

Vorbereitung: Resonanz

Marcel Köpke
Gruppe 7

09.11.2011

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	3
1.1	Freier Oszillator	3
1.2	Gedämpfter Oszillator	3
1.3	Oszillator mit erzwungener Schwingung	4
1.4	Resonanz	4
2	Aufgaben	6
2.1	Drehpendel, freie Schwingungen	6
2.2	Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung	7
2.3	Messen der Winkelrichtgröße D^*	8
2.4	Drehpendel, erzwungene Schwingung	9
2.5	Serienschwingkreis, erzwungene Schwingung	9

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Freier Oszillator

Ein freier (ungedämpfter) Schwinger kann durch die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \Updownarrow \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x &= 0\end{aligned}$$

beschrieben werden. Die Lösung ist gegeben durch:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Dabei geben x_0 die maximale Amplitude und φ eine Phasenverschiebung an. Beide begeben sich aus den Anfangsbedingungen. ω_0 wird Eigenfrequenz des Oszillators genannt.

1.2 Gedämpfter Oszillator

Der gedämpfte Oszillator wird durch eine im Vergleich zum freien Oszillator leicht abgeänderte Differentialgleichung beschrieben. Dabei wird ein zusätzlicher Dämpfungsterm γ eingeführt:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \Updownarrow \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x &= 0\end{aligned}$$

Die Lösung kann dann für 3 Fälle angegeben werden:

- Schwingfall ($\gamma < \omega_0$):

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t} \cdot x_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ &\text{mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\end{aligned}$$

- Aperiodischer Grenzfall ($\gamma = \omega_0$):

$$x(t) = a \cdot e^{-\gamma t} + b \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$$

- Kriechfall ($\gamma > \omega_0$):

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t} \cdot x_0 \cosh(\omega t) \\ &\text{mit } \omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\end{aligned}$$

1.3 Oszillator mit erzwungener Schwingung

Ein Oszillator kann durch äußeres Einwirken zu einer bestimmten Schwingung «gezwungen» werden. Die Differentialgleichung erhält dann folgende Form:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= f(t) \\ \Updownarrow \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x &= f(t)\end{aligned}$$

Für eine äußere harmonische Erregerschwingung ergibt sich:

$$f(t) = f_0 \cos(\omega_f t)$$

Die Lösung dieses Problems ergibt sich aus der Superposition der harmonischen Lösungen x_h ($f_0 = 0$, siehe Abschnitt 1.2) und einer speziellen Lösung x_s ($f_0 \neq 0$). Die spezielle Lösung kann dann gegeben werden durch:

$$x_s(t) = A \cdot \cos(\omega_f t - \varphi)$$

mit

$$\begin{aligned}A &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right)\end{aligned}$$

Anzumerken ist dabei noch, dass für große Zeiten der spezielle Anteil der Lösung die Schwingung bestimmt:

$$x_h \longrightarrow 0 \text{ für } t \longrightarrow \infty$$

und damit

$$x = x_h + x_s \longrightarrow x_s \text{ für } t \longrightarrow \infty$$

Die Zeit während x_s noch nicht vollständig die Schwingung dominiert nennt sich Einschwingvorgang.

1.4 Resonanz

Wir gehen nun davon aus, dass der Einschwingvorgang beendet ist und das System sich in einer stabilen Schwingung befindet. Resonanz ist dann derjenige Zustand für den die Amplitude, abhängig von der Erregerfrequenz ω_f , maximal wird. Siehe dazu Abbildung 1.1:

