

Physikalische Akustik - P1

Resonanz 1-12,22

Technische Universität
Karlsruhe

Grunde: P -28

Versuchsnummer : 8. Dezember 2011



Bei diesem Versuch geht es um freie und erzwungene Schwingungen. Es werden mechanische und elektrische Schwingungen untersucht, ebenso wie das Resonanzverhalten bezüglich Amplitude und Phase, sowie Charakteristika wie Resonanzschärfe bzw. Güte und Dämpfungen verschiedenen Ursprungs. Alle wichtigen Zusammenhänge sind in einer Vorbereitungshilfe zu diesem Versuch erläutert.

Bei diesem Versuch arbeiten Sie mit dem Messwerterfassungssystem „CASSY“, das im Praktikum an verschiedenen Versuchen eingesetzt wird. *Details zu der Funktionsweise des Interfaces finden Sie in der Vorbereitungshilfe zu diesem Versuch sowie auf den ersten 30 Seiten des CASSY Handbuchs, die sich in den Literaturmappen befinden.*

Hinweis: Bitte USB-Stick zur Datensicherung mitbringen.

Aufgaben:

1. Drehpendel, freie Schwingungen: Machen Sie sich anhand der Kurzanleitung zu CASSY mit dem Menü der Software, der Verwendung von Funktionstasten und den Einstellmöglichkeiten für Diagramme und Anzeigeelementen vertraut. Stellen Sie den zeitlichen Verlauf des Phasenwinkels, der Winkelgeschwindigkeit und der kinetischen Energie dar. Verwenden Sie dazu eine einfache Abschätzung des Trägheitsmomentes des Drehpendels. Erzeugen Sie auch eine Phasenraumdarstellung des Schwingungsvorgangs. Bestimmen Sie die Periodendauer der Schwingung.

Der Schwingungsvorgang ist auch ohne Wirbelstrombremse nicht ganz dämpfungsfrei. Erklären Sie die Art der Dämpfung und entwickeln Sie ein einfaches Modell für den Amplitudenabfall. Überlagern Sie die Messdaten mit dem Ihrem Modell entsprechenden funktionalen Zusammenhang und passen Sie die Modellparameter möglichst gut per Hand an (*fit by eye*). Dazu eignen sich einfache Tabellenkalkulationsprogramme auf Ihrem PC. Sie bekommen dadurch ein Gefühl für den Einfluss der verschiedenen Parameter auf die Kurvenform.

2. Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen: Nehmen Sie mit CASSY bei verschiedenen Strömen I_B durch die Wirbelstrombremse ($I_B=100, 200, 400, 700\text{mA}$) die entsprechenden Winkel-Zeit-Diagramme auf. Ermitteln Sie wie in Aufgabe 1 die Dämpfungskonstante β durch Anpassung der Schwingungsfunktion an die Messdaten. Bestimmen Sie Dämpfungskonstante β auch aus dem Dämpfungsverhältnis k . Verwenden Sie für die $k(I_B)$ -Bestimmung eine optimale Anzahl n von Schwingungen und die zweckmäßigere der beiden Formeln:

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \quad \text{oder} \quad k = \sqrt[n]{\Phi_0 / \Phi_n}$$

Erläutern Sie, warum Sie praktisch keine I_B -Abhängigkeit für T finden.

Stellen Sie die Dämpfungskonstante $\beta_{\text{kor}}(I_B) = \beta(I_B) - \beta(0)$ in Abhängigkeit von I_B geeignet graphisch dar, begründen Sie $\beta_{\text{kor}}(I_B) = \text{const} \cdot I_B^2$ und extrapolieren Sie auf den I_B -Wert für Grenzdämpfung ($\beta=\omega_0$). Ermitteln Sie diesen Wert auch experimentell, und vergleichen Sie beide Ergebnisse. Berechnen Sie die Güte $Q(I_B)$ des Systems aus ω_0 und $\beta(I_B)$. Beachten Sie den Gültigkeitsbereich der Formeln für Q .

3. Messen Sie die Winkelrichtgröße D^* der Schneckenfeder des Drehpendels statisch. Diskutieren Sie Ihre Idee für das Messverfahren von D^* vorher mit dem Betreuer. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment Θ des Drehpendels aus D^* und $T(0)$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 1.

4. Drehpendel, erzwungene Schwingungen: Nehmen Sie Resonanzkurven $\varphi(\Omega)$ bei verschiedenen Strömen I_B (200, 400mA) mit CASSY auf. Beobachten und diskutieren Sie auch die Phasenverschiebung ψ . (a) möglichst weit unterhalb, (b) möglichst weit oberhalb und (c) bei der Resonanzfrequenz.

Achtung: diese Phasenverschiebung wird im vorgegebenen Versuchsaufbau nicht von CASSY registriert, da eine simultane Messung der anregenden Schwingung nicht vorgesehen ist (dazu würde eine zweite BMW-

Box am Antriebsmotor benötigt). Die Drehzahl des Antriebmotors ist nicht sehr stabil einstellbar - die Meßgenauigkeit ist deshalb nur mäßig. Für die Messung der Drehzahl wartet man die Einschwingzeit des Drehpendels (diese kann man sehr gut in der Phasenraumdarstellung beobachten) ab und bestimmt sie aus dem *Winkel-Zeit-Diagramm* mit Hilfe von CASSY. Achten Sie auf eine ausreichende Dichte der Meßpunkte, besonders in Resonanznähe. Ändern Sie gegebenenfalls die Intervallgröße der Messparameter. Vergleichen Sie den Verlauf der gemessenen Resonanzkurven mit dem theoretischen Verlauf.

Benutzen Sie $(1/\sqrt{2})$ -Amplituden-Punkte für die Gütebestimmung $Q(I_B)$ des Resonators und vergleichen Sie diese Ergebnisse mit jenen von Aufgabe 2.

5. Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen: Nehmen Sie Resonanzkurven $I(\omega)$ bei verschiedenen Dämpfungswiderständen R_p auf (Siehe Hinweise in der Vorbereitungshilfe) (Messbereich für U : 0-70V). Stellen Sie die Schwingungsamplitude und die Impedanz des Schwingkreises als Funktion der Frequenz in einer gemeinsamen Darstellung dar. Bestimmen Sie die Gütefaktoren der Schwingkreise aus der Resonanzbreite. Demonstrieren Sie die Resonanzüberhöhung an Spule und Kondensator, indem Sie die Spannungsverläufe an Spule und Kondensator zusammen mit der anliegenden Spannung als Funktion der Frequenz darstellen. Bestimmen Sie auch daraus die Güte des Schwingkreises. Stellen Sie die Phasenverschiebung als Funktion der Frequenz dar.

Zubehör:

Drehpendel (Pohlsches Rad) mit Motor, Getriebe und Exzenter zur Anregung, mit Drehkörper aus Kupfer ($\rho = 8,96 \text{ g/cm}^3$), kreisringförmig ($r_i=7,5\text{cm}$, $r_a=9,5\text{cm}$, $d=0,2\text{cm}$) mit Speichen, mit Schnurrille am Außenrand, mit Wirbelstrombremse (zulässiger Strom: *langzeitig 1A / kurzzeitig 1,6A*);

Stromversorgungsgeräte mit Regelmöglichkeiten für die Motordrehzahl und für den Strom durch die Wirbelstrombremse;

Dreheisen-Vielfachmeßinstrument für die Messung des Stromes durch die Wirbelstrombremse;

Federkraftmesser 1N sowie Faden, Tesafilm (Einfädelhilfe) und Stativ für die D^* -Bestimmung;

Stoppuhr;

CASSY SENSOR Messinterface mit Kabeln und Bewegungswandler;

POWER CASSY als Spannungsquelle;

PC zur Datenerfassung.

CASSY Lab Software

Dämpfungswiderstände R_p , Spule $L = 44 \text{ mH}$ und Kondensator $C = 0,33 \text{ }\mu\text{F}$, Laborkabel.

Literatur:

Walcher: *Praktikum der Physik* (zu Drehpendel und Schwingungsgleichungen)

Fricke, Lamberts, Schuchardt, Hrsg. Moeller: *Leitfaden der Elektrotechnik*, Bd.4, Teil 1 (zu elektrischen Schwingkreisen, insbesondere $L||C||R$; vorhanden in Uni.-Bibl.)

Feynman: *Lectures on Physics*, Bd.1 (besonders geeignet für das Verständnis des Versuchsinhalts)

Physikalisches Anfängerpraktikum - P1

Resonanz
P1-12,22

Versuchsvorbereitung von
Raphael Schmager

Gruppe: Do-28

Druckgeführt am 8. Dezember 2011

Vorbemerkung

Im Versuch Resonanz geht es um freie und erzwungene elektrische sowie mechanische Schwingungen. Untersucht wird dabei das **Resonanzverhalten** bezüglich Amplitude und Phase. Außerdem sollen Begriffe wie **Resonanzschärfe**, **Güte** und **Dämpfung** näher betrachtet werden.

0 Theoretische Grundlagen

0.1 Der Harmonische Oszillator

Im Versuch wird ein Drehpendel nach Pohl verwendet. Die Beschreibung dieses folgt bei Aufgabe 1. Es sei nur vorab gesagt, dass es sich hierbei um eine Schneckenfeder handle, die ein Rücktreibendes Moment ausübt.

Die Bewegungsgleichung der Schwingung wird durch die Summe der einwirkenden Drehmomente beschrieben.

- Rücktreibendes Moment der Schneckenfeder: $-D^*\varphi(t)$
- bremsendes Moment der Wirbelstrombremse: $-\gamma\dot{\varphi}(t)$
- Reaktionsmoment: $\theta\ddot{\varphi}(t)$

Daraus ergibt sich die Bewegungsgleichung:

$$\theta\ddot{\varphi} = -D^*\varphi - \gamma\dot{\varphi}$$

Führt man die Dämpfungskonstante $\beta = \frac{\gamma}{2\theta}$ und die Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators: $w_0^2 = \frac{D^*}{\theta}$ ein, so erhält man die bekannte Differentialgleichung des harmonischen Oszillators.

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + w_0^2\varphi = 0$$

Mit einem einfachen Exponentialansatz folgen die Lösungen:

$$\varphi(t) = c \cdot e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - w_0^2}$$

Je nach Relation von β und w_0 werden nun 3 Fälle unterschieden.

Schwingfall

- $\beta < w_0 \rightarrow$ exponentiell abklingende Schwingung bei konstanter Frequenz

Nun wird die Radikand negativ. $\lambda_{1,2}$ lässt sich nun komplex schreiben als:

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm i\sqrt{w_0^2 - \beta^2}$$

Daraus ergibt sich:

$$\varphi(t) = e^{-\beta t}(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t})$$

Durch die Wahl der Anfangsbedingungen lassen sich die Konstanten bestimmen. Durch die Wahl neuer reeller Konstanten erhält man die allgemeine Gleichung einer gedämpften Schwingung:

$$\varphi(t) = e^{-\beta t}(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

Die Einhüllende der Schwingung beschreibt einen exponentiellen Abfall.

