der gemessenen Kurve an die berechnete Kurve bestimmt werden, da durch Reibung die Schwingung gedämpft wird.

2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen

Wie in der vorherigen Aufgabe soll man wieder Schwingungen durchführen, nur dieses Mal mit einer Wirbelstrombremse bei Strömen von $I_B = 100, 200, 400, 700 \text{mA}$. Wieder sollen die Winkel-Zeit-Diagramme aufgezeichnet werden und die Dämpfungskonstante β per Hand bestimmt werden. Alternativ kann man die Dämpfungskonstante aber auch berechnen über das Dämpfungsverhältnis k :

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \text{ bzw. } k = \sqrt[n]{\frac{\Phi_0}{\Phi_n}}$$

Da $k = e^{\beta T}$ gilt, folgt daraus: $\beta = \frac{\ln(k)}{T}$.

Im Allgemeinen ist das arithmetische Mittel besser geeignet, da wir hier mehr Messwerte zum berechnen nehmen, wodurch sich der statistische Fehler verringert. Jedoch ist es in

diesem Fall sehr aufwendig, da wir vor allem bei niedriger Dämpfung sehr viele Schwingungen hierzu betrachten müssten, weshalb wahrscheinlich die zweite Formel sinnvoller ist.

Weil die Dämpfung praktisch keine Auswirkung auf die Periodendauer hat, sollte man keine I_B -Abhängigkeit von T feststellen können. Dies kann man sehen, indem man die Periodendauer mit der Taylor-Formel nähert:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0(1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2})} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} (1 + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\omega_0^2} + \dots) \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Dies können wir machen, da wir uns im Schwingfall befinden, wo $\beta \ll \omega_0$ gilt.

Außerdem soll jetzt noch die Dämpfungskonstante in Abhängigkeit des Wirbelstroms bestimmt werden. Hierbei ist es wichtig, dass man die Dämpfung $\beta(0)$, die man im ersten Aufgabenteil bestimmt hat, abzieht. Deswegen gilt:

$$\beta_{\text{kor}}(I_B) = \beta(I_B) - \beta(0)$$

Da die Dämpfung proportional zur Kraft ist und in diesem Fall die Lorentzkraft für die Dämpfung verantwortlich ist, folgt:

$$F = I \cdot l \cdot B = \mu_0 n \cdot l \cdot I^2 = \text{const} \cdot I^2$$

Somit ist β proportional zu I^2 . Des weiteren gilt für den I_B -Wert der Grenzdämpfung:

$$I_{B,Gr.} = \sqrt{\frac{\omega_0}{\text{const}}}. \text{ Diese Wert sollen noch experimentell bestimmt werden.}$$

Als letztes soll hier noch der Gütefaktor berechnet werden, für den folgende Formel gilt:

$$Q = 2\pi \frac{\varphi_{\text{max}}^2(t)}{\varphi_{\text{max}}^2(t) - \varphi_{\text{max}}^2(t-T)} = 2\pi \frac{e^{-2\beta t}}{e^{-2\beta t} - e^{-2\beta(t+T)}} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}$$

3 Messung der Winkelrichtgröße D^*

Nun soll die Winkelrichtgröße D^* gemessen werden. Hierzu sollen drei verschiedene Gewichte an den Zeiger des Pendels mittels eines Fadens gehängt werden, um danach die Winkelauslenkung zu messen. Hierbei ist zu beachten, dass der Faden durch die Randnut verläuft, damit beim Kreuzprodukt des Drehmomentes die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Es gilt dann:

$$D^* \varphi = M = F \cdot r \Rightarrow D^* = \frac{F \cdot r}{\varphi}$$

Außerdem können wir über die Eigenfrequenz jetzt noch mal das Trägheitsmoment bestimmen und es dann mit dem Theoriewert aus Aufgabe 1 vergleichen:

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T(0)^2} = \frac{D^*}{\theta} \rightarrow \theta = \frac{D^* T(0)^2}{4\pi^2}$$

4 Drehpendel, erzwungene Schwingung

Im nächsten Aufgabenteil hat man wieder zwei Bremsströme von 400 und 200mA, dieses Mal aber noch zusätzlich eine antreibende Kraft der Form:

$$f(t) = k \cos(\Omega t) = \frac{M_0}{\theta} \cos(\Omega t)$$

Es soll dieses Mal die Resonanzkurve $\varphi(\Omega)$ aufgetragen werden. Wir bekommen folgende DGL:

$$\theta \ddot{\varphi} + 2\beta \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{M_0}{\theta} \cos(\Omega t)$$

Wie schon in den theoretischen Grundlagen erklärt erhalten wir die Lösung durch Zusammensetzen der homogenen und partikulären Lösung $\varphi(t) = A_1 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \psi_1) + A_2 \cos(\Omega t + \psi_2)$, wobei jedoch nach einer gewissen Zeit die homogene Lösung gegen null geht und somit nur noch die antreibende Kraft für die Schwingung sorgt. Es gilt dann:

$$\varphi(t) = A \cos(\Omega t + \psi)$$

Hierbei gilt für die Phasenverschiebung und die Amplitude:

$$\psi = \arctan\left(\frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

$$A = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}}$$

Man soll nun die Phasenverschiebung für drei verschiedene Fälle betrachten:

- Weit unterhalb der Resonanzfrequenz ($\Omega \ll \omega_0$):
Man hat hier fast keine Auswirkung der Eigenfrequenz auf die Schwingung, weshalb die Phasenverschiebung $\psi \approx 0$ ist.
- Weit oberhalb der Resonanzfrequenz ($\Omega \gg \omega_0$):
Jetzt ist die angeregte Kraft treibend, deshalb ist $\psi \approx -\pi$.
- In der Nähe der Resonanzfrequenz ($\Omega \approx \omega_0$):
Hier geht der Bruch gegen unendlich, deshalb gilt $\psi \approx -\frac{\pi}{2}$.

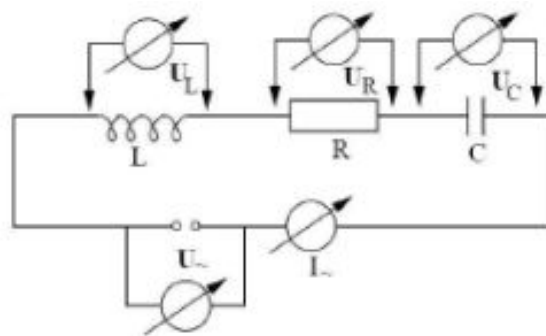
Die Amplitude wird hingegen maximal bei $\Omega_{Res} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Schließlich soll noch der Gütefaktor bestimmt werden, welchen man über die Breite der Resonanzkurve erhält. Man betrachtet die beiden Punkte ω_1 und ω_2 , bei welchen die Amplitude nur noch ein $\sqrt{2}$ -tel so groß wie bei der Resonanzamplitude ist. Mit dem Abstand der beiden Punkte $\Delta\omega$ lässt sich dann der Gütefaktor berechnen:

$$\Delta\omega \approx 2\beta = \frac{\omega_0}{Q} \rightarrow Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

5 Serienschwingkreis, erzwungene Schwingung

In der letzten Aufgabe wird ein Serienschwingkreis mit folgendem Schaltplan untersucht:



Es werden hier also elektromagnetische Schwingungen untersucht, bei der ein Kondensator, eine Spule und ein Widerstand in Reihe geschaltet sind. Über das Kirchhoffsche Gesetz bekommt man die Schwingungsgleichung:

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) \Rightarrow \ddot{I}(t) + \frac{L}{R}\dot{I}(t) + \frac{1}{LC}I(t) = \frac{\dot{U}(t)}{L}$$

Wenn wir nun $\beta = \frac{R}{2L}$ und $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ setzen, so erhalten wir die normale Schwingungsgleichung. Wir erhalten dann die Lösung wieder durch addieren der homogenen und inhomogenen Lösung als:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t + \psi) + I_0 e^{i\omega t + \psi} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Die Stromstärke I_0 berechnet man mithilfe der Impedanz:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Außerdem kann man die Resonanzfrequenz bestimmen mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Daten und man erhält:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \approx 8298,8 \frac{1}{s} \Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 1320,8 Hz$$