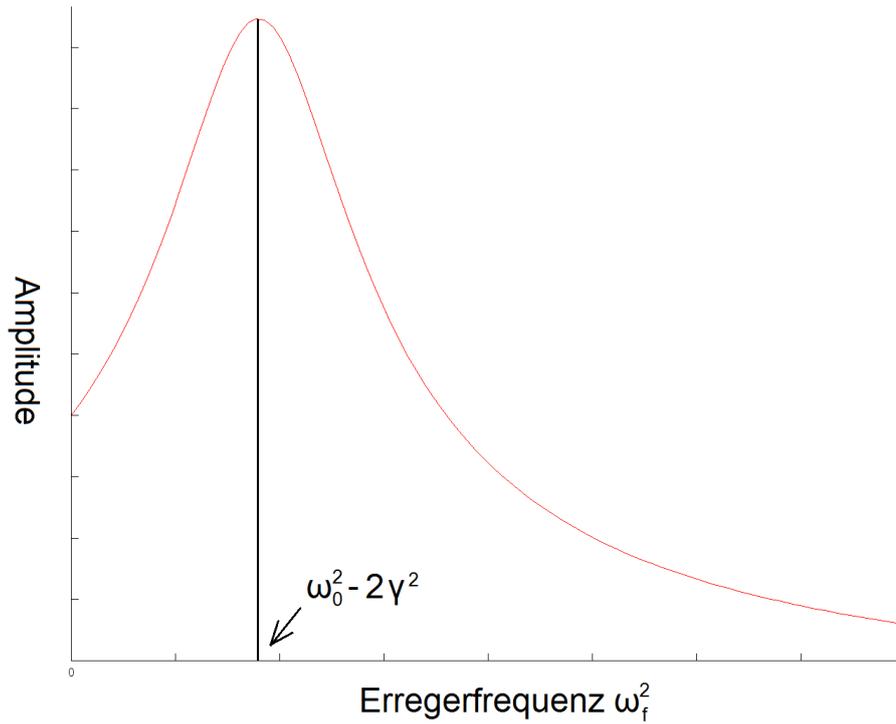


Abbildung 1.1: Resonanzkurve

Die rote Kurve stellt dabei die Amplitude A in Abhängigkeit des Erregerfrequenzquadrats ω_f^2 dar. Das Maximum und damit die Resonanz ergeben sich dann für:

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Einfaches Einsetzen ergibt damit für die maximal mögliche Amplitude:

$$A_{max} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

Ohne Dämpfung ($\gamma = 0$) strebt die Amplitude im Bereich der Resonanzfrequenz sogar gegen Unendlich (Resonanzkatastrophe).

2 Aufgaben

2.1 Drehpendel, freie Schwingungen

In dieser Aufgabe wird der Oszillator durch ein Pohl'sches Rad realisiert. Der einzige Dämpfungsfaktor ist die Luftreibung. Daher ist mit einer schwachen Dämpfung zu rechnen. Es wird das sogenannte «CASSY» Messsystem zur Verfügung gestellt, mit dem folgende Daten dargestellt werden sollen:

1. zeitlicher Verlauf des Phasenwinkels
2. zeitlicher Verlauf der Winkelgeschwindigkeit
3. zeitlicher Verlauf der kinetischen Energie

Das CASSY-System misst dabei die Auslenkung x des Rades. Der Phasenwinkel ψ kann damit nun über $\psi = \frac{x}{r}$ berechnet werden, wobei r der Abstand von der Auslenkungsmessung bis zum Mittelpunkt des Rades ist. Für die Winkelgeschwindigkeit ω gilt der Zusammenhang $\omega = \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \dot{x}$. Da das Rad keine Translationsbewegung ausführt ist die kinetische Energie vollständig durch die Rotationsenergie gegeben. Also durch $E_{kin} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$.

Dazu muss noch das Trägheitsmoment Θ abgeschätzt werden:

$$\Theta = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV$$

$$\Rightarrow \Theta = \frac{1}{2}m(r_a^2 + r_i^2) \approx 1,3494 \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

mit $m = 0,1855 \text{kg}$

Weiterhin gilt:

$$\omega_0^2 = \frac{D^*}{\Theta}$$
$$\gamma = \frac{\alpha}{2 \cdot \Theta}$$

wobei D^* die Drehfederkonstante und α den konstanten Faktor der Stokes'schen Reibung ($\sim v$) beschreiben. Da hier hauptsächlich Luft für die Dämpfung verantwortlich ist, kann mit einem kleinen Wert für α rechnen. Damit wird sich also der Schwingfall einstellen,

sodass die Schwingung Cosinus-förmig sein und die Amplitude exponentiell mit der Zeit abnehmen wird. Für die Periodendauer gilt dann:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\frac{D^*}{\Theta} - \frac{\alpha^2}{4 \cdot \Theta}}}$$

In diesem Versuch wird γ durch wiederholtes Anpassen der theoretischen an die gemessenen Daten ermittelt.