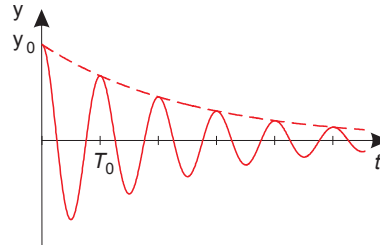


Abbildung 1: Schwingfall

Kriechfall

- $\beta > \omega_0 \rightarrow$ bei großer Dämpfung erfolgt keine Schwingung mehr

Das Drehpendel kriecht nach anfänglicher Auslenkung in seine Ruhelage zurück

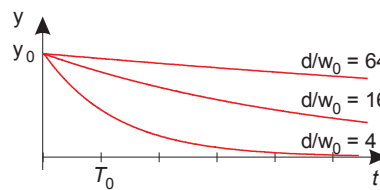


Abbildung 2: Schwingfall

Hier bleibt der Radikant positiv. Es folgt für die Lösung bei starker Dämpfung:

$$\varphi(t) = Ae^{-\beta t}(c_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \cdot t} + c_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \cdot t}) = Ae^{-\beta t} \cosh(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \cdot t + \delta)$$

Aperiodischer Grenzfall

- $\beta = \omega_0 \rightarrow$ optimale Dämpfung führt zur schnellsten Rückkehr in die Ruhelage

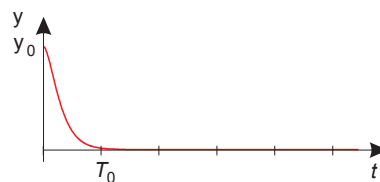


Abbildung 3: Schwingfall

Für diesen Fall ist $\lambda = \beta$. Es ergibt sich die Lösung:

$$\varphi(t) = e^{-\beta}(c_1 + c_2 t)$$

0.2 Erzwungene Schwingungen

Wird die Schwingung zusätzlich von außen angetrieben, so spricht man von einer erzwungenen Schwingung. Es gilt folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + w_0^2\varphi = k \cdot \cos(\Omega t)$$

Mit der Zeit nimmt der Einfluss der homogenen Lösung ab. Nach dem Einschwingvorgang wird die Schwingung prinzipiell nur noch durch den partikulären Teil bestimmt. Mit dem Ansatz:

$$\varphi_p(t) = Ae^{i\Omega t}$$

ergibt sich für den Realteil der partikulären Lösung:

$$\varphi_p(t) = |A|\cos(\Omega t + \delta) \quad \text{mit} \quad |A| = \frac{k}{(w_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}$$

Die Summe aus homogener Lösung (eine der drei, je nach Fall) und der partikulären ergeben nun die allgemeine Lösung für die Bewegungsgleichung mit äußerer periodischer Anregung. Dies wäre beim Schwingfall:

$$\varphi(t) = A_f e^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta_h) + A_s \cos(\Omega t + \delta)$$

Dabei ergibt sich δ_h durch Anfangsbedingungen, für die Phasenverschiebung δ gilt:

$$\delta = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} A}\right) = \arctan\left(\frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - w_0^2}\right)$$

Aufgrund der Dämpfung verschiebt sich die Resonanz zu kleineren Ω -Werten hin. Das heißt, die Maximale Amplitude ist nicht exakt bei $\Omega = w_0$ sondern bei:

$$\Omega_{res} = \sqrt{w_0^2 - \beta^2}$$

Des Weiteren lässt sich der **Gütefaktor**, also ein Maß für die Dämpfung des Systems, einführen. Er beschreibt in welchem Maß Energie in einem schwingfähigen System gespeichert werden kann.

$$Q = \frac{2\pi \cdot \text{Schwingungsenergie}}{\text{Energieverlust pro Periode}} = \frac{w_0}{2\beta}$$

Die Bandbreite $\Delta\omega$ wird bei der Amplitude $\frac{A_{res}}{\sqrt{2}}$ abgegriffen. Sie beträgt:

$$\Delta\Omega \approx 2\beta = \frac{w_0}{Q}$$

0.3 Der L,R,C Schwingkreis

Betrachten wir im folgenden einen Schwingkreis mit Spule L, Widerstand R und Kondensator C. Dieser wird auch als Reihenschwingkreis bezeichnet, da hier alle 3 Bauteile in Reihe zu einer Wechselspannungsquelle geschaltet sind. Der Strom besitzt in allen Komponenten den selben

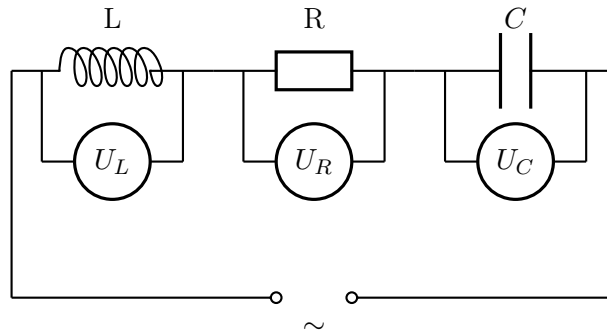


Abbildung 4: Serienschwingkreis

Momentanwert. Die Spannungsabfälle werden durch die Wechselstromwiderstände und diesem Strom bestimmt.

Mit der Kirchhoffschen Maschenregel ergibt sich:

$$U(t) = U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = LI'(t) + RI(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

Nach Differentiation auf beiden Seiten erhält man eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die gedämpfte erzwungene Schwingung:

$$\frac{1}{L}\dot{U} = \ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I$$

Durch Substitution erhalten wir nun die uns bekannte Differentialgleichung des gedämpften, getriebenen, harmonischen Oszillators, die wir bereits gelöst haben.

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{R}{2L}$$

$$\frac{1}{L}\dot{U} = \ddot{I} + 2\beta\dot{I} + w_0^2 I$$

Der Vollständigkeit halber und um die Analogie deutlich hervorzuheben wird hier noch einmal die Lösung skizziert. Die homogene Lösung ist:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t + \delta_h) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist dann:

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t + \delta} \quad \text{mit} \quad \delta = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Die Komplettlösung entspricht wieder einer Superposition der beiden Lösungen. Nach einer gewissen Einschwingzeit beschreibt nur noch die inhomogene Gleichung die Bewegung. Die Amplitude ist:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U_0}{Z_{Ges}}$$

Wobei Z die Impedanz des Schwingkreises ist. Aus der Vorbereitungshilfe ist zu entnehmen, dass der Gütefaktor:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

ist. Die Breite der Schwingung wird wie bei der mechanischen Schwingung als Frequenzdifferenz zwischen den Stellen der Amplitude $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$ abgegriffen. Der Verlustfaktor entspricht gerade dem reziproken Gütefaktor:

$$\frac{\Delta w}{w_0} = \frac{R}{w_0 L} = R w_0 C = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}$$

0.4 Vergleich der verschiedenen Schwingungen

Es bietet sich aufgrund der großen Ähnlichkeit der Schwingungen an, einen kurzen Vergleich der Energien zu machen.

Federschwingung

Die Federschwingung wurde zwar nicht extra erwähnt, man könnte Sie jedoch als Grundlage der ganzen Betrachtungen sehen. Bei ihr handelt es sich um eine longitudinale Auslenkung aus der Ruhelage. Diese wird mit $x(t)$ bezeichnet. Die Gesamtenergie wird kinetische und in potentielle Energie umgewandelt. Ist dabei Reibung vorhanden so wird Energie auch in Wärme umgewandelt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 \quad \text{und} \quad E_{pot} = \frac{1}{2} D x(t)^2$$

Drehpendel:

Beim Drehpendel entspricht die Auslenkung $x(t)$ lediglich dem Winkel $\varphi(t)$, um die das Rad aus der Ruhelage ausgelenkt ist. Die Energie teilt sich hierbei in kinetische und Federenergie auf. Besitzt die Schwingung Reibung, so geht die Energie durch Wärme an die Umgebung angegeben. Man vergleiche hier die oben beschriebene Dämpfung.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \theta \dot{\varphi}^2(t) \quad \text{und} \quad E_{pot} = \frac{1}{2} D^* \varphi(t)^2$$

Schwingkreis:

Beim unter 0.3 beschriebenen Schwingkreis ist der Strom $I(t)$ die analoge Größe zur Auslenkung $x(t)$ bzw. $\varphi(t)$. Die Gesamtenergie im Schwingkreis wird periodisch zwischen Spule und Kondensator ausgetauscht. Durch den ohmschen Widerstand der beteiligten Bauelemente wird ein Teil der Energie stets in Wärme umgewandelt.

$$E_C = \frac{1}{2} C \cdot U(t)^2 \quad \text{und} \quad E_L = \frac{1}{2} L I(t)^2$$

Aufgaben

In den folgenden Aufgaben wird zunächst mit dem Pohlschen Rad experimentiert. Es handelt sich hierbei um ein Rad, welches um eine Achse drehbar gelagert ist. Das Rad wird durch eine Spiralfeder in der Ruhelage gehalten. Die Feder ist an einem Ende am Rad befestigt und am anderen Ende an einem Hebel. Durch eine Auslenkung aus der Ruhelage wirkt die rücktreibende Kraft der Schneckenfeder auf das Rad und es führt eine Schwingung aus.

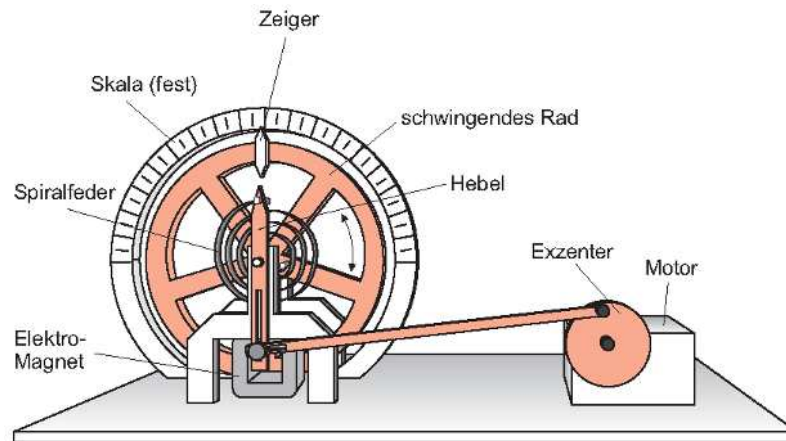


Abbildung 5: Pohlsches Rad (Bild aus Quelle)

1 Drehpendel, freie Schwingungen

Mit dem Messwerterfassungssystem CASSY soll der zeitliche Verlauf des **Phasenwinkels**, der **Winkelgeschwindigkeit** und der **kinetische Energie** dargestellt werden. Der Phasenwinkel ist: $\varphi = \frac{s}{R}$, wobei s die vom Rad zurückgelegte Strecke und R der Radius ist. Von CASSY wird mit einer BWM-Box diese Strecke s gemessen. Die Winkelgeschwindigkeit entspricht gerade der Ableitung des Phasenwinkels nach der Zeit. Dies kann CASSY auch. Die kinetische Energie ist:

$$E = \frac{1}{2} \theta \dot{\varphi}^2$$

Diese Formel kann man in das CASSY-Formelfeld eingeben. Die Winkelgeschwindigkeit ist nun berechnet und lässt sich hier einfach eingeben. Zu bestimmen bleibt das Trägheitsmoment des Drehpendels. Dabei soll eine einfache Abschätzung verwendet werden. Vernachlässigt man die Speichen des Drehpendels so erhält man eine Kreisscheibe. Für diese ist die Formel bekannt.

$$\theta = \int_{r_i}^{r_a} \int_0^d \int_0^{2\pi} d\varphi dz dr (r^3 \rho) = \frac{1}{2} m (r_a^2 - r_i^2) = \frac{1}{2} \pi \rho d (r_a^4 - r_i^4) = 1,3874 * 10^{-3} m^2 kg$$

Da etwas mehr Masse im inneren verteilt ist, ist der reale Wert des Trägheitsmoment etwas kleiner.

Anschließend soll die Phasenraumdarstellung des Schwingungsvorgangs mit dem Programm

dargestellt werden. Der Phasenwinkel wird hierbei gegenüber der Phasengeschwindigkeit aufgetragen.

Das Pohlrاد wird auch ohne Einsatz der Wirbelstrombremse gedämpft. Die Schwingung ist aufgrund der Reibung (Luft, Kugellager,...) des Rades nicht dämpfungsfrei. Nimmt man an, die Dämpfung sei geschwindigkeitsproportional, so ergibt sich eine Exponentialfunktion als Einhüllende:

$$f(t) = ce^{-\beta t}$$

Durch Manipulation der Parameter soll die Funktion an unsere Messwerte angepasst werden. Typischerweise wird β als Dämpfungskonstante bezeichnet.

2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen

Es wird wie in Aufgabe 1 die Schwingung der Schrenkenfeder untersucht. Nun jedoch soll mit CASSY bei verschiedenen Strömen I_B der Wirbelstrombremse die entsprechenden Winkel-Zeit-Diagramme aufgenommen werden. Die Wirbelstrombremse entspricht einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung. Gesucht ist nun wieder die Dämpfungskonstante β .

Diese lässt sich jedoch nicht nur über die Anpassung der Parameter der Schwingungsfunktion an die Messdaten bestimmen, sondern auch durch Rechnung:

$$k = e^{\beta T} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\ln(k)}{T} \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i}$$

Man sieht das sich die Dämpfungskonstante auch aus dem Dämpfungsverhältnis k bestimmen lässt. Es wurde hier das arithmetische Mittel gewählt, da hier mehr als nur 2 Messwerte verwendet werden können.

Für große Werte von n wird der statistische Fehler relativ klein. Dies kann jedoch sehr Aufwendig werden, da bei niedrigen Dämpfungen recht viele Schwingungen betrachtet werden müssen. Zweckmäßiger ist es dann das geometrische Mittel zu nehmen:

$$k = \sqrt[n]{\frac{\varphi_0}{\varphi_n}}$$

Da die Dämpfungen recht schwach sind (wir befinden uns noch im Schwingfall), ist $\gamma < w < w_0$. Es gilt:

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\sqrt{w_0^2 - \gamma^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (\frac{\gamma}{w_0})^2}} \approx T_0 \quad \text{mit} \quad T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$$

und damit ergibt sich für $\frac{\gamma}{w_0} \ll 1$, dass die Periodendauer nahezu unabhängig von der Dämpfung ist.