Auch die Phasenverschiebung lässt sich wieder berechnen als:

$$\psi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Man soll nun bei verschiedenen Dämpfungswiderständen die Resonanzkurve messen und danach die Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz aufzeichnen. Wiederum kann man den Gütefaktor aus der Resonanzbreite bestimmen, oder berechnen als:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = R\omega_0 C = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q} \Rightarrow Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Man erkennt, dass der Gütefaktor auch viel größer als 1 werden kann, z.B. beim Resonanzfall, was gleichzeitig bedeutet, dass U_L und U_C U_0 in diesem Fall übersteigen. Dies wird als Spannungsüberhöhung bezeichnet, womit man ebenfalls den Gütefaktor bestimmen kann:

$$\begin{aligned} |U_L(\omega_0)| &= |L\dot{I}| = \omega_0 \frac{L}{R} U_0 = QU_0 \\ |U_C(\omega_0)| &= \left| \frac{1}{C} \int I dt \right| = \frac{1}{\omega_0 CR} = QU_0 \end{aligned}$$

Wenn man nach dem Gütefaktor auflöst, erhält man somit:

$$Q = \frac{|U_L(\omega_0)|}{U_0} = \frac{|U_C(\omega_0)|}{U_0}$$

Vorbereitung

Resonanz

Stefan Schierle

Versuchsdatum: 17. 01. 2012

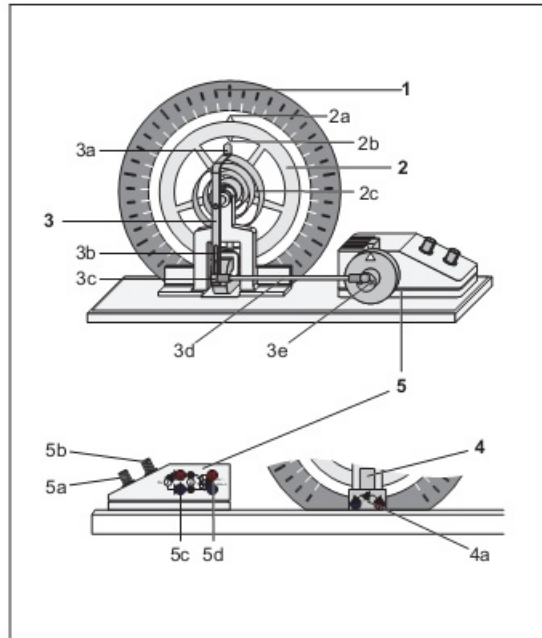
Inhaltsverzeichnis

1	Drehpendel, freie Schwingung	2
1.1	Der Versuchsaufbau	2
1.2	Trägheitsmoment des Pendelkörpers	2
1.3	Harmonische Schwingung	3
2	Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung	4
3	Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße D^*	5
4	Drehpendel, erzwungene Schwingungen	6
5	Serienschwingkreis, erzwungen Schwingungen	7

1 Drehpendel, freie Schwingung

1.1 Der Versuchsaufbau

Dieser Versuch wird mit Hilfe eines Pohlschen Rades durchgeführt.



Pohlsches Rad - Quelle:Leybold-PohlschesRad.pdf der Literatur

Dabei wird der Pendelkörper(2) ausgelenkt, den Grad der Auslenkung kann man anhand des Skalenrings(1) und der Markierung(2b) bestimmen. Auf den Ausgelenkten Pendelkörper wirkt das rückstellende Moment der Schneckenfeder(2c), wodurch ohne weitere äußere Einflüsse eine harmonische Schwingung erzeugt wird. Diese wird jedoch durch die nicht ideale Aufhängung des Pendelkörpers leicht gedämpft, durch die so entstehende Reibung.

Der Schwingungsverlauf lässt sich durch den Erreger(3) und die Wirbelstrombremse(4) beeinflussen.

1.2 Trägheitsmoment des Pendelkörpers

Der oben schon erwähnte Pendelkörper besteht aus einem Kupferring, dessen Trägheitsmoment hier in der Vorbereitung berechnet werden soll:

Es werden die gegebenen Werte der Aufgabenstellung verwendet; $\rho = 8,96 \frac{g}{cm^3} = 8,96 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$, Innenradius $r_i = 0,0747m$, Außenradius $r_a = 0,0947m$, Dicke $d = 0,002m$

$$\begin{aligned}
\Theta &= \int_{r_i}^{r_a} r^2 dm \\
&= \rho \int_{r_i}^{r_a} r^2 dV \\
&= \rho \int_{r_i}^{r_a} r^2 \cdot d \cdot 2\pi r dr \\
&= \rho \cdot d \cdot 2\pi \int_{r_i}^{r_a} r^3 dr \\
&= \frac{1}{2} \rho d \pi (r_a^4 - r_i^4) \\
&= 1,39 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2
\end{aligned}$$

1.3 Harmonische Schwingung

Die harmonische Schwingung des Pendelkörpers lässt sich durch folgende Differenzialgleichung in Abhängigkeit der Winkelauslenkung, der Winkelgeschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung beschreiben:

$$\Theta \ddot{\varphi} = -D^* \varphi - \varrho \dot{\varphi} + f(t)$$

Hierbei sind D^* die Federkonstante und ϱ die Dämpfung. Was sich umschreiben lässt als:

$$\begin{aligned}
\omega_0^2 &= \frac{D^*}{\Theta} & 2\gamma &= \frac{\varrho}{\Theta} \\
\ddot{\varphi} + 2\gamma \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi &= f(t)
\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich durch den Ansatz $\varphi(t) = c \cdot e^{\lambda t}$ lösen. Dies ist nur der partikuläre Lösungsteil, da hier aber eine Schwingung ohne äußere Anregung betrachtet werden soll, also $f(t) = 0$ gilt, ist diese Lösung völlig ausreichend.

$$\begin{aligned}
\lambda^2 \cdot c \cdot e^{\lambda t} + 2\gamma \lambda \cdot c \cdot e^{\lambda t} + \omega_0^2 \cdot c \cdot e^{\lambda t} &= 0 \\
\lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2 &= 0 \\
\lambda_{1,2} &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}$$

Nun muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden, da der Wurzelterm reell, komplex oder Null sein kann. Bei diesem Versuch ist nur der Schwingfall mit schwacher Dämpfung durch Reibung von Bedeutung. Die anderen beiden Fälle werden der Vollständigkeit halber mit aufgeführt.

- **Schwingfall (schwach gedämpft):** $\gamma < \omega_0$

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \\ \Rightarrow \varphi(t) &= ae^{-\gamma t} \cdot e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t} + be^{-\gamma t} \cdot e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t} & \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \\ &= ae^{-\gamma t} (\cos \omega_e t + i \sin \omega_e t) + be^{-\gamma t} (\cos \omega_e t - i \sin \omega_e t) \\ &= e^{-\gamma t} (A \cos \omega_e t + B \sin \omega_e t)\end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = A$ erhält man als Lösung:

$$\varphi(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_e t + \psi_1)$$

Es findet also eine Schwingung mit exponentiell abfallender Amplitude statt.

- **Kriechfall:** $\gamma > \omega_0$

$$\varphi(t) = A \cdot e^{-\gamma t} \cosh(\omega t + \psi)$$

Beim Kriechfall kehrt das anfänglich ausgelenkte Drehpendel "kriechend" in die Ausgangsposition zurück.

- **aperiodischer Grenzfall:** $\gamma = \omega_0$

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\gamma t} (1 + \gamma t)$$

Der aperiodische Grenzfall ist der am schnellsten abfallende Kriechfall, das Pendel schwingt in diesem Fall am schnellsten in den Ruhepunkt zurück, wo es verbleibt.