2.2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung

Der Aufbau verändert sich nun dahingehend, dass zusätzlich zur Dämpfung durch Luftreibung auch noch eine Wirbelstrombremse die Schwingung abschwächt (jedoch noch immer Schwingfall!). γ soll nun auf 2 Arten bestimmt werden. Zum einen so wie im ersten Versuch, zum anderen über den Dämpfungsfaktor k . Dieser ist definiert über:

$$k = e^{\gamma \cdot T} \Leftrightarrow \gamma = \frac{\ln(k)}{T}$$

Experimentell kann er ermittelt werden durch die Messung der Abschwächung der Amplitude nach n Perioden:

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i}$$

bzw.

$$k = \sqrt[n]{\frac{\Phi_0}{\Phi_n}}$$

Außerdem soll die korrigierte Dämpfungskonstante $\gamma_{\text{korrr}}(I) = \gamma(I) - \gamma(0)$ ermittelt werden. Man sieht leicht ein, dass die Dämpfung der Wirbelstrombremse proportional zu I^2 sein muss, da die dämpfende Lorentzkraft ebenfalls proportional zu I^2 ist ($F_L = B \cdot l_D \cdot I = \mu_r \mu_0 \frac{n \cdot l_D}{l_S} \cdot I^2 = \text{const} \cdot I^2$).

Wie oben gezeigt kann die Periodendauer angegeben werden durch:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} + \frac{\pi \cdot \gamma^2}{\omega_0^3} + \frac{3 \cdot \pi \gamma^3}{4 \cdot \omega_0^5} + \mathcal{O}(\gamma^4)$$

Da $\gamma < \omega_0$ kann die Periodendauer näherungsweise durch

$$T \approx \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0}$$

beschrieben werden. Man sollte also (fast) keine Abhängigkeit der Periodendauer von der Dämpfungskonstante γ und damit vom Strom I finden!

Man nennt das Verhältnis $Q = \frac{2\pi \cdot \text{Schwingungsenergie}}{\text{Energieverlust pro Periode}}$ den Gütefaktor der Schwingung. Dann gilt also

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot \dot{\phi}^2(t)}{\dot{\phi}^2(t) - \dot{\phi}^2(t+T)} = \frac{2 \cdot \pi}{1 - e^{-2\gamma T}} \approx \frac{\omega_0}{2 \cdot \gamma}$$

wenn man $\gamma \cdot T \ll 1$ annimmt.

2.3 Messen der Winkelrichtgröße D^*

Man hängt nun Gewichte an den Rand des Rades und misst die Ablenkung ϕ von der Nullstellung. Für das rückstellende Drehmoment gilt:

$$M = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \cdot \sin \theta$$

Hängt man die Gewichte geschickterweise wie in Abbildung 2.1 auf so folgt:

$$\theta = 90^\circ + \phi$$

$$\Rightarrow M = r \cdot F \cdot \cos \phi$$

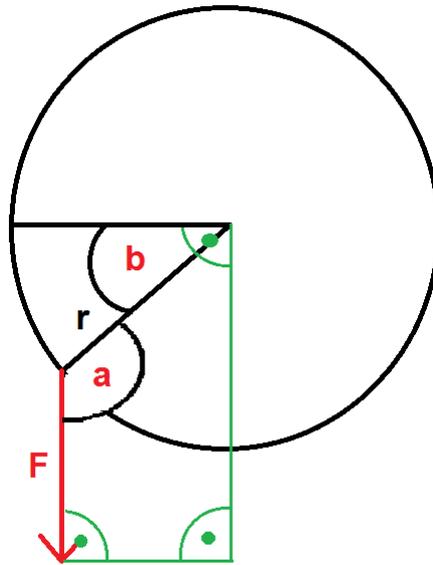


Abbildung 2.1: $a=\theta$ und $b=\phi$

Die Winkelrichtgröße ist dann gegeben mit:

$$D^* = \frac{M}{\phi} = \frac{r \cdot F \cdot \cos \phi}{\phi}$$

Da $\omega_0^2 = \frac{D^*}{\Theta} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ folgt somit sofort:

$$\Theta = \frac{D^* \cdot T^2}{4\pi^2}$$

2.4 Drehpendel, erzwungene Schwingung

Nun wird mit einem äußeren periodischen Drehmoment der Kreisfrequenz ω_f eine Schwingung erzwungen. Dabei sollen Resonanzkurven $\phi(\omega_f)$ aufgenommen werden. Zudem soll noch die Phasenverschiebung φ zur Erregerschwingung weit unter- und oberhalb der Resonanzfrequenz bestimmt werden.

Zur Bestimmung des Gütefaktors wird der Frequenzabstand $\Delta\omega$ derjenigen Frequenzen gemessen für, die nur noch ein Ausschlag von einem $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -tel der maximalen Amplitude zu vermessen ist. Der Gütefaktor bestimmt sich dann über:

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

2.5 Serienschwingkreis, erzwungene Schwingung

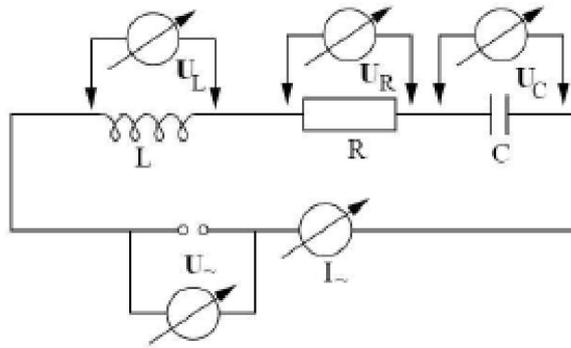


Abbildung 2.2: Serienschwingkreis (Quelle: Vorbereitungshilfe)

Ein Serienschwingkreis wird nun wie in Abbildung 2.2 gezeigt aufgebaut und durch eine Cosinus-förmige Wechselspannung U mit der Frequenz ω_f angeregt. Dann gilt sofort:

$$U = U_L + U_R + U_C = L \cdot \dot{I} + R \cdot I + \frac{1}{C} \int I \cdot dt$$

Aus der obigen DGL erhält man damit:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \gamma &= \frac{R}{2 \cdot L} \\ \omega &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4 \cdot L^2}} = \sqrt{\frac{4L - C \cdot R^2}{4 \cdot L^2 \cdot C}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t + \varphi) + I_0 \cdot \cos(\omega_f t + \varphi)$$

mit

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Die Impedanz Z der Schaltung berechnet sich über: $Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$

Im Resonanzfall ist die Güte $Q > 1$, sodass eine Spannungserhöhung eintritt. Allgemein ist sie jedoch gegeben durch: $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Auswertung Resonanz

Marcel Köpke & Axel Müller

15.11.2011

Inhaltsverzeichnis

1	Drehpendel, freie Schwingungen	2
2	Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen	6
3	Messen der Winkelrichtgröße D^*	11
4	Drehpendel, erzwungene Schwingungen	12
5	Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen	18
5.1	$8,2\Omega$	18
5.2	47Ω	20
5.3	100Ω	22

Kapitel 1

Drehpendel, freie Schwingungen

Mithilfe des Cassy-Systems wurden die Daten für den Phasenwinkel, die Winkelgeschwindigkeit und die kinetische Energie gegen die Zeit ermittelt und gespeichert. Dafür ergeben sich folgende Darstellungen.