Die Dämpfungskonstante setzt sich aus der normalen Reibung durch Luftwiderstand oder durch die Kugellagerung und der Wirbelstrombremse zusammen:

$$\beta_{\text{kor}}(I_B) = \beta(I_B) - \beta(0)$$

Es soll nun die Dämpfungskonstante $\beta_{\text{kor}} in Abhängigkeit von I_B graphisch dargestellt werden. Die Wirbelstrombremse basiert auf der Lorentzkraft:$

$$F_L = BIl = I^2 l \mu_0 n = c \cdot I^2 \Rightarrow F_L \sim \beta \sim I^2$$

Dabei ist die Dämpfung proportional zur Leistung der Spule der Wirbelstrombremse.

Der Gütefaktor $Q(I_B)$ des Systems berechnet sich nun durch:

$$Q(I_B) = \frac{w_0}{2\beta(I_B)}$$

3 Winkelrichtgröße D^* der Schneckenfeder

Die Winkelrichtgröße D^* der Schneckenfeder ist nun zu bestimmen. Das einfachste Vorgehen wäre hier, das Rad durch eine bekannte Kraft auszulenken und dabei die Auslenkung zu messen. Die Kraft muss dabei Tangential angreifen. Man setzt die Drehmomente gleich:

$$F \cdot r = D^* \varphi \Rightarrow D^* = \frac{F \cdot r}{\varphi}$$

Aus der so bestimmten Winkelrichtgröße soll noch das Trägheitsmoment berechnet werden.

$$w_0^2 = \frac{D^*}{\theta} = \left(\frac{2\pi}{T(0)} \right)^2 \Rightarrow \theta = \frac{T^2(0)D^*}{4\pi^2}$$

4 Drehpendel, erzwungene Schwingungen

Es sollen Resonanzkurven bei verschiedenen Strömen I_B aufgenommen werden. Zu diskutieren sind die folgenden drei Fälle der Phasenverschiebung. Die Phasenverschiebung wurde oben schon hergeleitet. Zur Erinnerung:

$$\delta = \arctan\left(\frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - w_0^2}\right)$$

Zu beobachten ist die Phasenverschiebung nun

- i) zunächst möglichst weit **unterhalb der Resonanzfrequenz**; dort ist $\Omega \ll w_0$. Damit wird die Phasenverschiebung $\delta \approx 0$.
- ii) Anschließend möglichst weit **oberhalb der Resonanzfrequenz**. Hier ist $\Omega \gg w_0$ und die Phasenverschiebung wird zu: $\delta \approx -\pi$.
- iii) Zuletzt noch **bei der Resonanzfrequenz**: $\Omega = w_0$. Die Phasenverschiebung beträgt hierbei $\delta = -\frac{\pi}{2}$.

Man sieht das die Phasenverschiebung stets negativ ist. Sie läuft also der äußeren Anregung nach.

Es soll anschließend der Verlauf der Resonanzkurven mit den theoretischem Verlauf verglichen werden. Des weiteren ist die Güte zu bestimmen. Die Benötigten Formeln und Zusammenhänge wurden oben hergeleitet.

5 Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen

In der letzten Aufgabe kommt das Pendant zum mechanischen Schwingkreis - der elektromagnetische Serienschwingkreis. In der Vorbemerkung ist die Schaltskizze zu diesem schon abgebildet.

Es sollen nun die Resonanzkurven bei verschiedenen Dämpfungswiderständen R_p ausgenommen werden. Die Schwingungsamplitude und die Impedanz des Schwingkreises soll als Funktion der Frequenz in einem gemeinsamen Schaubild dargestellt werden. Die Gütefaktoren der Schwingkreise sind aus der Resonanzbreite zu bestimmen. Für diese gilt:

$$Q = \frac{|U_C|}{U_0} = \frac{|U_L|}{U_0}$$

Anschließend soll die Resonanzüberhöhung Spule und Kondensator dargestellt werden. Die Formeln dafür befinden sich in den theoretischen Grundlagen unter 0.3.

6 Quellen

- H. J. Eichler H.-D. Kronfeldt J. Sahm, Das Neue Physikalische Grundpraktikum, 2. Auflage, Springer-Verlag
- Vorbereitungsmappe

Physik Praktikum 1

Resonanz

Tobias Renz
Matrikel Nr. 1581784

8.Dezember 2011

Versuchsvorbereitung

Allgemeine Schwingungsgleichung:

In diesem Versuch geht es um freie und erzwungene Schwingungen, sowie um das Resonanzverhalten. Es werden mechanische und elektrische Schwingungen untersucht. Es handelt sich aber jedes mal um die gleiche Differentialgleichung. Deshalb wird zuerst die allgemeine Schwingungsgleichung gelöst und dann die im Versuch auftretenden Schwingungen besprochen.

Die allgemeine Schwingungsgleichung mit äußerer Anregung kann über folgende Differentialgleichung beschrieben werden, falls man annimmt, dass die Reibung proportional zur Geschwindigkeit ist:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t) \quad (1)$$

Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung ergibt sich aus der Summe der homogenen und der partikulären Lösung. Da man für verschiedene partikuläre Lösung unterschiedliche Ansätze zur Lösung wählt, wird jetzt nur die homogene Lösung bestimmt und die partikuläre Lösung dann für die speziellen Anregungen.

Die homogene Lösung wird mit dem Ansatz $x(t) = c \cdot e^{-\lambda t}$ bestimmt. Setzt man diesen Ansatz in die DGL ein ergibt sich eine quadratische Gleichung für λ :

$$\lambda^2 - 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2)$$

Mit folgenden Lösungen für λ :

$$\lambda_{1/2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (3)$$

Es werden nun drei unterschiedliche Fälle unterschieden:

Der Schwingfall: In diesem Fall ist $\beta < \omega_0$ und es ergeben sich damit für λ folgende Lösungen:

$$\lambda_1 = \beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \lambda_2 = \beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (4)$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ergibt sich dann folgende homogene Lösung:

$$x(t) = e^{-\beta t}(c_1 \cdot e^{i\omega t} + c_2 \cdot e^{-i\omega t}) \quad (5)$$

Dies entspricht einer Schwingung mit exponentiell abnehmender Amplitude.

Der Kriechfall: Der Fall, dass keine Schwingung auftritt ergibt sich für $\beta > \omega_0$. Die Lösungen für λ in diesem Fall sind:

$$\lambda_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \lambda_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (6)$$

Damit ergibt sich folgende Lösung:

$$x(t) = e^{-\beta t}(c_1 \cdot e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}) \quad (7)$$

Der aperiodische Grenzfall: Bei diesem Fall ist $\beta = \omega_0$. Dies ist der Fall optimaler Dämpfung, das heißt das System klingt am schnellsten ab.

Für λ gibt es nun nur noch eine Lösung:

$$\lambda = \beta \quad (8)$$

Damit ergibt sich für diesen Fall folgende homogene Lösung:

$$x(t) = e^{-\beta}(c_1 + c_2 \cdot t) \quad (9)$$

0.1 Federschwingung

Wir werden in diesem Versuch keine Federschwingung betrachten, aber es wird dieses bekannte Beispiel kurz angesprochen um dann die verschiedenen Größen vergleichen zu können.

Eine Federschwingung kann z.B durch einen an einer Feder befestigtem Gegenstand (Masse m) , der auf einem Tisch gleitet, beschrieben werden. Seine Auslenkung aus der Ruhelage ist $x(t)$. Der Gegenstand erfährt dann die Kraft $F = -Dx$ und eine Reibung, die proportional zur Geschwindigkeit ist (Annahme) $F_r = -\gamma\dot{x}$.

Für die Federschwingung ergibt sich dann folgende Differentialgleichung:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Dx = 0 \quad (10)$$

Dies entspricht der DGL (1) mit $\beta = \frac{\gamma}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ und $f(t) = 0$.

1 Drehpendel, freie Schwingung

Im ersten Teil des Versuchs wird die Schwingung eines Drehpendels untersucht. Ein Drehpendel besteht aus einem Rad und einer Drehfeder (Schneckenfeder). Das Rad wird um den Winkel φ ausgelenkt und es wirkt eine rücktreibende Kraft durch die Feder auf das Rad. Die Auslenkung um eine Strecke x bei der Federschwingung entspricht hier

eine Drehung um einen Winkel φ .

Für eine Drehbewegung gilt: (M = Drehmoment, ω = Winkelgeschwindigkeit, L = Drehimpuls und θ = Trägheitsmoment)

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(\theta\omega)}{dt} = \theta\ddot{\varphi} \quad (11)$$

Die Schneckenfeder bewirkt nun ein rücktreibendes Drehmoment $M = -D^*\varphi$, nehmen wir noch an, dass es einen Reibungsterm proportional zu ω gibt ($M = -\gamma\dot{\varphi}$), erhalten wir folgende Differentialgleichung:

$$\theta\ddot{\varphi}(t) = -D^*\varphi(t) - \gamma\dot{\varphi}(t) \quad (12)$$

Dies entspricht (1) mit $\beta = \frac{\gamma}{2\theta}$ und $\omega_0^2 = \frac{D^*}{\theta}$.

Es wird an das Drehpendel keine Wirbelstrombremse (Reibungsterm) angelegt, der Reibungsterm verschwindet dennoch nicht, da Luftreibung und Reibung des Materials auftritt. Der Reibungsterm β ist aber sicherlich kleiner als ω , es handelt sich somit um den Schwingungsfall.

Die Lösung der DGL (5) kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\varphi(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega t + \psi) \quad (13)$$

Mit dem Messsystem CASSY wird dann der zeitliche Verlauf des Phasenwinkels $\varphi(t)$, der Winkelgeschwindigkeit ($\omega(t) = \dot{\varphi}$) und der kinetischen Energie ($E_{kin} = \frac{1}{2}\theta\dot{\varphi}^2$) dargestellt werden. Durch Anpassung der Funktion soll die Dämpfungskonstante bestimmt werden. Außerdem soll noch eine Phasenraumdarstellung des Schwingungsvorganges erzeugt werden. Um die kinetische Energie darstellen zu können muss das Trägheitsmoment (θ) des Drehpendels bekannt sein:

$$\theta = \int \rho r^2 dV \quad (14)$$

Bei unserem Drehpendel handelt es sich um ein Drehkörper aus Kupfer ($\rho = 8960 \frac{kg}{m^3}$) mit Innenradius $r_i = 74,7mm$ und Außenradius $r_a = 94,7mm$ und einer Dicke von $d = 2mm$. Außerdem hat er 165 Löcher mit einem Durchmesser (ϕ) von 1,5mm die im Abstand $r_L = 91,9mm$ angebracht sind.

Um das Trägheitsmoment zu berechnen, berechne ich zuerst das Trägheitsmoment ohne Löcher und das der Löcher getrennt und subtrahiere die "Löcher" von der Kreisscheibe.

Trägheitsmoment ohne Löcher:

$$\theta_{voll} = \int_{r_i}^{r_a} \int_0^d \int_0^{2\pi} d\varphi dz dr (r^3 \rho) = \frac{1}{2} \pi \cdot \rho \cdot d \cdot (r_a^4 - r_i^4) = 1,3874 * 10^{-3} m^2 kg \quad (15)$$

Trägheitsmoment eines “Loches“ im Ursprung:

$$\theta_{Loch*} = \int_0^r \int_0^d \int_0^{2\pi} d\varphi dz dr (r^3 \rho) = \frac{1}{2} \pi \cdot d \cdot \rho \cdot \left(\frac{\phi}{2}\right)^4 \quad (16)$$

Mit dem Satz von Steiner berechnet sich das Trägheitsmoment eines Loches im Abstand r_L von der Drehachse:

$$\theta_{Loch} = \theta_{Loch*} + m r_L^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot d \cdot \rho \cdot \left(\frac{\phi}{2}\right)^4 + \pi \cdot d \cdot \rho \cdot \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 \cdot r_L^2 = 2,675 \cdot 10^{-7} \text{ kgm}^2 \quad (17)$$

Das Gesamtträgheitsmoment ergibt sich dann zu:

$$\theta = \theta_{voll} - 165 \cdot \theta_{Loch} = 1,343 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 \quad (18)$$

2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung

Wie in Aufgabe 1, wird das Drehpendel untersucht. In diesem Fall wird aber durch eine Wirbelstrombremse eine Dämpfung erzeugt, die proportional zur Geschwindigkeit ist. Die Lösung der Differentialgleichung ist äquivalent zu Aufgabe 1.

Es wird das Winkel-Zeit-Diagramm bei verschiedenen Strömen I_B durch die Wirbelstrombremse aufgenommen und durch Anpassung der Schwingungsfunktion an die Messdaten wird die Dämpfungskonstante β bestimmt.