Beim Versuch soll nun der zeitliche Verlauf des Phasenwinkels und der kinetischen Energie ($E_{kin} = \frac{1}{2} \Theta \dot{\varphi}^2$) mit dem Auswertungsprogramm CASSY. Ebenfalls soll ein Phasenraumdiagramm der Schwingung erstellt, sowie die Periodendauer und die Dämpfungskonstante (γ) bestimmt werden.

γ wird durch das Angleichen der Theoretischen Kurve an die experimentell ermittelte Kurve bestimmt, indem γ variiert wird.

2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung

Nun soll eine Dämpfung durch die Wirbelstrombremse mit unterschiedlich starken Strömen (100, 200, 400, 700 mA) untersucht werden.

analog zu Aufgabe 1 soll nun wiederum die Dämpfungskonstante ermittelt werden. Zudem soll auch aus dem Dämpfungsverhältnis k die Dämpfungskonstante ermittelt werden. Für k sind zwei Formeln in Abhängigkeit der optimalen Schwingzahl n gegeben, von denen die zweckmäßigere gewählt werden soll:

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_i} \qquad k = \sqrt[n]{\frac{\varphi_0}{\varphi_n}}$$

$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_i}$ ist der genauere Term, da hier durch die Verwendung von mehr als zwei Messwerten (für $n > 1$) der statistische Fehler verringert wird. Jedoch ist dies bei vielen Messwerten ein sehr aufwändiges Verfahren, sodass die andere Formel hier effektiver eingesetzt wäre. Die endgültige Auswahl sollte also von der Anzahl der Messwerte abhängig gemacht werden.

Die Dämpfung durch die Wirbelstrombremse beeinflusst im Normalfall nur die Amplitude der Schwingung und nicht die Periodendauer, daher sollte diese keine Abhängigkeit vom Spulenstrom (I_B) aufweisen.

Da die gesamte Dämpfung aber von der Wirbelstrombremse und der Reibung der Lagerung abhängt, muss zur Ermittlung der reinen Dämpfung der Wirbelstrombremse eine korrigierte Dämpfungskonstante ($\beta_{\text{kor}})$ ermittelt werden

$$\beta_{\text{kor}} = \beta(I_B) - \beta(0)$$

Die vom Strom abhängende dämpfende Kraft lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} F &= I_B \cdot Bl \\ &= \mu I^2 n \end{aligned}$$

daraus ist klar ersichtlich, dass die Dämpfung von I^2 abhängt.

Der Gütefaktor gibt das Verhältnis von Schwingungsenergie zum Energieverlust pro Periode dar:

$$Q = 2\pi \frac{\dot{\varphi}^2(t)}{\dot{\varphi}^2(t) - \dot{\varphi}^2(t+T)} = \frac{\omega_0}{2\beta(I_B)}$$

3 Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße D^*

Die Winkelrichtgröße der Schneckenfeder lässt sich bestimmen, indem man Gewichte (5, 10, 20 g) an den Zeiger des Pendelrades hängt und dieses in beide Richtungen auslenkt. Die Winkelrichtgröße lässt sich nun über das Drehmoment bestimmen.

$$\begin{aligned} M &= |\vec{r} \times \vec{F}(t)| = D^* \varphi(t) \\ D^* &= \frac{r_a \cdot F(t)}{\varphi(t)} \end{aligned}$$

Ebenfalls soll aus der so ermittelten Winkelrichtgröße das Trägheitsmoment des Drehpendels bestimmt werden.

Aus $\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}$ und $\omega_0 = \frac{2\pi}{T(0)}$ lässt sich eine Formel zur Berechnung des Trägheitsmomentes herleiten:

$$\Rightarrow \Theta = \frac{D^* \cdot T^2(0)}{4\pi^2}$$

Das so bestimmte Trägheitsmoment soll nun mit dem in Aufgabe 1 theoretisch ermittelten Wert verglichen werden.

4 Drehpendel, erzwungene Schwingungen

Es soll hier eine erzwungene Schwingung betrachtet werden, was bedeutet, dass der Anregungsterm $f(t)$ aus 1.3 nicht Null ist, sondern $f(t) = C \cos(\Omega t + \psi)$. Hierbei sind Ω die Frequenz der angelegten Erregerschwingung und ψ die Phasenverschiebung. Nun wird also die partikuläre Lösung der Differenzialgleichung betrachtet, die mit dem Ansatz $\varphi(t) = A \cdot e^{i\Omega t + \psi}$ gelöst werden kann, wobei A und ψ

$$A = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} \quad \psi = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

Somit ist die allgemeine Lösung der DGL:

$$\varphi(t) = A \cdot e^{-\gamma t} \cos(\omega) + C \cdot e^{i\Omega t + \psi_2}$$

Anhand dieser Gleichung lässt sich erkennen, dass durch den exponentiellen Abfall des homogenen Teiles nach einer gewissen Zeit nur noch die erregende Schwingung im Experiment zu erkennen ist. Jedoch ist die eigentliche Schwingung zur Erregerschwingung um ψ Phasenverschoben.

Eben diese Phasenverschiebung soll in drei Fällen betrachtet werden, unterhalb, bei und oberhalb der Resonanzfrequenz:

- Unterhalb der Resonanzfrequenz ($\Omega \ll \omega_e$): Hier hat die von außen angelegte Schwingung kaum Einfluss auf die tatsächliche Schwingung. Daher gilt hier: $\psi \approx 0$
- Nahe der Resonanzfrequenz ($\Omega \approx \omega_e$): Hier liegt die Phasenverschiebung bei $\psi \approx -\frac{\pi}{2}$
- Oberhalb der Resonanzfrequenz ($\Omega \gg \omega_e$): Hier tritt eine Phasenverschiebung von $\psi \approx -\pi$

Den Gütefaktor dieser Schwingung erhält man durch

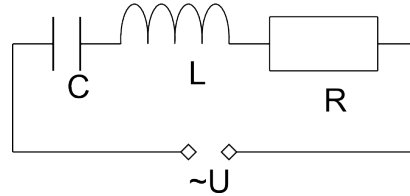
$$Q = \frac{\omega_e}{2\beta} = \frac{\omega_e}{\Delta\omega}$$

Hierbei entspricht $\Delta\omega_e$ der Frequenzdifferenz mit $A = \frac{A_{res}}{\sqrt{2}}$

5 Serienschwingkreis, erzwungen Schwingungen

In diesem Versuchsteil soll ein elektrischer Schwingkreis untersucht werden.

Schaltbild Serienschwingkreis:



Beim elektrischen Serienschwingkreis macht man sich die Phasenverschiebung des Stromes an Spule und Kondensator zu Nutze. Ebenfalls liegt eine antreibende Wechselspannung am Schwingkreis an.

Aus der Kirchhoffschen Maschenregel lässt sich nun folgende Beziehung herleiten:

$$\begin{aligned} U_0(t) &= U_L(t) + U_C(t) + U_R(t) \\ &= L\dot{I}(t) + \frac{\int I(t)dt}{C} + r \cdot I(t) \\ \Rightarrow \ddot{I}(t) + \frac{R}{L}\dot{I}(t) + \frac{1}{LC}I(t) &= \frac{\dot{U}_0(t)}{L} \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich analog zur mechanischen Schwingung lösen, indem man $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ und $2\gamma = \frac{R}{L}$ einsetzt. Eben wegen der Analogie zur mechanischen Schwingung kann man deren allgemeine Lösung praktisch übernehmen, wobei zu beachten ist, dass $\omega_e = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ und die Amplitude I_0 sind.

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_e t + \psi) + I_0 \cdot e^{i\omega t + \psi}$$

Hier fällt durch die Dämpfung des Widerstandes der homogene Lösungsteil ebenfalls nach einer gewissen Zeit so weit ab, dass nur noch der partikuläre Teil ($I(t) = I_0 \cdot e^{i\omega t + \psi}$) von Relevanz ist.

I_0 lässt sich dann einfach über das ohmsche Gesetz bestimmen:

$$I = \frac{U_0}{|Z|} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Ebenfalls kann die Phasenverschiebung auch wie bei der mechanischen Schwingung via $\tan \psi = \frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)}$ bestimmt werden.

$$\psi = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$$

Der Resonanzfall tritt bei $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, was bei den gegebenen Werten $\omega = 8,3 \cdot 10^3 \frac{1}{s}$ wäre, auf.