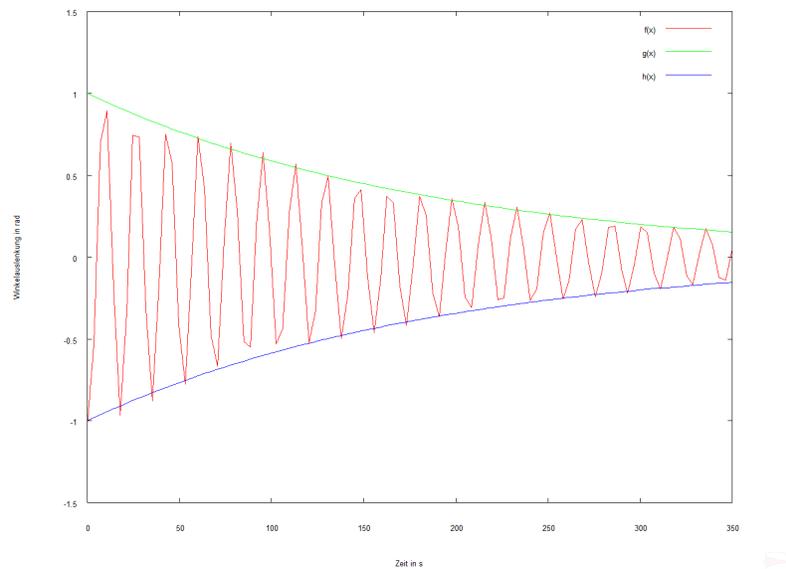


Abbildung 1.1: Phasenwinkel

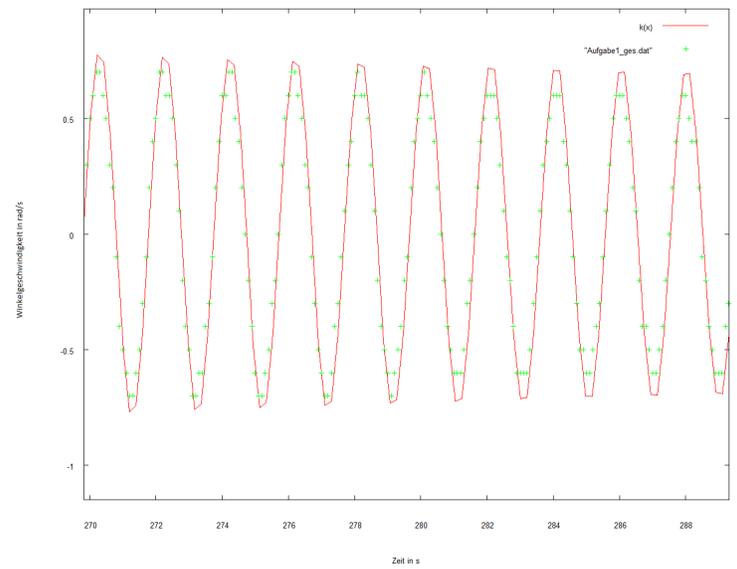
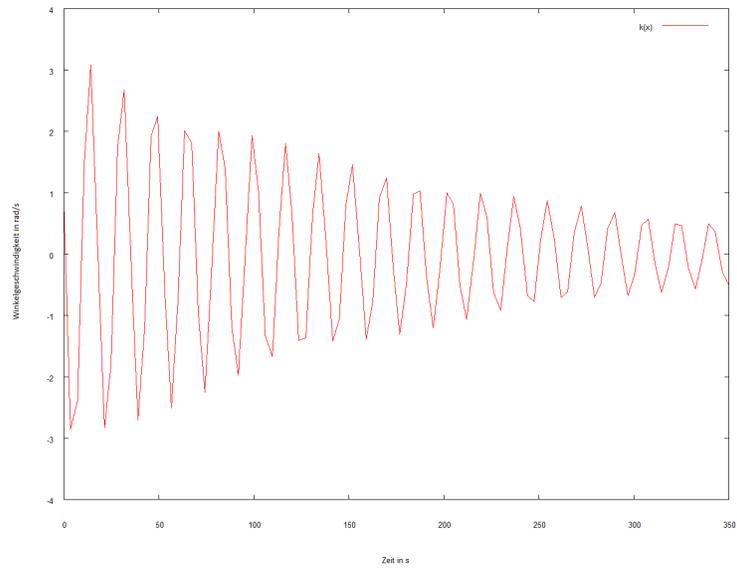