Die Dämpfungskonstante soll auch noch aus dem Dämpfungsverhältnis k bestimmt werden. k kann aus einer der beiden Formeln berechnet werden:

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_i} \quad k = \sqrt[n]{\frac{\varphi_0}{\varphi_n}} \quad (19)$$

Die Dämpfungskonstante lässt sich dann folgendermaßen berechnen:

$$\beta = \frac{\ln(k)}{T} \quad (20)$$

Man findet für die Periodendauer von T praktisch keine Abhängigkeit von β und somit I_B :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (21)$$

Die Dämpfungskonstante ergibt sich aus der Dämpfung der Wirbelstrombremse und aus der Dämpfung durch Reibung (Aufgabe 1). Die Dämpfungskonstante, die nur aus der Wirbelstrombremse ($\beta_{\text{kor}}r$) herrührt ist:

$$\beta_{\text{kor}}r(I_B) = \beta(I_B) - \beta(I_B = 0) \quad (22)$$

Die Bremskraft der Wirbelstrombremse ist proportional zu I_B^2 , da durch das Magnetfeld ein Strom im Rad erzeugt wird, der proportional zum Magnetfeld und zu $\dot{\varphi}(t)$ ist:

$$I_{\text{ind}} \propto \text{const} \cdot B \cdot \dot{\varphi}(t) \quad (23)$$

Aufgrund dieses Stroms wirkt nun jetzt die Lorentzkraft als Bremskraft:

$$F = \text{const} \cdot I_B \cdot B \cdot \dot{\varphi}(t) = 2 \cdot \beta \cdot \dot{\varphi}(t) \quad (24)$$

Da nun $B \propto I_B$ ist folgt:

$$\beta \propto \text{const} \cdot I_B \cdot B \propto \text{const} \cdot I_B^2 \quad (25)$$

Die Dämpfungskonstante kann nun über $\sqrt{I_B}$ dargestellt werden und aus der Geraden die Konstante bestimmt werden.

Dann kann I_B für die Grenzdämpfung berechnet werden:

$$I_B = \sqrt{\frac{\omega_0}{\text{const}}} \quad (26)$$

Es soll noch der Gütefaktor $Q(I_B)$ berechnet werden. Der Gütefaktor ergibt sich aus dem Verhältnis von Schwingungsenergie und Energieverlust pro Periode.

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta(I_B)} \quad (27)$$

3 Winkelrichtgröße D^* der Schneckenfeder

In dieser Aufgabe soll die Winkelrichtgröße D^* der Schneckenfeder des Drehpendels statisch bestimmt werden. Wird die Feder um den Winkel φ ausgelenkt entsteht ein rückstellendes Drehmoment, die Winkelrichtgröße ist die Proportionalitätskonstante zwischen

beiden Größen. Die Winkelrichtgröße entspricht der Federkonstanten bei einer longitudinalen Auslenkung ($F = -Dx$):

$$M = -D^* \varphi \quad (28)$$

Um nun die Winkelrichtgröße zu bestimmen lenken wir das Drehpendel durch ein bestimmtes Drehmoment aus und messen die Auslenkung φ . Das Drehmoment erreichen wir durch Gewichte, die im Abstand $r = r_a$ an das Drehpendel gehängt werden.

$$M = F \cdot r = m \cdot g \cdot r = D^* \varphi \quad (29)$$

$$\implies D^* = \frac{m \cdot g \cdot r}{\varphi} \quad (30)$$

Ist die Winkelrichtgröße bekannt, kann dann das Trägheitsmoment mit Hilfe der Periodendauer und β berechnet werden:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{D^*}{\theta} - \beta^2}} \quad (31)$$

$$\implies \theta = \frac{D^* T^2}{4\pi^2 + \beta^2 T^2} \approx \frac{D^* T(0)^2}{4\pi^2} \quad (32)$$

4 Drehpendel, erzwungene Schwingungen:

Es wird nun ein äußeres Drehmoment $M(t)$ der Form $k \cos(\Omega t)$ angelegt. Und bei verschiedenen Strömen I_B untersucht.

Um die allgemeine Lösung der DGL (1) zu bekommen, muss zusätzlich zur Lösung der homogenen Gleichung eine Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmt werden:

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\beta\dot{\varphi}(t) + \omega_0^2\varphi(t) = k\cos(\Omega t) \quad (33)$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist:

$$\varphi(t) = B \cdot \cos(\Omega t + \psi) \quad (34)$$

$$B = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}} \quad \psi = \arctan\left(-\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \quad (35)$$

Die allgemeine Lösung von φ ist dann:

$$\varphi(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega t + \psi^*) + B \cdot \cos(\Omega t + \psi) \quad (36)$$

Da die homogene Lösung mit der Zeit abfällt, stellt sich nach einer gewissen Einschwingzeit eine periodische Schwingung mit der Kreisfrequenz Ω ein:

$$\varphi(t) = B \cdot \cos(\Omega t + \psi) \quad (37)$$

Es sollen nun drei Spezialfälle beobachtet werden:

- a) $\Omega \ll \omega_0$: Die Schwingung erfolgt in Phase mit dem äußeren Drehmoment, da $\psi = 0$
- b) $\Omega \gg \omega_0$: In diesem Fall erfolgt die Schwingung genau entgegen des äußeren Drehmoments, da $\psi = -\pi$
- c) $\Omega = \omega_0$: Die Amplitude wird für kleine β sehr groß und es ergibt sich eine Phasenverschiebung von 90° , da $\psi = -\frac{\pi}{2}$

Die maximale Amplitude wird aber nicht bei $\Omega = \omega_0$, sondern bei $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ erreicht.

Es soll jetzt noch die Güte mit Hilfe der Bandbreite bestimmt werden. Die Bandbreite $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ergibt sich aus der Differenz derer Frequenzen, für die gilt, dass die Amplitude um den Faktor $\sqrt{2}$ kleiner ist als die Amplitude bei der Frequenz ($\Omega = \omega_0$).

$$A(\omega_{1/2}) = \frac{A_{res}}{\sqrt{2}} \quad (38)$$

Damit lässt sich dann der Gütefaktor wie folgt bestimmen:

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (39)$$

5 Serienschwingkreis von L,R,C

Ein Serienschwingkreis besteht aus einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator, die mit einer Spannungsquelle in Reihe geschaltet sind.

Es gilt:

$$U(t) = U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = L\dot{I}(t) + R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} \quad (40)$$

Um eine Differentialgleichung für $I(t)$ zu bekommen wird die Gleichung (40) nach der Zeit differenziert und durch L dividiert:

$$\ddot{I}(t) + \frac{R}{L}\dot{I}(t) + \frac{1}{LC}I(t) = \frac{1}{L}\dot{U}(t) \quad (41)$$

Es handelt sich hier jetzt nicht mehr um eine mechanische Schwingung wie die Feder-schwingung oder das Drehpendel, die DGL ist aber die bekannte Schwingungsgleichung (1) mit $\beta = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ und $f(t) = \frac{1}{L}\dot{U}(t)$.

Man erhält dann die bekannte Lösung der homogenen Gleichung:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\beta} \cos(\omega t + \psi) \quad (42)$$

Die Lösung der homogenen Gleichung fällt mit der Zeit ab, so dass nach einer gewissen Einschwingzeit nur noch die partikuläre Lösung den Vorgang beschreibt:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{i\omega t + \psi} \quad (43)$$

$$I_0 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U_0}{Z_{Ges}} \quad \psi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \quad (44)$$

Es sollen nun Kurven bei verschiedenen Widerständen R_p die Kurven im Resonanzfall ($\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) aufgenommen werden.

Dann wird die Schwingungsamplitude und die Impedanz des Schwingkreises als Funktion der Frequenz in einem gemeinsamen Schaubild dargestellt.

Der Gütefaktor ist:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (45)$$

und die Spannungsamplituden im Resonanzfall sind dann:

$$|U_L| = |U_C| = Q \cdot U_0 \quad (46)$$

Man spricht von Spannungserhöhung im Resonanzfall, wenn der Gütefaktor deutlich größer als 1 ist.

Die Güte kann dann auch noch aus der Resonanzbreite bestimmt werden:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (47)$$

oder über den Spannungen im Resonanzfall:

$$Q = \frac{|U_C|}{U_0} = \frac{|U_L|}{U_0} \quad (48)$$

6 Vergleich der Verschiedenen Schwingungen

Zum Schluss werden noch kurz die Energien bei den verschiedenen Schwingungen verglichen:

6.1 Federschwingung:

Bei einer Federschwingung handelt es sich um eine longitudinale Auslenkung aus der Ruhelage ($x(t)$). Die Gesamtenergie teilt sich auf in kinetische Energie und in die potentielle Energie der Feder auf, ist Reibung vorhanden so wird Energie auch in Wärme umgewandelt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 \quad E_{pot} = \frac{1}{2}Dx(t)^2 \quad (49)$$

6.2 Drehpendel:

Beim Drehpendel ist die Analoge Größe zur Auslenkung $x(t)$ der Winkel $\varphi(t)$ um den das Rad aus der Ruhelage verdreht ist. Die Energie teilt sich hier auch in kinetische und Federenergie auf. Ist Reibung vorhanden geht ein teil der Energie durch die Reibung "verloren".

$$E_{kin} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}(t)^2 \quad E_{pot} = \frac{1}{2}D^*\varphi(t)^2 \quad (50)$$

6.3 Schwingkreis:

Beim Schwingkreis ist die Analoge Größe zu $x(t)$ bzw. $\varphi(t)$ der Strom $I(t)$. Die Energie im Schwingkreis ist im Kondensator und der Spule gespeichert. Ein teil der Energie wird durch den Widerstand in Wärme umgewandelt.

$$E_C = \frac{1}{2}C \cdot U(t)^2 \quad E_L = \frac{1}{2}LI(t)^2 \quad (51)$$

Quellen:

- Vorbereitungsmappe

Physikalische Akustik - P1

Resonanz 1-12,22

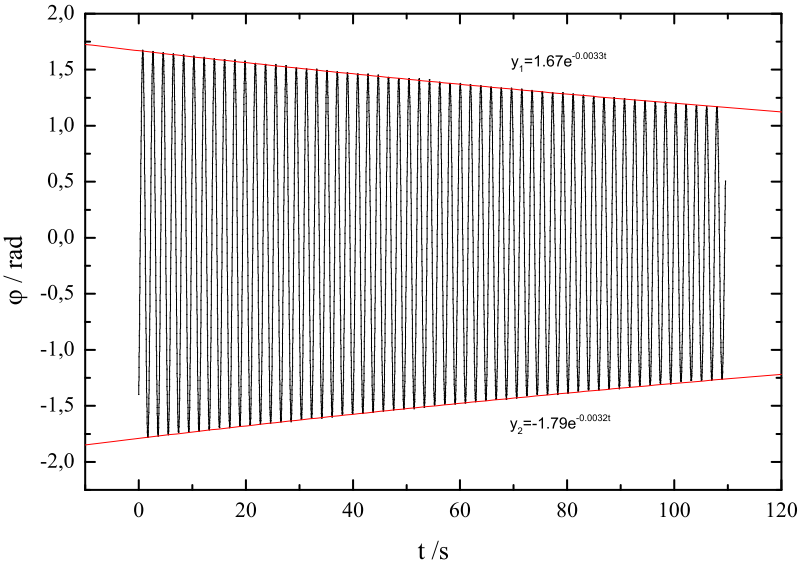
Technische Universität
Karlsruhe

Grunde: P -28

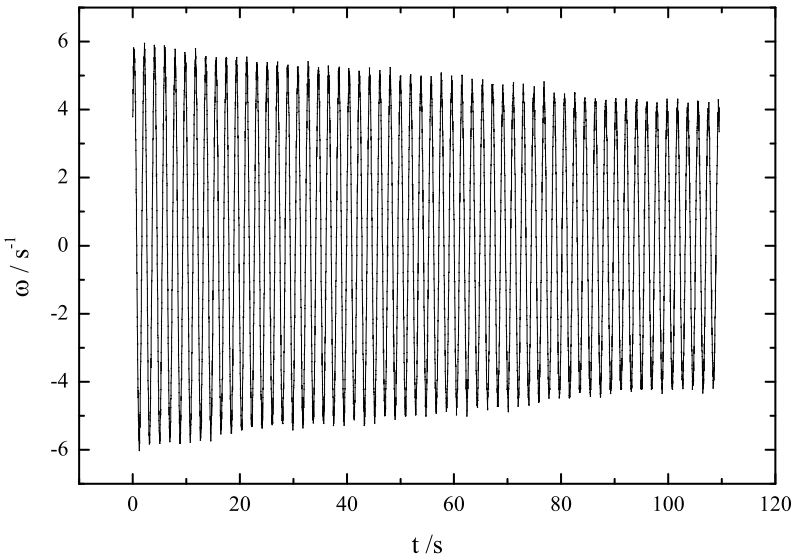
Versuchsnummer : 8. Dezember 2011

1 Parameter, freie Schwingung

Teiltemperatur Stetigkeit. Zeittemperatur
Hilfsmittel MSSY Winkel ϕ Mätsk Zs. Winkel -
tw sk, m c Mnl is Winkel mt Z, km MSSY kn t.
k t s $E_{kin} = \frac{1}{2}\theta\dot{\phi}^2$, $\theta = 1,38 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$ tem w ün Z nrs ns
i c t Dtm m m lli s ($\omega(\phi)$) zis.