Der noch zu bestimmende Gütefaktor lässt sich mit $Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ errechnen.

Auswertung

Resonanz

Carsten Röttele Stefan Schierle

Versuchsdatum: 17.01.2012

Inhaltsverzeichnis

1	Drehpendel, freie Schwingungen	2
1.1	Phasenwinkel-Zeit-Diagramm	2
1.2	Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Diagramm	3
1.3	Energie-Zeit-Diagramm	3
1.4	Phasenraumdiagramm	4
1.5	Bestimmung der Periodendauer	5
1.6	Ermittlung der Dämpfung	5
2	Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen	6
2.1	Phasenwinkel-Zeit-Diagramm für $I_B = 100\text{mA}$	6
2.2	Phasenwinkel-Zeit-Diagramm für $I_B = 200\text{mA}$	6
2.3	Phasenwinkel-Zeit-Diagramm für $I_B = 400\text{mA}$	7
2.4	Phasenwinkel-Zeit-Diagramm für $I_B = 700\text{mA}$	7
2.5	Bestimmung der Dämpfungskonstanten	8
2.6	Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses durch k	8
2.7	Experimentelle Bestimmung des Stromes bei der Grenzdämpfung	9
2.8	Bestimmung der Güte der Schwingungen	10
3	Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße D^*	11
4	Drehpendel, erzwungene Schwingungen	12
5	Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen	14

1 Drehpendel, freie Schwingungen

In dieser Aufgabe sollen mehrere Graphen mit den spezifischen Eigenschaften der durchgeführten Schwingung erstellt werden.

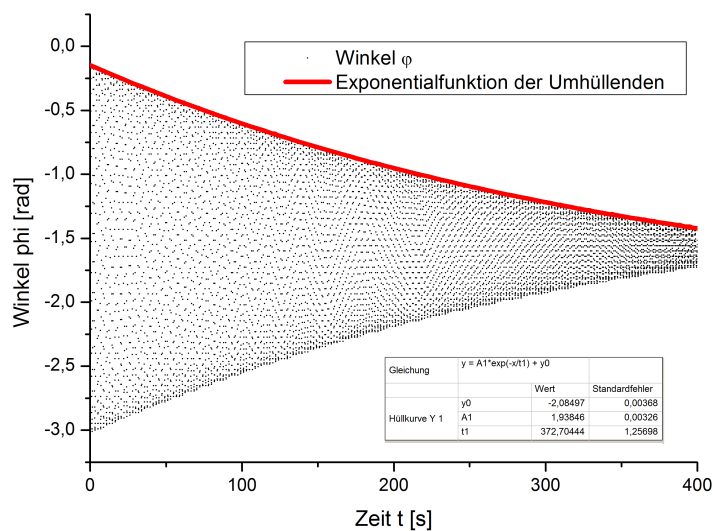
Das Messwerterfassungssystem CASSY bietet hier die Möglichkeit die messbare Eingangsgröße durch das Eingeben der jeweiligen Berechnungsformel in die gesuchte Größe umzurechnen. Die zu ermittelnden Graphen werden zeitgleich mit der Werteerfassung des Programms erstellt.

Gesucht werden in dieser Aufgabe ein φ - t -, ein ω - t -, ein E_{kin} - t - und ein $\dot{\varphi}$ - φ -Diagramm (Phasenraumdiagramm).

1.1 Phasenwinkel-Zeit-Diagramm

Hier musste der Phasenwinkel φ in CASSY berechnet werden, da durch die Lichtschranke und die Löcher am Rad nur die zurückgelegte Wegstrecke ausgegeben wird.

Dadurch lässt sich folgendes Diagramm erstellen:



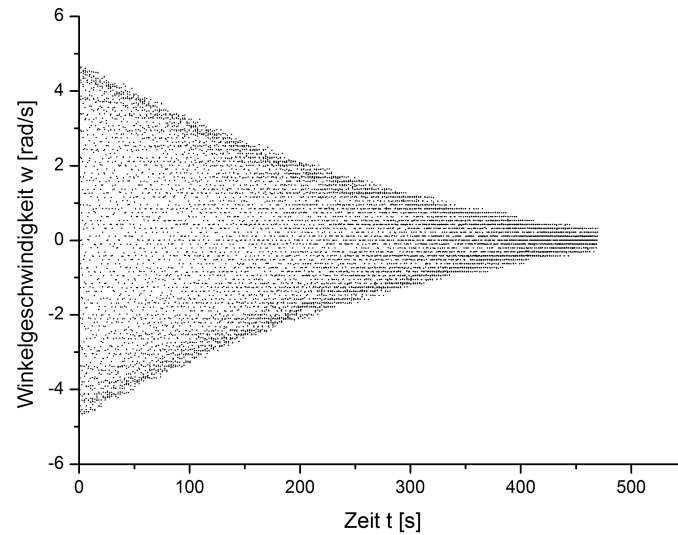
φ - t -Diagramm

Da hier sehr viele Messpunkte genommen wurden, und nur eine Betrachtung eines kürzeren Zeitabschnittes keine sichtbare Dämpfung aufweist, haben wir die Punkte nicht zu einer Schwingungskurve verbunden, um einen total schwarzen Graphen zu vermeiden.

In diesem Diagramm ist jedoch sehr schön die Dämpfung zu erkennen, die durch die Umhüllende und deren Fit in Origin bestimmt werden kann.

1.2 Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Diagramm

Zur Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit ließen wir in CASSY die zeitliche Ableitung des Phasenwinkels errechnen.

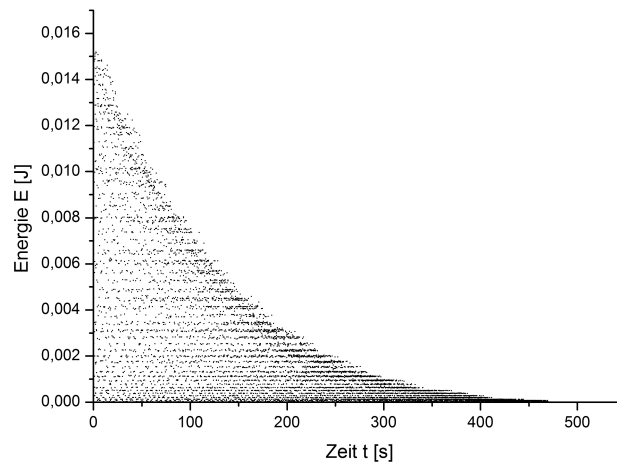


ω - t -Diagramm

Hier hatten wir das gleiche Problem der relativ kurzen Schwingungsdauer bei nur "geringer" Dämpfung.

1.3 Energie-Zeit-Diagramm

Die kinetische Energie lässt sich durch $E_{kin} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$ errechnen. Als Trägheitsmoment in der Formel verwendeten wir den in der Vorbereitung bereits grob errechneten Wert von $\Theta = 1,39 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$.

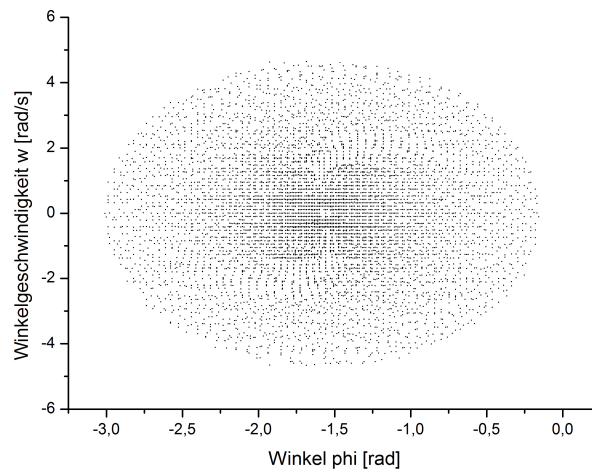


E_{kin} - t -Diagramm

In diesem Diagramm sieht man die Dämpfung noch stärker, da das gedämpfte φ zwar nur in der Ableitung aber dennoch quadratisch vorkommt.