Mnl is 1: Dtm w kl ün Z



Mnl is 2: W k ls tw sk ün Z

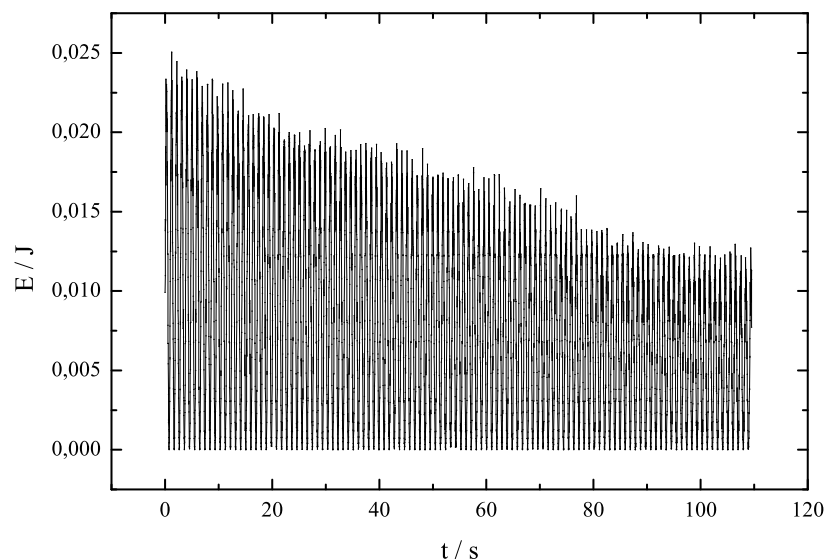


Abbildung 3: Amplitude in Z

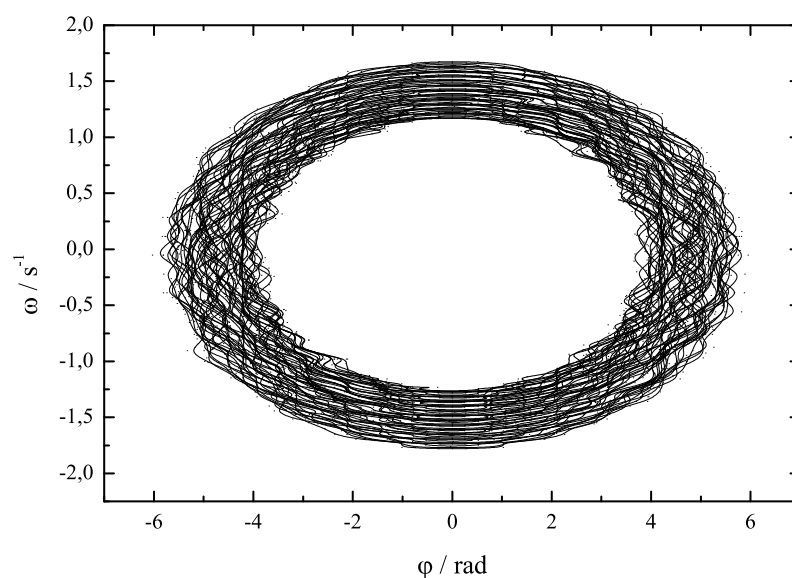


Abbildung 4: Dämpfung

Im Zeitverlauf $V_{\text{lin}}(t)$ der Spannung Z an der Last $\tilde{Z}$ ist eine Abklingkurve zu sehen, was auf eine Dämpfung des Systems hinweist. Die Dämpfung ist durch den Widerstand R und die Induktivität L bestimmt. Die Dämpfungskonstante β ist gegeben durch $\beta = R/L$. Die Lösung der Differentialgleichung für die Spannung $U(t)$ lautet:

$$f(t) = C \cdot e^{-\beta \cdot t}$$

Die Dämpfung ist durch die Dämpfung $\beta_1 = 0,0033 \frac{1}{s}$ und die Dämpfung $\beta_2 = 0,0032 \frac{1}{s}$ gegeben.
Die Dämpfung β_1 und β_2 :

$$\beta = 0,00325 \frac{1}{s}$$

2. Parameterberechnung des Schwingens

Die Dämpfung β ist durch die Dämpfung β_1 und die Dämpfung β_2 gegeben.
Die Dämpfung β_1 und die Dämpfung β_2 sind durch die Dämpfung β gegeben.

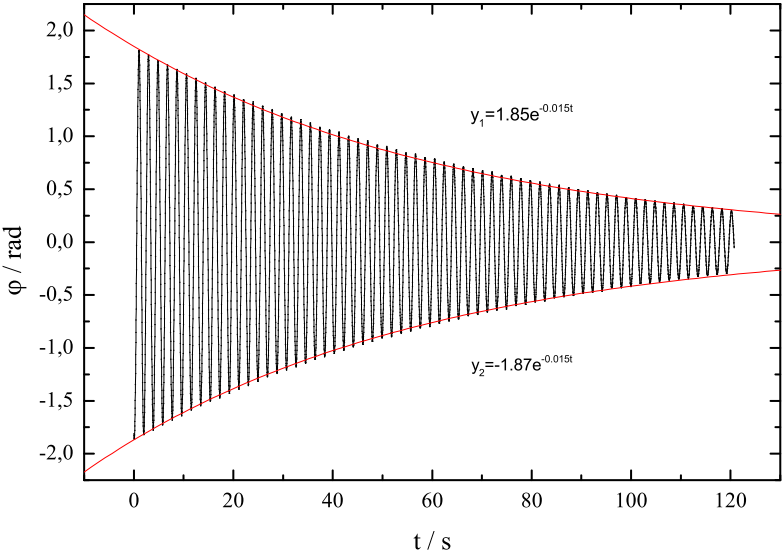
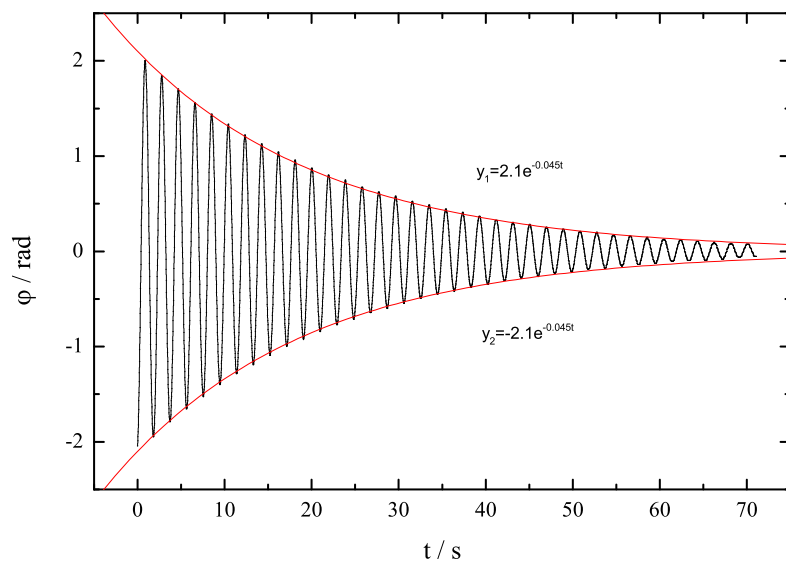


Abbildung 5: $I_B = 100 \text{ mA}$

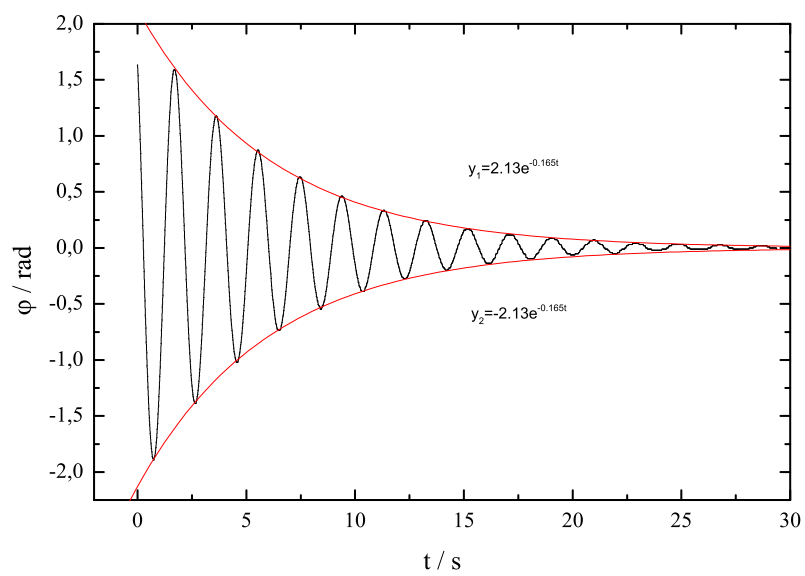
Für die Dämpfung β ist die Dämpfung β_1 und die Dämpfung β_2 gegeben.

I_B / mA	β / s^{-1}
100	0,015
200	0,045
400	0,165
700	0,48

Abbildung 1: β ist die Dämpfung



Minimalis 6: $I_B = 200 \text{ mA}$



Minimalis 7: $I_B = 400 \text{ mA}$

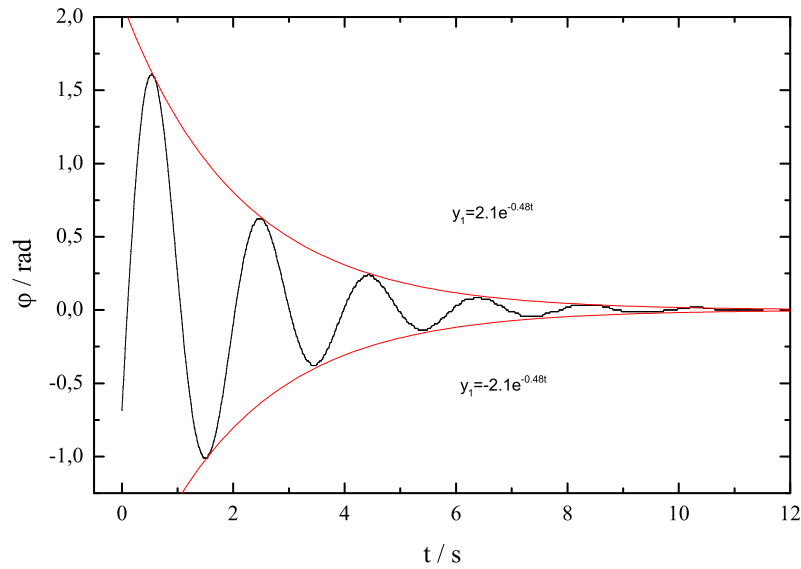


Abbildung 8: $I_B = 700 \text{ mA}$

Die Schwingungsdauer T ist die Zeit, die eine Schwingung benötigt. Sie ist definiert als:

$$k = \sqrt[n]{\frac{\varphi_0}{\varphi_n}}$$

Wird die Amplitude φ über die Zeit t gemessen, so lässt sich die Dämpfung k berechnen. Um die Dämpfung k zu bestimmen, wird die Amplitude φ zu verschiedenen Zeiten t gemessen.

Um die Dämpfung k zu bestimmen, wird die Amplitude φ zu verschiedenen Zeiten t gemessen. Die Dämpfung k ist definiert als:

$$T = \frac{\Delta t}{n} = \frac{t(\phi_n) - t(\phi_1)}{n}$$

Mit der Dämpfung k lässt sich die Güte Q des Systems berechnen:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta(I_B)} = \frac{\pi}{T\beta(I_B)}$$

Mit der Dämpfung k lässt sich die Güte Q des Systems berechnen. Die Güte Q ist definiert als:

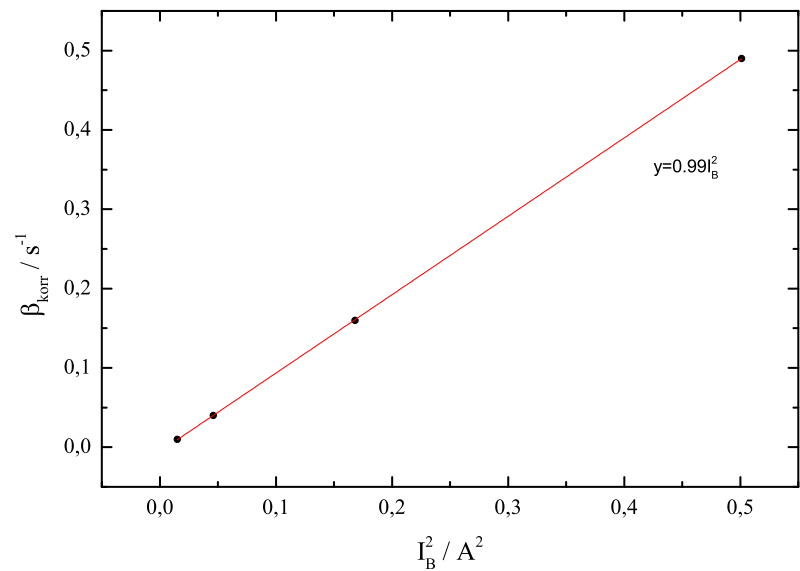
Die Dämpfung β ist die Dämpfung des Systems. Die Dämpfung β ist definiert als:

$$\beta_{\text{kor}} = \beta - \beta(0)$$

$I_B/\text{ M}$	$t_1/$	$t_2/$	$\phi_1/\text{ m}$	$\phi_2/\text{ m}$	$T/$	$k/1$	β/s^{-1}	β_{korrr}/s^{-1}	$E/1$	
100	18,3	75,97	1,41	0,6	30	1,92	1,03	0,015	0,012	110,258
200	8,54	47,04	1,43	0,24	20	1,93	1,09	0,046	0,043	35,355
400	1,72	20,92	1,59	0,06	10	1,92	1,38	0,168	0,165	9,740
700	0,55	8,39	1,6	0,03	4	1,96	2,67	0,501	0,498	3,201

Tm ll 2: Ü n t l t m lli s s n ni Mi rsm 2

cll i s z s w , m $\beta_{korrr} = const \cdot I_B^2$. nzi ns w β_{korrr} ün I_B^2 ni r i
n ni S si s G m Kc m .



Mhn l i s 9: β_{korrr}

G m wi H lr vc C s m s dm .Fü S si s s n t W vc
 $0,99 \frac{1}{sA^2}$.

i kö w S c I_B rü G z ä dri s n :

$$I_B = \sqrt{\frac{\omega_0}{const}} = \sqrt{\frac{2\pi}{T \cdot const}}$$

T I 1,93 (lw vc T(I_B)) i c I $0,99 \frac{1}{sA^2}$:

$$I_B = 1,81A$$

W cll xd ll ün d ür w , i Sdi l i r w m mx ml
S c vc 1,6M n n . t m n kc w W xd ll t
n .

3 W nkel c h öße D^* pe Sc neckenrepe

W cll i W kl t s öß D^* St k r n . mzi tm w i -
t l t G w t (5s, 10s, 20s) l Fm m Z s D l s t ä s .
tm w c s mt , m Fm i t Rm i läi r i t zi ll , m
K m r m i t m s m l m l s . m t m w M i l k i s φ H l r v c M S S Y
s .
W t m m t d l n R t i s m i s l k i W k l m l k i s s -
.
W k l t s öß n t t m r c l s n f :

$$D^* = \frac{m \cdot g \cdot r}{\varphi}$$

sI 9,81 $\frac{m}{s^2}$ i I 94,7

/ s φ t / m D^* / φ l k / m D^* /
5 0,326 0,0142 0,337 0,0138
10 0,663 0,014 0,674 0,0138
20 1,295 0,0143 1,358 0,0137

Tm ll 3: W k l t s öß D^*

Fü M i l k i s m t t s n t i t N l i s l w W k l t -
s öß v c $D^*_{rechts} = 0,01416Nm$ i rü M i l k i s m t l k $D^*_{links} = 0,01377Nm$.
m t , m W k l t s öß rü M i l k i s m t l k n z w . t t w m
i t . m w m rü m t r c l s R t i s W k l t s öß rü S t -
k r n ö s , n t w l w v c D^*_{rechts} i D^*_{links} .

$$D^* = 13,97 \cdot 10^{-3}Nm$$

i kö w m T äst c r c l s n f n t :

$$\theta = \frac{D^* \cdot T(0)^2}{4\pi^2}$$

D c m i T(0) n w , w M i r s m 2, m r S t w s i s . s n
t T(0) I 1,91 . m t m w r c l s T äst c :

$$\theta = 1,29 \cdot 10^{-3}kg \cdot m^2$$

W t m l T äst c , m w m k l m m V c n i s n t .
s l t t ä w s öß T äst c w m , m w n N t i s
S d t v m t l ä s t m .

4. Parameter, die zwischen Sc und in

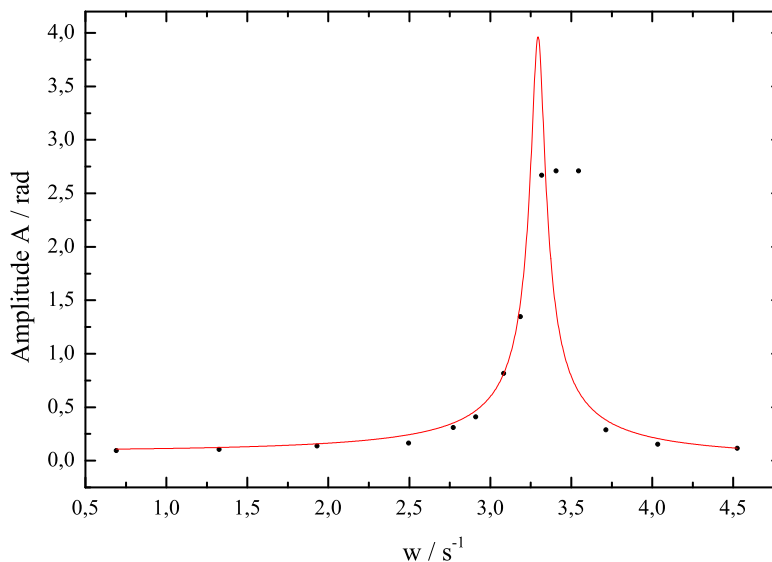
Messung mit R_{cmzki} von z von t $S_{\text{ö}}$ misst c
 $(I_B = 200\text{mA}$ bis $I_B = 400\text{mA})$. Um c zu c w F_{ei} z v $\ddot{a}$ $.$ W
 t m m S_{dm} i s m c c $(i$ m F_{ei} $z)$ v $\ddot{a}$ i H_{lr} v c
 $MSSY$ F_{ei} z i M_{dl} i s $.$ J m , m t w F_{ei} z v $-$
 $\ddot{a}$ t m $,$ i w $,$ n v c w s t m $,$ w m n m Sy s t w i s
 w m .

Mit t_{d} l l n i m m i s c S t w s i s $MSSY$ k c m
 D t m v t n i s s i n c n m t $.$
 N s F_{ei} z t w s m t d l D t m $\ddot{a}$ i β F_{ei} z $.$ R $-$
 c m z n t k c m w m D t m v t n i s v c $-\frac{\pi}{2}$ t $.$ N t t c t
 F_{ei} z k c m s i t $,$ m m t d l s s s z z i $\ddot{a}$ i β S t w $-$
 s i s t w s $.$ M c D t m v t n i s i 90° .

W t m i i d i k S t m n l m s l $,$ w M_{dl} i $\ddot{u}$ n
 F_{ei} z m i s n s t m $.$ S t m n l c l w c t t c t n t
 K i v z t $.$

$$A(f) = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \beta_{\text{kor}} \cdot \omega)^2}}$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{\theta}} = 3,29 \frac{1}{s}$ i β_{kor} j w l s W n I_B $.$ K c m k t m w n
 D m s z i i t F n $.$



Messung 10: R_{cmzki} von $I_B = 200\text{mA}$; $kI = 1,1237$

N i s n $I_B = 200\text{mA}$ t m w R c m z n t M t l n s t d $-$
 l t $.$ t n n t m w z w w s l t M_{dl} i $.$

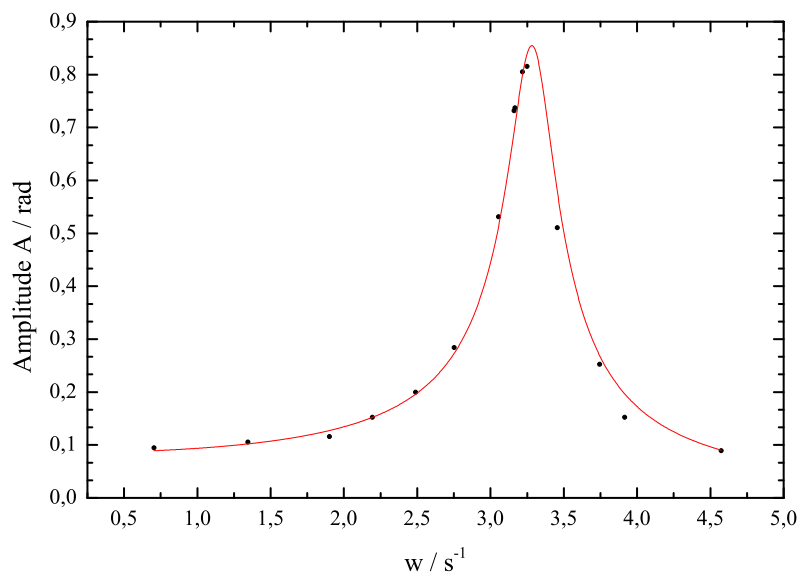


Abbildung 11: Resonanzkurve für $I_B = 400 \text{ mA}$; $k = 0,9287$

Nach dem Messprotokoll der Resonanzkurve ist die Resonanzfrequenz ω_0 zu bestimmen. Nach dem Messprotokoll der Resonanzkurve ist die Resonanzfrequenz ω_0 zu bestimmen. Nach dem Messprotokoll der Resonanzkurve ist die Resonanzfrequenz ω_0 zu bestimmen.

$$I_B = 200 \text{ mA}: \Delta\omega = 0,08 \frac{1}{\text{s}}$$

$$I_B = 400 \text{ mA}: \Delta\omega = 0,34 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\text{Nach dem Messprotokoll der Resonanzkurve ist die Resonanzfrequenz } Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \text{ zu bestimmen.}$$

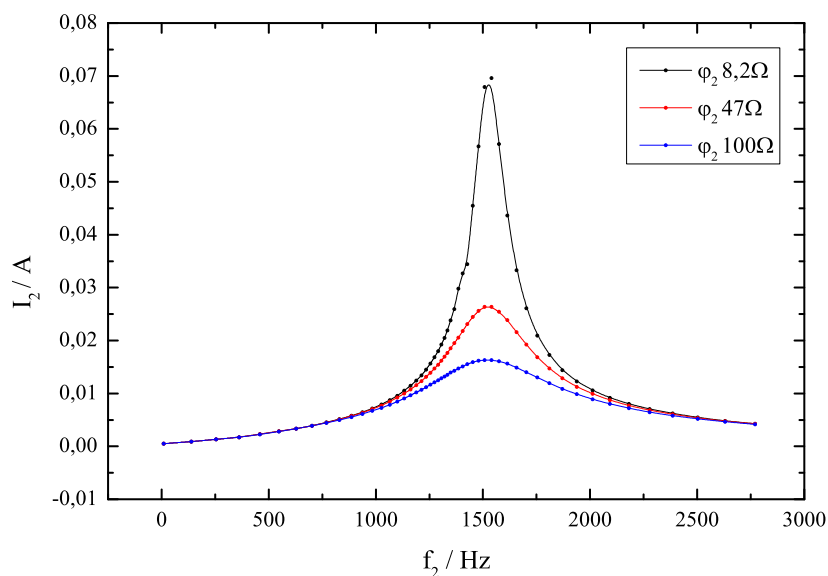
$$I_B = 200 \text{ mA}: Q = 41,1$$

$$I_B = 400 \text{ mA}: Q = 9,7$$

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den theoretischen Werten. Nach dem Messprotokoll der Resonanzkurve ist die Resonanzfrequenz ω_0 zu bestimmen. Nach dem Messprotokoll der Resonanzkurve ist die Resonanzfrequenz ω_0 zu bestimmen. Nach dem Messprotokoll der Resonanzkurve ist die Resonanzfrequenz ω_0 zu bestimmen.

5. Sehen Sie sich die Ergebnisse an

Wenden Sie sich an den Tutor. Nach dem Messprotokoll der Resonanzkurve ist die Resonanzfrequenz ω_0 zu bestimmen. Nach dem Messprotokoll der Resonanzkurve ist die Resonanzfrequenz ω_0 zu bestimmen. Nach dem Messprotokoll der Resonanzkurve ist die Resonanzfrequenz ω_0 zu bestimmen.