1.4 Phasenraumdiagramm

Beim Phasenraumdiagramm wird die Winkelgeschwindigkeit (ω) über den Phasenwinkel aufgetragen. Wir ließen dies in CASSY simpler Weise mit den schon errechneten Werten von ω und φ durchführen.



ω - φ -Diagramm

Hier ist aufgrund der oben schon erwähnten Datendichte im Diagramm ein Verbinden der Punkte zu einer Kurve eher ungeschickt. Jedoch kann man aus den Beobachtungen während des Versuchs feststellen, dass die Punkte in einer Spiralbahn von außen nach innen verlaufen, was wiederum aus der Dämpfung resultiert.

1.5 Bestimmung der Periodendauer

Die Periodendauer lässt sich einfach aus zwei Messpunkten bestimmen. Wir wählen hierfür das Maximum einer Schwingung bei T_1 und das einer Schwingung bei T_{15} , deren Amplituden sich nicht wesentlich unterscheiden, damit ein repräsentativer Mittelwert entsteht.

$$T = \frac{\Delta T}{n} = \frac{T_{15} - T_1}{15} = 1,28s$$

1.6 Ermittlung der Dämpfung

Durch die nicht reibungsfreie Lagerung des Pohlschen Rades entsteht Stokes'sche Reibung, welche die Schwingung dämpft. Diese Dämpfung kommt in der Differenzialgleichung der Schwingung als $2\beta\dot{\varphi}$ vor. Durch die an den Graphen gelegte Einhüllende lässt sich die so gesuchte Dämpfungskonstante durch die Fit-Funktion der Einhüllenden ermitteln. Origin gibt uns hierbei gleich die benötigten Daten in der Tabelle des φ - t -Diagrammes aus.

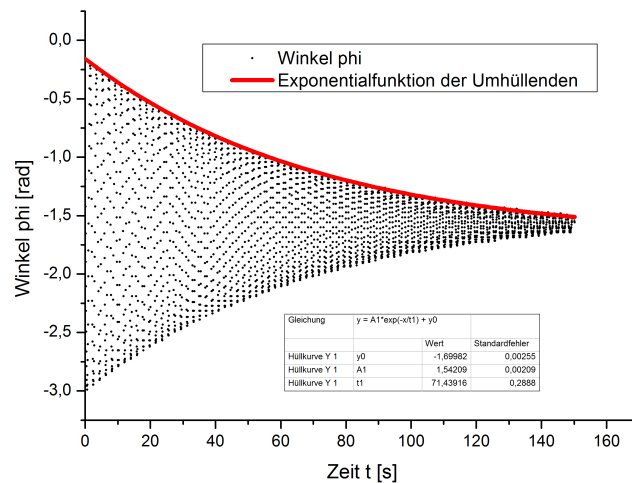
$$t_1 = 370,704s$$

$$\beta = \frac{1}{t_1} = 2,698 \cdot 10^{-3} \frac{1}{s}$$

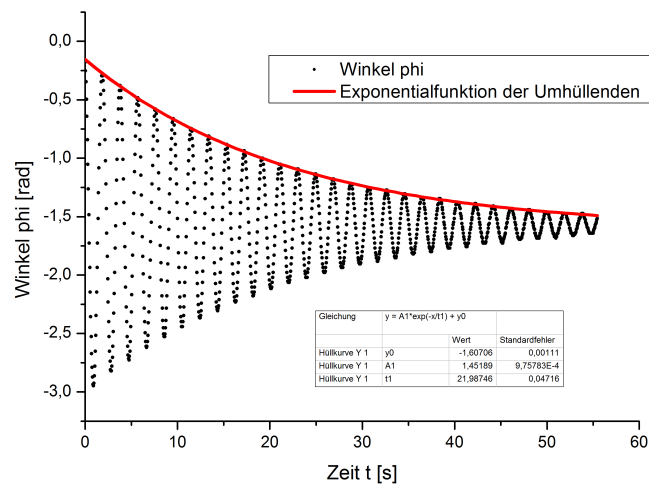
2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen

Nun sollen Phasenwinkel-Zeit-Diagramme bei Betrieb der Wirbelstrombremse mit vier unterschiedlichen Spulenströmen erstellt werden. Durch die in der Aufgabenstellung vorgegebenen Stromstärken von $I_B = 100, 200, 400$ und 700 mA ergeben folgende Graphen:

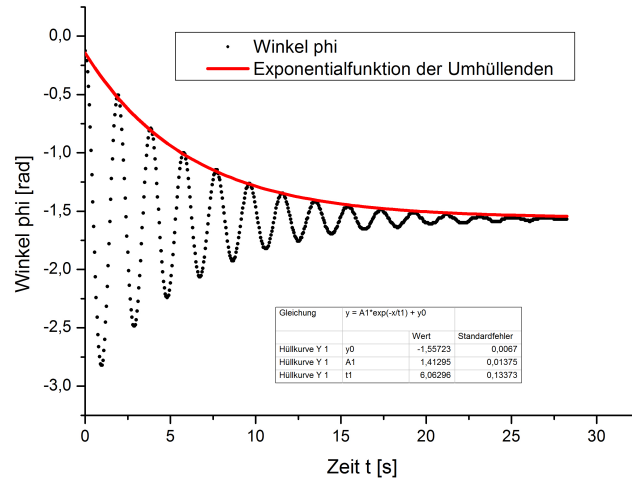
2.1 Phasenwinkel-Zeit-Diagramm für $I_B = 100\text{mA}$



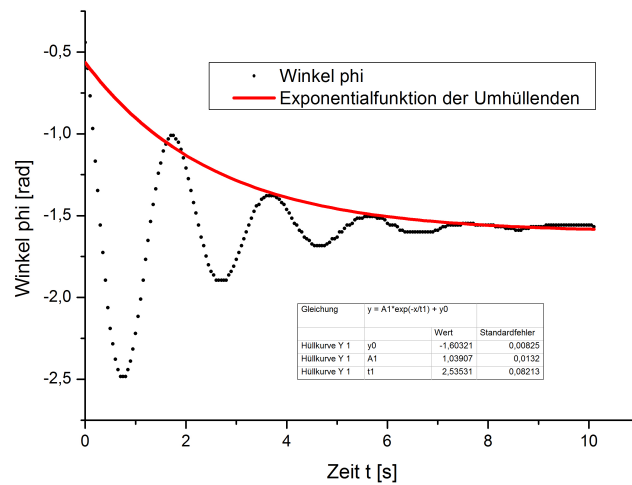
2.2 Phasenwinkel-Zeit-Diagramm für $I_B = 200\text{mA}$



2.3 Phasenwinkel-Zeit-Diagramm für $I_B = 400\text{mA}$



2.4 Phasenwinkel-Zeit-Diagramm für $I_B = 700\text{mA}$



Wie man an den Graphen erkennt, ist die Skalierung der y-Achse (Phasenwinkel) etwas unschön gewählt, jedoch ist dies für die weiteren Rechnungen nicht von Bedeutung, da die Amplitude immer als Spitze-Spitze-Wert bestimmt wurde, und der Schnittpunkt der Fit-kurve mit der y-Achse nicht relevant ist.

2.5 Bestimmung der Dämpfungskonstanten

Die Dämpfungskonstante β lässt sich hier wieder analog zur Vorgehensweise aus Aufgabe 1 ermitteln ($\beta = \frac{1}{t_1}$). Die jeweiligen Werte für t_1 lassen sich wieder aus den Fit-Daten der Einhüllenden aus Origin entnehmen. Es ergeben sich folgende Werte

100 mA: $\beta = 0,0140 \frac{1}{s}$

200 mA: $\beta = 0,0455 \frac{1}{s}$

400 mA: $\beta = 0,1649 \frac{1}{s}$

700 mA: $\beta = 0,3944 \frac{1}{s}$

2.6 Bestimmung des Dämpfungsverhältnis durch k

Wir müssen nun noch für die Bestimmung der Dämpfungskonstanten β zuerst das Dämpfungsverhältnis k bestimmen. Hierzu sind in der Aufgabenstellung 2 Formeln gegeben. Es ist möglich mehrere (n) Schwingungen zu betrachten, da die Dämpfung sich im Schwingfall nur auf die Amplitude auswirkt, die Schwingungsdauer sollte unbeeinflusst bleiben, was sich auch leicht an den Phasenwinkel-Zeit-Diagrammen erkennen lässt.

Wir wählen $k = \sqrt[n]{\frac{\varphi_0}{\varphi_n}}$ mit n als Schwingungsanzahl, da diese Formel den geringeren Rechenaufwand mit sich bringt und nur minimal ungenauere Ergebnisse als $k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_0}{\varphi_n}$ liefert.

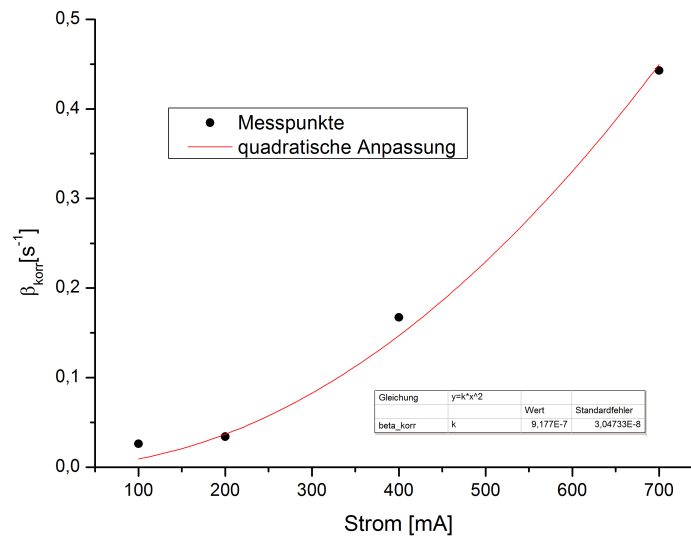
Mit Hilfe von k kann nun β durch $\beta(I_B) = \ln\left(\frac{k}{T}\right)$ bestimmt werden.

Den korrigierten Wert von β erhalten wir durch einfache Subtraktion des Stokes'schen Dämpfungswertes aus Aufgabe 1 ($\beta_{\text{kor}} = \beta(I_B) - \beta(0)$).

Somit erhalten wir folgende Werte als Tabelle:

I_B	T	$\beta(\text{Umhüllung})$	k	$\beta(\text{aus } k)$	β_{kor}	Q
mA	s	s^{-1}		s^{-1}	s^{-1}	
100	1,92	0,0140	1,0565	0,0286	0,0259	57,15982
200	1,93	0,0455	1,0734	0,0367	0,0340	44,35324
400	1,93	0,1649	1,3878	0,1698	0,1671	9,58622
700	1,85	0,3944	2,2805	0,4456	0,4429	3,81079

Nun kann man die Dämpfungskonstante β gegen die zugehörige Stromstärke I_B auftragen:



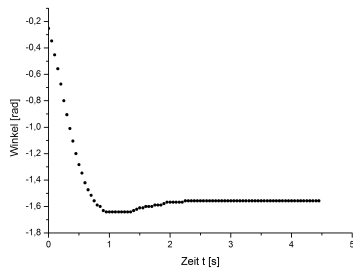
Da die Dämpfung, wie bereits in der Vorbereitung hergeleitet, proportional zu I_B^2 ist, lässt sich $\beta(I_B)$ sehr schön durch einen quadratischen Fit ($y = k_i \cdot x^2$) bestimmen.

Durch die Kenntnis eben dieser Konstanten $k_i = 9,177 \cdot 10^{-7} \frac{1}{s \cdot mA^2}$ lässt sich nun die Spulenstromstärke für die Grenzdämpfung experimentell ermitteln. Dabei wählen wir die Schwingungsdauer von $T = 1,93$ s aus der obigen Tabelle.

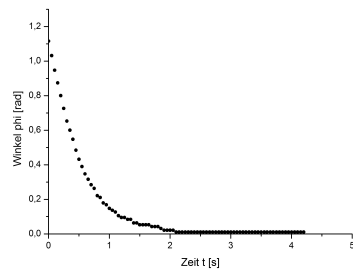
$$\begin{aligned}
 I_{B,GD} &= \sqrt{\frac{\omega_0}{k_i}} = \sqrt{\frac{2\pi}{T \cdot k_i}} \\
 &= 1883,48 mA = 1,88 A
 \end{aligned}$$

2.7 Experimentelle Bestimmung des Stromes bei der Grenzdämpfung

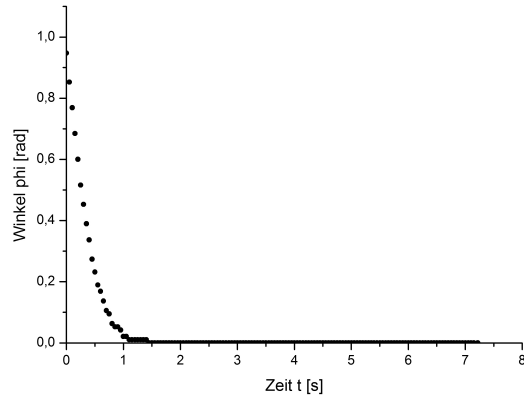
Außerdem soll die Grenzdämpfung auch noch experimentell bestimmt werden. Um diese zu bestimmen, erhöhen wir den Spulenstrom I_B der Wirbelstrombremse auf den etwaigen Erwartungswert und bestimmen so graphisch die Grenzdämpfung.



bei $I_B = 1,4A$



bei $I_B = 1,8A$



bei $I_B = 1,6A$

An den so ermittelten Graphen lässt sich leicht erkennen, dass bei 1,4 A noch eine Schwingung vorhanden, also noch nicht die Grenzdämpfung erreicht ist. Bei einem Spulenstrom von 1,8 A findet nur noch ein Kriechen statt. Bei 1,6 A liegt ebenfalls nur Kriechen vor, jedoch kehrt das Pohlsche Rad hier schneller in die Ruhelage zurück. Somit darf behauptet werden, dass die Grenzdämpfung für $I_B \approx 1,6A$ erreicht ist.

Vergleicht man den so experimentell gefundenen Wert von $\approx 1,6A$ mit dem extrapolierten aus $\beta_{kor}(I_B) = k_i \cdot I_B^2$, so sieht man, dass der experimentelle Wert um fast 15% vom extrapolierten abweicht. Jedoch befinden sich beide Werte im Bereich des Kriechfalles der Pendelschwingung und liegen nahe bei der Grenzdämpfung, was unserer Meinung nach trotz des hohen Fehlers akzeptabel ist, da beide Verfahren gewisse Ungenauigkeiten aufweisen.

2.8 Bestimmung der Güte der Schwingungen

Die Güte einer Schwingung lässt sich durch die Formel $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$ ermitteln, was in der Vorbereitung von Carsten Röttele hergeleitet wurde. Jedoch wird hier eine Näherung durchgeführt, da die Bedingung $\beta \ll \omega_0$ vorausgesetzt wird. Diese Bedingung ist jedoch bei der Messung mit 700 mA nicht mehr gegeben, deshalb muss die Güte für diese Schwingung separat errechnet werden.

Es gilt:

$$Q = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}}$$

$$= 7,78$$

Die Werte von T und β wurden der Tabelle in 2.6 entnommen, wobei in dieser die Güte für die Schwingungen mit einer Dämpfung von 100 mA, 200 mA und 400 mA bereits mit der genäherten Formel, also $Q = \frac{\pi}{T \cdot \beta}$ errechnet wurden.

So sieht man deutlich, dass die Güte bei wachsender Dämpfung sinkt.

3 Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße D^*

Es ist die Winkelrichtgröße der Schneckenfeder statisch zu bestimmen, indem verschieden schwere Gewichte (20g, 10g, 5g) tangential an den Zeiger des Drehpendels angehängt, damit die wirkende Kraft senkrecht zum Radius steht.