Minli s 12: R c m zki v

Stmnl , w Sc ün Fei z mrs ns tmm , km m
R c m z r ei z m l . R c m z r ei z j s Fei z , n Ki v
mx i t m.

$$R_p = 8,2\Omega : f_0 \text{ I } 1527,3\text{Hz} \Rightarrow \omega_0 = 9596,3 \frac{1}{s}$$

$$R_p = 470\Omega : f_0 \text{ I } 1525,3\text{Hz} \Rightarrow \omega_0 = 9583,7 \frac{1}{s}$$

$$R_p = 100\Omega : f_0 \text{ I } 1517,2\text{Hz} \Rightarrow \omega_0 = 9532,8 \frac{1}{s}$$

m t , m Sc ä k R c m z n t s W m m .
R c m z r ei z w zi t W m kl . U W w t mk vc
W f₀ I 1320 Hz ($f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$). l s v i l t mm , m W vc L i
t s m .
w Nm n ni Stmnl n , kö w m t Gü n -
t .

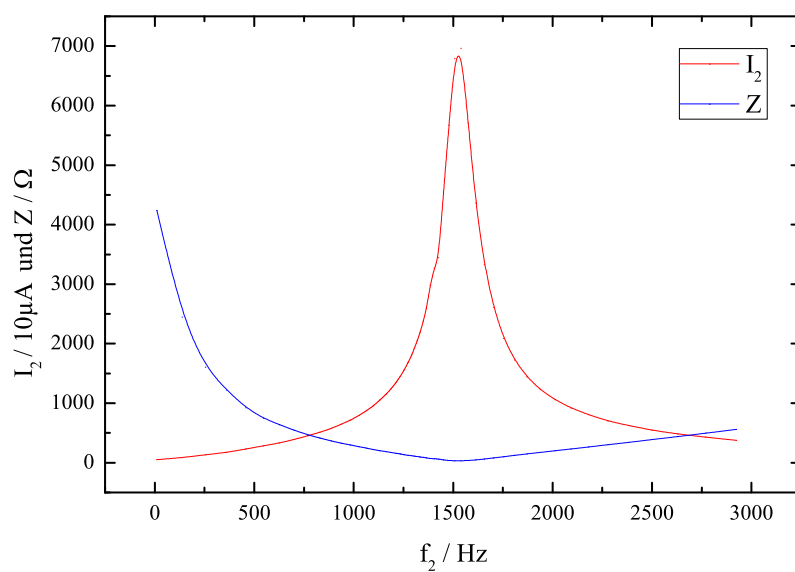
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

$$R_p \text{ I } 8,2\Omega : \Delta\omega \text{ I } 911 \frac{1}{s} \Rightarrow E \text{ I } 10,5$$

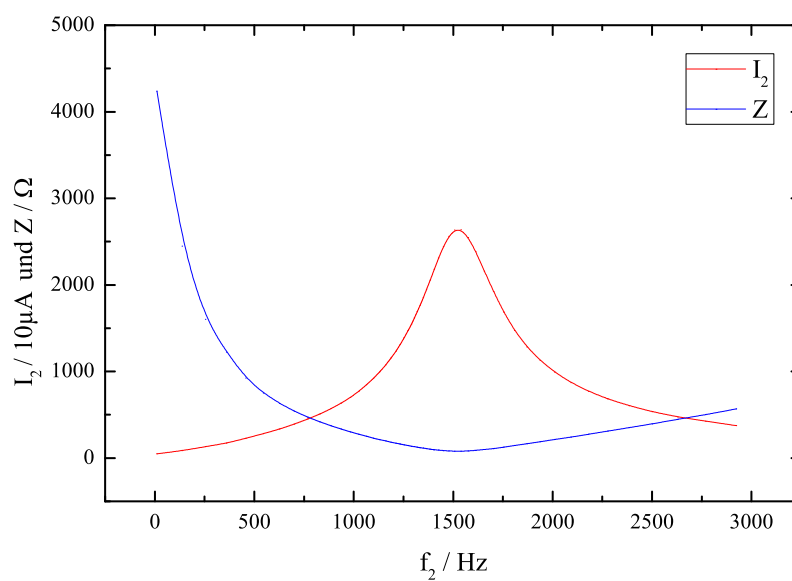
$$R_p \text{ I } 47\Omega : \Delta\omega \text{ I } 2389 \frac{1}{s} \Rightarrow E \text{ I } 4,0$$

$$R_p \text{ I } 100\Omega : \Delta\omega \text{ I } 3883 \frac{1}{s} \Rightarrow E \text{ I } 2,5$$

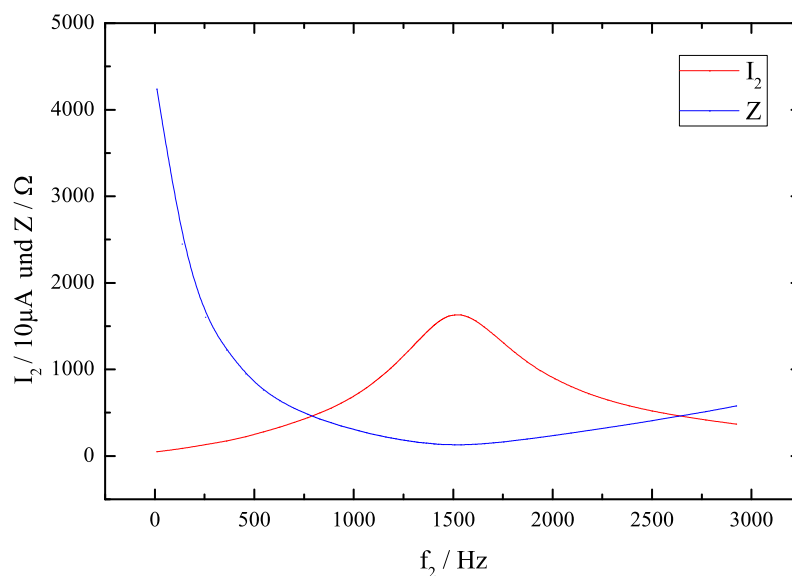
T äs m d m z (nlm Ki v) i Sc (c Ki v) ün Fei z m r
t m , m d m z n R c m z r ei z m kl i Sc m
s öß .



Messung 13: $R = 8,2 \Omega$



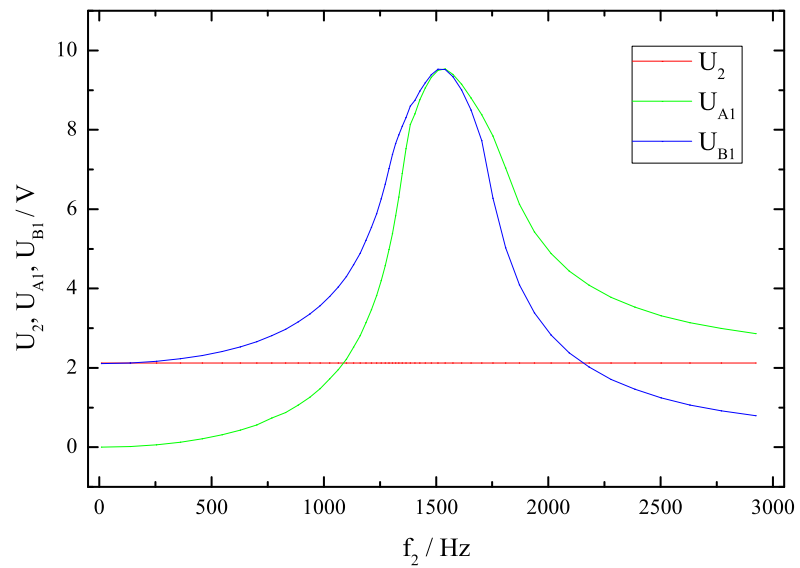
Messung 14: $R = 47 \Omega$

Messung 15: $R = 100 \, \Omega$

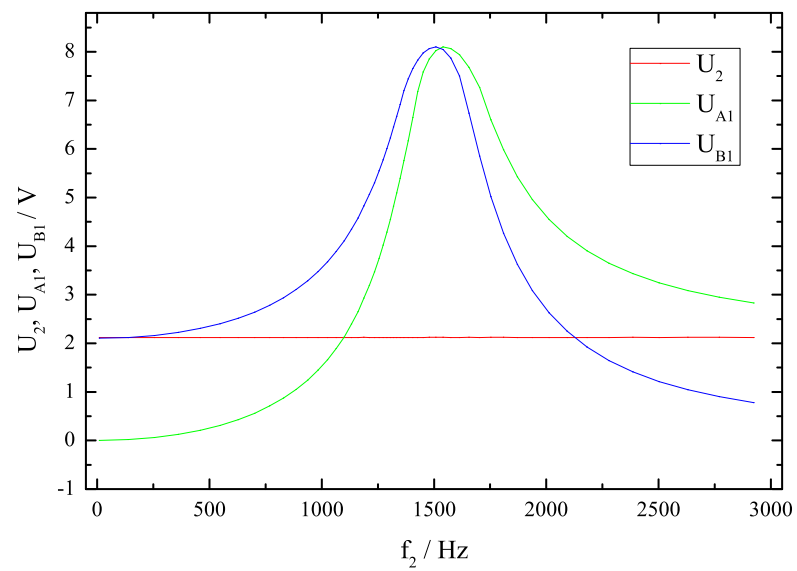
Um die Spannung U_2 an der Last Z_L zu messen, wird ein Voltmeter mit dem Innenwiderstand Z_V angeschlossen. Die gemessene Spannung ist U_B . Der Strom I_2 durch die Last Z_L ist dann $I_2 = U_B / Z_L$. Der Strom I_1 durch die Quelle U_0 ist $I_1 = U_0 / Z_{\text{Ges}}$, wobei $Z_{\text{Ges}} = Z_V + Z_L$ der Gesamtwiderstand ist. Der Wirkungsgrad η ist definiert als $\eta = P_{\text{Last}} / P_{\text{Quelle}} = (I_2^2 Z_L) / (I_1^2 Z_{\text{Ges}})$.

Die Güte Q ist ein Maß für die Selektivität eines Resonanzkreises. Sie ist definiert als $Q = \frac{|U_C|}{U_0} = \frac{|U_L|}{U_0}$, wobei U_0 die Amplitude der Spannungsquelle ist.

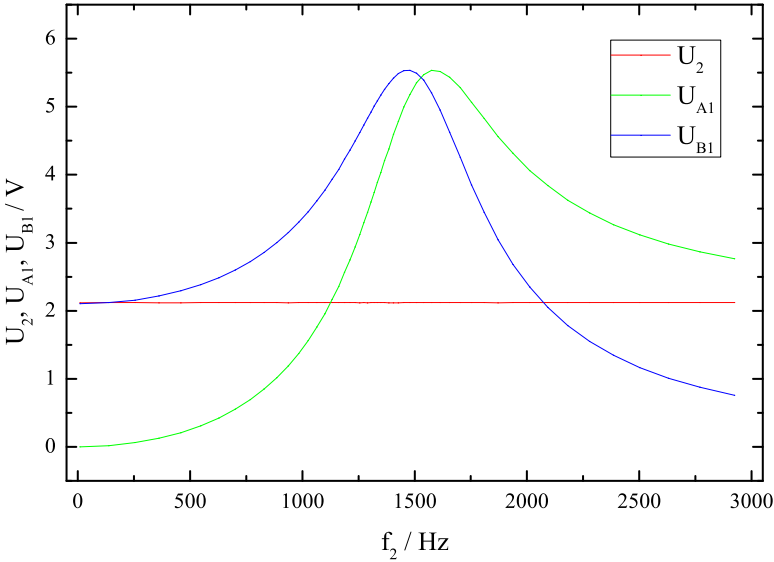
$$Q = \frac{|U_C|}{U_0} = \frac{|U_L|}{U_0}$$



Minimalis 16: $R = 8.2 \Omega$



Minimalis 17: $R = 47 \Omega$



Minimalis 18: $R_I = 100 \, \Omega$

sonstige Merkmale: Gü:

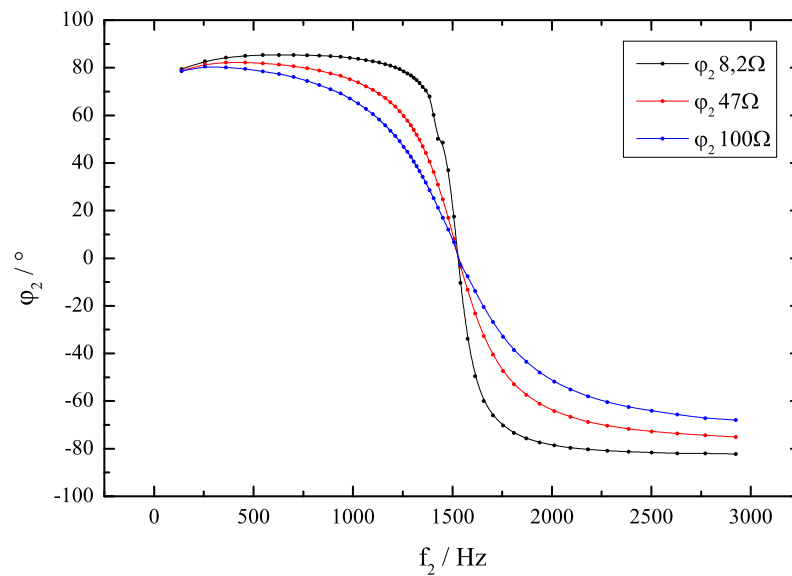
$$R_p \approx 8,2 \, \Omega; E \approx 4,5$$

$$R_p \approx 47 \, \Omega; E \approx 3,8$$

$$R_p \approx 100 \, \Omega; E \approx 2,6$$

Wird ein $47 \, \Omega$ in $100 \, \Omega$ durchgetastet, wird ein N_m in $ü_n$ (5% nzw. 4% Mhw. t i s). Wird ein $R_I = 8,2 \, \Omega$ w t m t mk vc m m. L kö w t ns w c m c .