Mit den so bekannten Größen lässt sich D^* durch die in der Vorbereitung hergeleitete Formel berechnen, dabei wurde $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ gewählt und die Auslenkung φ in Rad gemessen.

$$D^* = \frac{r_a \cdot F}{\varphi}$$

$$= \frac{r_a \cdot g \cdot m}{\varphi}$$

Gewicht [g]	D^* bei Auslenkung nach links [Nm]	D^* Auslenkung nach rechts [Nm]
20	$1,368 \cdot 10^{-3}$	$1,447 \cdot 10^{-3}$
10	$1,379 \cdot 10^{-3}$	$1,424 \cdot 10^{-3}$
5	$1,379 \cdot 10^{-3}$	$1,424 \cdot 10^{-3}$

Wie man nun an den Winkelrichtgrößen erkennen kann, ist die Winkelrichtgröße von der Auslenkungsrichtung abhängig. Im Mittel beträgt die Winkelrichtgröße bei einer Auslenkung nach links $D_{links}^* = 1,375 \cdot 10^{-3} Nm$ und nach rechts $D_{rechts}^* = 1,423 \cdot 10^{-3} Nm$. Dies könnte an der Wickelrichtung der Schneckenfeder liegen.

Zudem soll mit der experimentell bestimmten Winkelrichtgröße das Trägheitsmoment der Schwingscheibe bestimmt und mit dem in der Vorbereitung in Aufgabe 1 grob berechnet verglichen werden.

$$\Theta = \frac{D^* \cdot T^2}{4\pi^2}$$

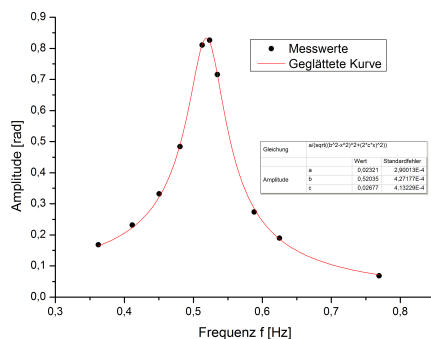
Die noch benötigte Schwingungsdauer ($T = 1,28s$) entnehmen wir aus Aufgabe 1. Dann erhalten wir ein, aus allen errechneten Winkelrichtgrößen, gemitteltetes Trägheitsmoment von $\Theta_{exp} = 1,43 \cdot 10^{-3} kgm^2$.

Vergleicht man diesen experimentell ermittelten Wert mit dem aus der Vorbereitung ($\Theta_{theo} = 1,39 \cdot 10^{-3} kgm^2$), so ist leicht zu erkennen, dass nur eine sehr geringe Abweichung (2,8%) vorhanden ist.

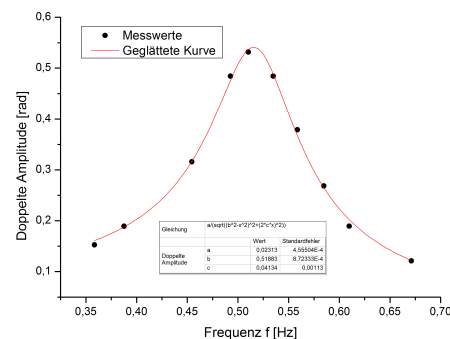
Wir gehen davon aus, dass das experimentell ermittelte Trägheitsmoment genauer ist, da hier trotz eventueller Messungenauigkeiten die Speichen des Schwungrades berücksichtigt werden, die im Theoriewert unterschlagen sind. Zudem geht hier die Produktionsungenauigkeit des verwendeten Rades gegenüber den in der Aufgabenstellung gegebenen Maßen in den ermittelten Wert mit ein.

4 Drehpendel, erzwungene Schwingungen

In diesem Versuchsteil sollen Resonanzkurven bei verschiedenen Bremsströmen erstellt werden, wobei man zusätzlich einen externen Antrieb durch einen Motor hatte, welchen man mit verschiedenen Frequenzen laufen ließ. Jedoch wurde nicht wie in der Aufgabenstellung 200 mA und 400 mA für den Bremsstrom verwendet, sondern 400 mA und 500 mA. Wir ließen nun für jeden Bremsstrom bei zehn verschiedenen Frequenzen des Motors ein Winkel-Zeit-Diagramm mit CASSY zeichnen und bestimmten, nachdem sich das System eingeschwungen hatte, dabei die Spitze-Spitze Amplitude und die Periodendauer. Durch das Eintragen der Messpunkte in ein Diagramm entstanden folgende Kurven:



$$I_B = 400mA$$



$$I_B = 500mA$$

Wir ließen dabei von unserem Plotter Origin die Kurve mit der Formel $A = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}}$ fitten, wobei bei uns a unser k, b unser ω_0 und c unser β sind und bekamen dabei folgende Resonanzkurven:

- für $I_B = 400mA$:

$$\varphi(f) = \frac{0,023}{\sqrt{(0,520^2 - f^2)^2 + (2 \cdot 0,027f)^2}}$$

- für $I_B = 500mA$:

$$\varphi(f) = \frac{0,023}{\sqrt{(0,519^2 - f^2)^2 + (2 \cdot 0,041f)^2}}$$

Wir erhalten also für unser $\omega_0 \approx 3,27 \frac{1}{s}$, was mit unserem in Aufgabe 2 aus den Werten der Periodendauer berechneten $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \approx 3,25 \frac{1}{s}$ sehr gut übereinstimmt. Hierbei ist zu beachten, dass in unserem Schaubild über die Frequenz und nicht über die Kreisfrequenz die Werte aufgetragen sind.

Auch die Resonanzfrequenz $\Omega_{res} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ konnten wir bestätigen, da unser β sehr klein ist und unsere Resonanzfrequenz immer knapp unter ω_0 lag.

Außerdem konnten wir gut die in der Vorbereitung bereits vermutete Phasenverschiebung bei den einzelnen Frequenzen beobachten, wie z.B., dass beim Einstellen der Resonanzfrequenz die Phasenverschiebung fast exakt $-\frac{\pi}{2}$ war, sowie, dass sie mit größer werdender Frequenz gegen 0 und mit kleiner werdender gegen $-\pi$ ging.

Zusätzlich sollte wieder die Güte bestimmt werden, welche man wie in der Vorbereitung bereits beschrieben dadurch bekommt, wenn man die Bandbreite misst. Hierzu haben wir bei beiden Kurven die Punkte bestimmt, bei denen die Amplitude $\frac{1}{\sqrt{2}}$ so groß wie die maximale Amplitude ist. Wir erhielten dabei folgende Werte:

- für $400mA$:

$$Q = 9,68$$

- für $500mA$:

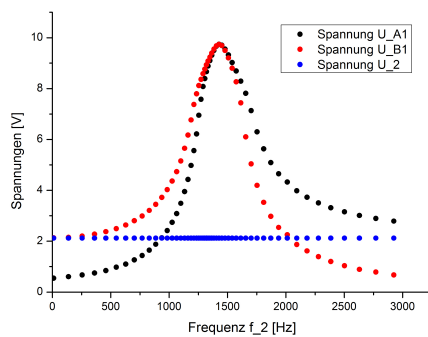
$$Q = 6,25$$

Wir erkennen, dass unsere Güte bei $400mA$ überraschend gut mit der in Aufgabe 2 schon bestimmten übereinstimmt. Sie hat nur eine Abweichung von etwa 1%. Für $500mA$ haben wir zwar keinen Vergleichswert, aber wir erkennen wieder, dass die Güte mit zunehmenden Bremsstrom abnimmt.

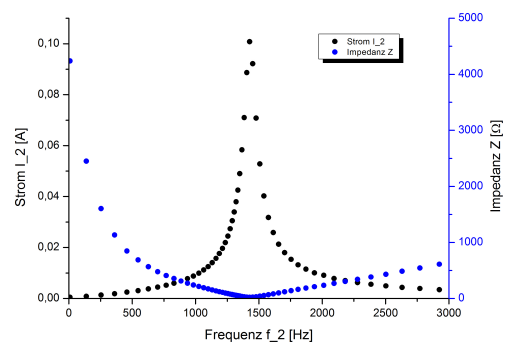
5 Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen

Zuerst haben wir bei dieser Aufgabe den Serienschwingkreis nach dem Schaltplan der Vorbereitung aufgebaut und am Kondensator und haben an der Spule parallel die CASSY-Box zugeschaltet, damit wir den Spannungsverlauf an diesen ermitteln konnten. Die am Schwingkreis angelegte Wechselspannung wurde durch die CASSY-Box ausgegeben. Somit kann CASSY gleich sämtlich relevanten Spannungen bei den Verschieden Widerständen auswerten. Durch die in der Voreinstellung bereits eingegebenen Formeln konnte somit gleich die Impedanz, die Stromstärke und die Phasenverschiebung ermittelt werden.

$$R = 8,2\Omega :$$

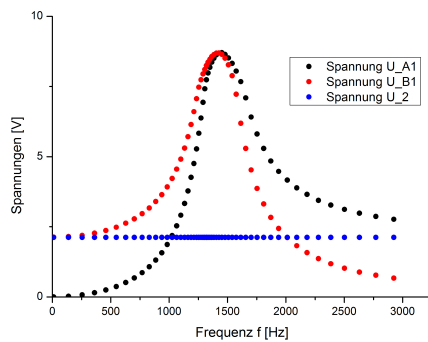


Spannungen über Frequenz

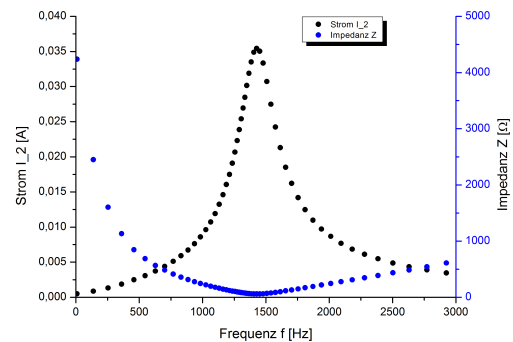


Strom und Impedanz über Frequenz

$$R = 47\Omega :$$

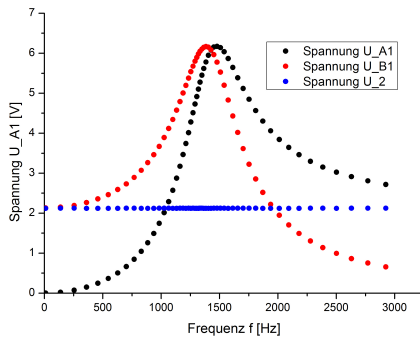


Spannungen über Frequenz

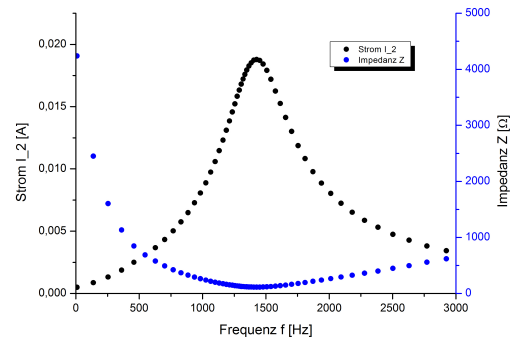


Strom und Impedanz über Frequenz

$R = 100\Omega$:

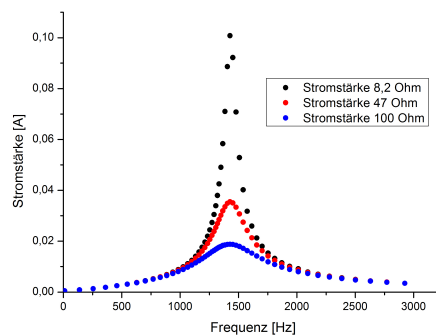


Spannungen über Frequenz



Strom und Impedanz über Frequenz

Ströme :



Alle Ströme über die Frequenz aufgetragen

Bei den Schwingungen für alle drei eingebauten Widerstände erkennt man sehr schön die Resonanzfrequenz, bei der die Impedanz minimal, und der Strom in der Gesamtschaltung, sowie die Spannungen an Kondensator und Spule maximal werden. So kann man auch ungefähr die Resonanzfrequenz des Schwingkreises ablesen, das in unseren Fällen in etwa 1425 Hz sind. Zudem lässt sich auch die Dämpfung durch den jeweils eingesetzten Widerstand erkennen, da die Stromstärken, die sich analog zur Amplitude der mechanischen Schwingung verhalten, bei zunehmendem Widerstand geringer werden.

Auch hier soll wieder die Güte berechnet werden. Man hat hier zwei Methoden, welche man anwenden kann. Die erste ist äquivalent zur Aufgabe 4, also über die Bandbreite. Bei der zweiten geht man über den Maximalwert der Spannung am Kondensator, bzw. an der Spule und teilt diese durch die Spannung, welche anliegt, denn es gilt:

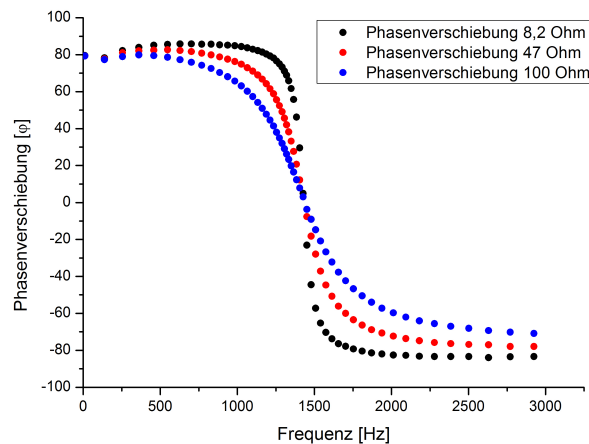
$$Q = \frac{U_{C,max}}{U_0} = \frac{U_{L,max}}{U_0}$$

Wir erhielten dabei folgende Ergebnisse:

Widerstand R in Ω	8,2	47	100
Güte Q(über Bandbreite)	15,85	5,71	2,87
Güte Q(über max. Spannung)	4,59	4,10	2,91

Man erkennt, dass die Güte mit wachsendem Widerstand abnimmt, was äquivalent zu dem wachsenden Bremsstrom ist. Allerdings ist die Abweichung zwischen den beiden Verfahren zur Bestimmung vor allem bei den kleineren Widerständen sehr groß. Wir vermuten, dass beim Verfahren mit der maximalen Spannung CASSY die Werte am Kondensator bzw. an der Spule nicht richtig gemessen hat, da sie unserer Meinung nach viel größer sein müssten. Allerdings ist natürlich auch bei dem Verfahren zur Bestimmung der Bandbreite ein gewisser Ablesefehler nicht zu vernachlässigen.

Vergleicht man die so experimentell bestimmte Resonanzfrequenz ($f_{0,exp} \approx 1425Hz$) mit der, die bereits in der Vorbereitung theoretisch ermittelt wurde ($f_{0,theo} \approx 1320Hz$), so erkennt man eine Abweichung von 9,8% des praktisch ermittelten Wertes im Vergleich zur Theorie. Dies kann aber auch an den fertigungsbedingten Toleranzen des verwendeten Kondensators und der Spule liegen, aber auch zum Teil an der Ungenauigkeit der Messung.



Alle Phasenverschiebungen über die Frequenz aufgetragen

Wir konnten zusätzlich die Phasenverschiebung ermitteln und diese über die sich ändernde Frequenz auftragen, in allen Fällen sieht man, dass die Resonanzfrequenz beim Schnittpunkt der einzelnen Kurven liegt, zudem ist klar erkennbar, dass die Phasenverschiebung bei größerer Dämpfung flacher verläuft, als bei kleiner, die in diesem Fall nahezu senkrecht im Bereich von ω_0 abfällt.