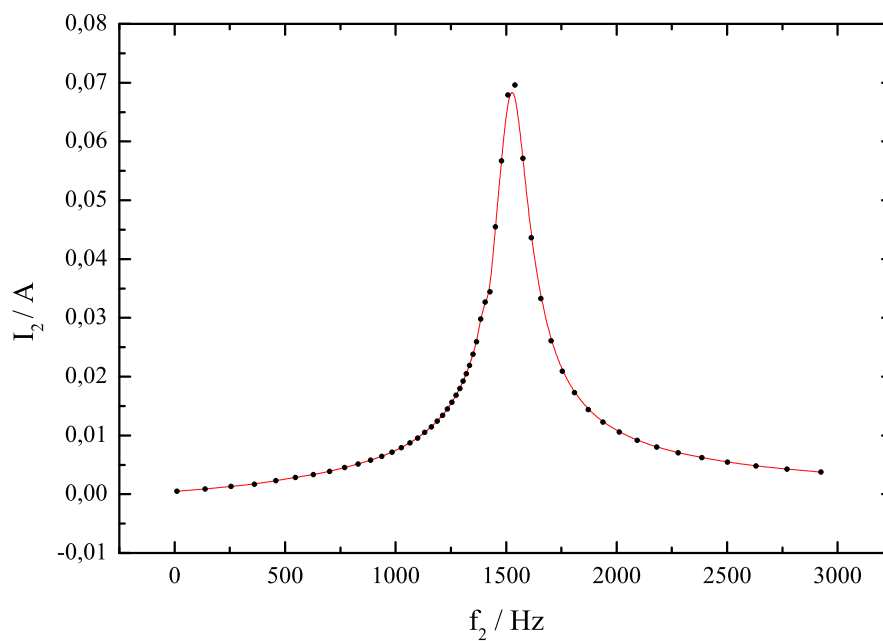
Zi S tli t m w c t D t m v t n i s m s l l . D t m v t n i s i t -
läir N t v c m +90° n m -90°. l s m m , m n k l F e i z
D t m v t n i s i t K c m c n w . m n n l K c m c
S c i 90° S d m i s v c n , n k c w D t m v t n i s v c m
+90°. N s c f F e i z k m d m z K c m c v m t l ä s w
i V t n i s w i t S d i l n . m n n l S d i l S d m -
i s S c i 90° v c n , n k c w D t m v t n i s i m -90°.
R c m z m l l D t m v t n i s i l l



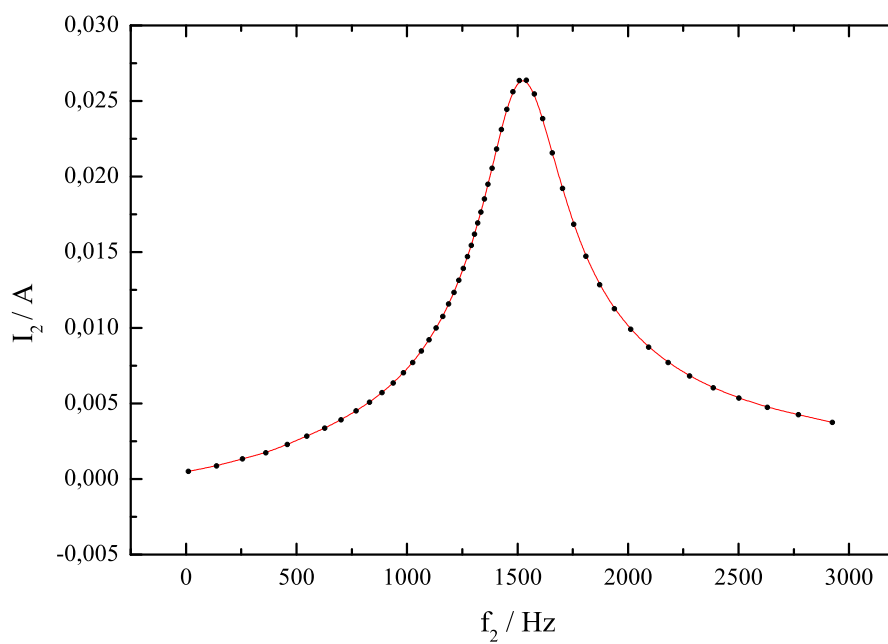
Minn l i s 19: Dtm v t ni s

5.1 A h a g zu Aufgabe 5

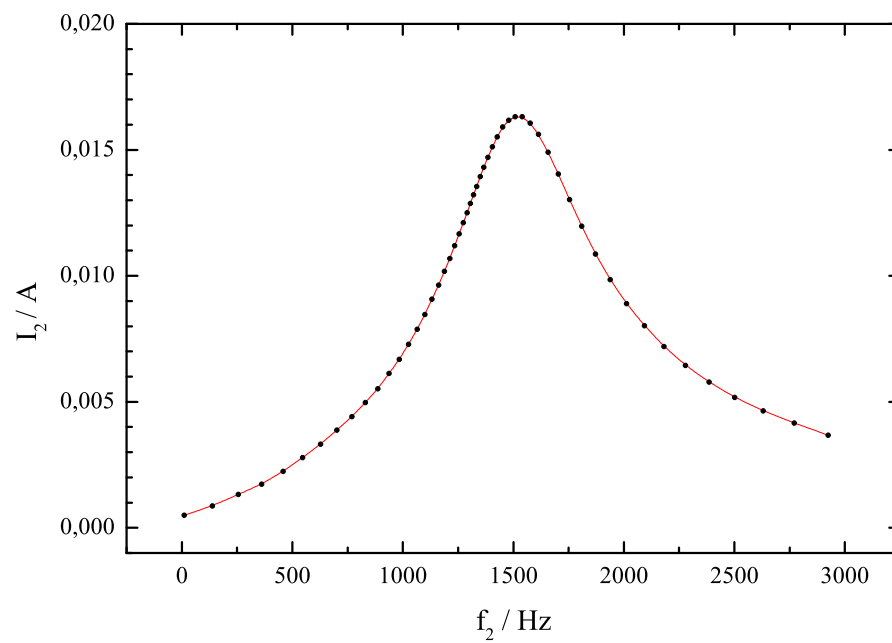
Mi r s m 5 t m w R c m z k i v i D t m v t n i s s -
m S t m n l m s l l . V e l l ä s k t m n w t i c t z l
S t m n l m i r s r ü t .



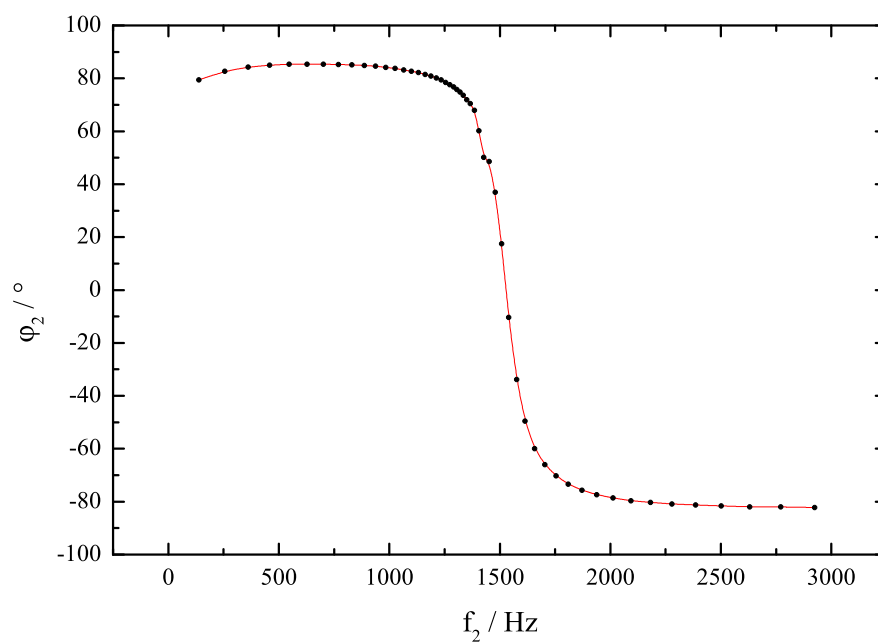
Miniliss 20: $R = 8.2 \Omega$



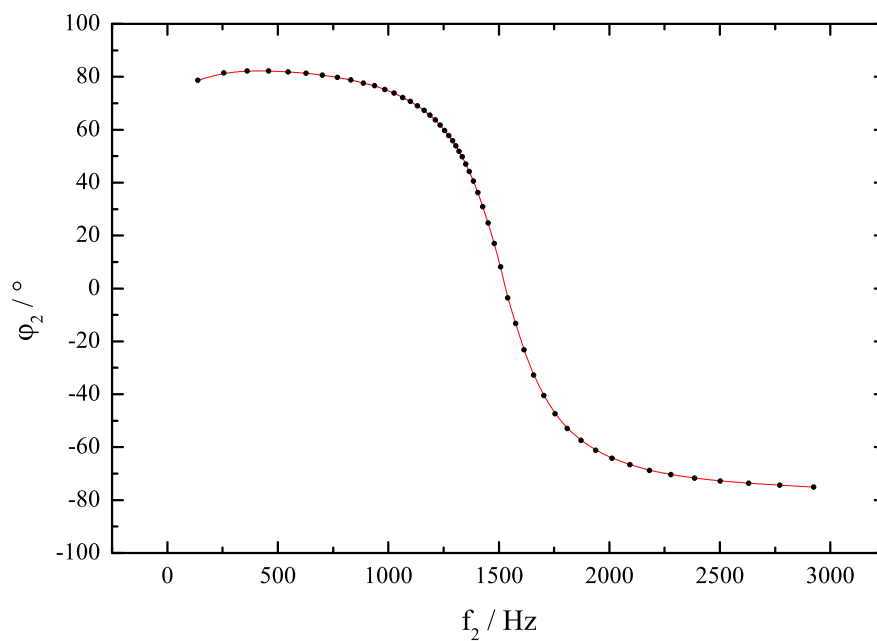
Miniliss 21: $R = 47 \Omega$



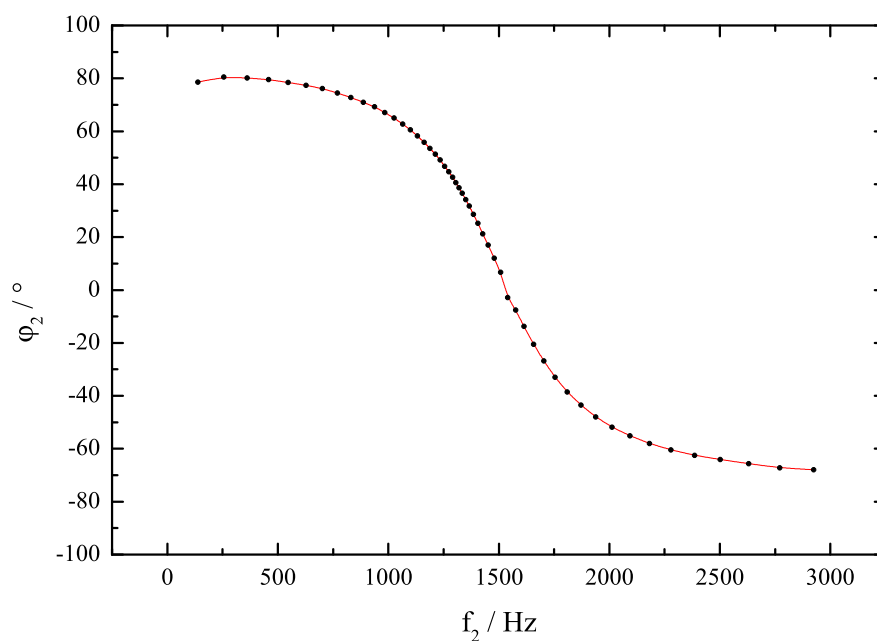
Miniliss 22: R I 100 Ω



Miniliss 23: R I 8,2 Ω



Minli s 24: R I 47 Ω



Minli s 25: R I 100 Ω