Abbildung 1.2: Winkelgeschwindigkeit

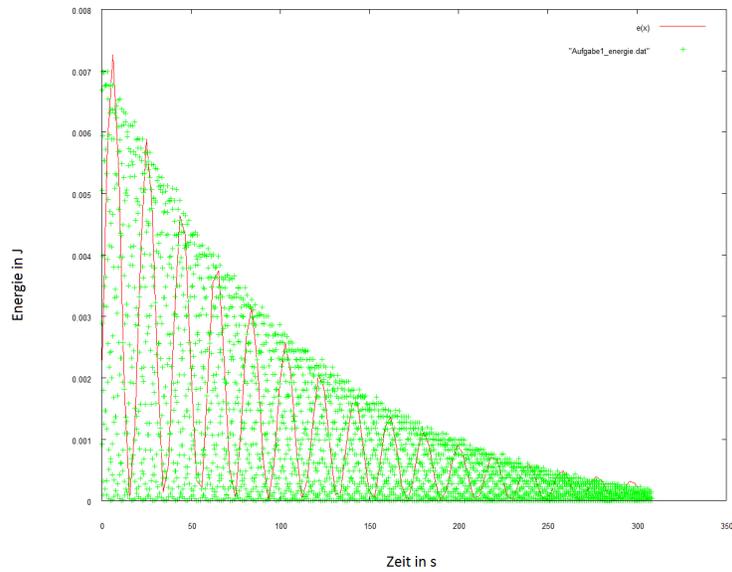


Abbildung 1.3: kinetische Energie

Da die Darstellungen der Winkelgeschwindigkeit über die komplette Messzeit vereinzelt sehr ungenau ist, haben wir uns entschlossen, zusätzlich einen vergrößerten Ausschnitt in das Protokoll aufzunehmen, um die Übereinstimmung der Kurve mit den Messdaten zu verdeutlichen. Das Trägheitsmoment beträgt, wie im Vorprotokoll berechnet:

$$\Theta = 1,3494 \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2$$

Um den Phasenraum darzustellen, trägt man die Winkelgeschwindigkeit über dem Phasenwinkel auf.

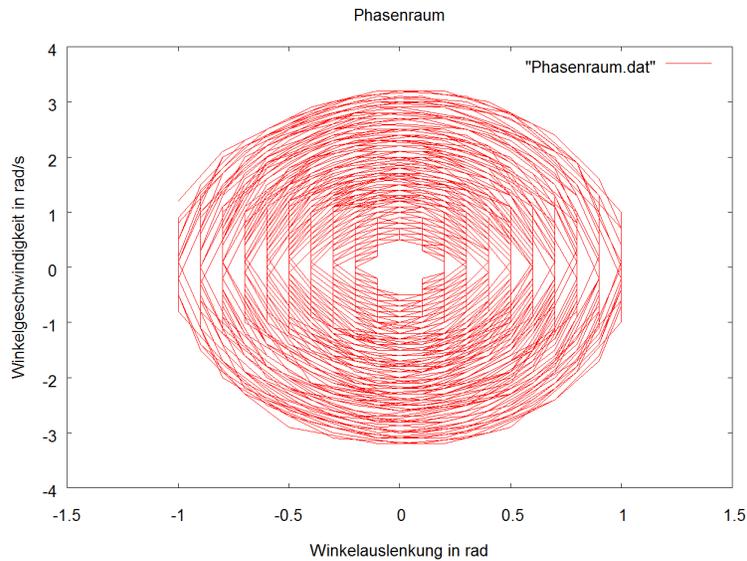


Abbildung 1.4: Phasenraum

Die Periodendauer der Schwingung kann mit den Messdaten des Phasenwinkels berechnet werden. Die Zeit für 10 Schwingungen beträgt 19,7 Sekunden. Damit ergibt sich für T :

$$T = 1,97s$$

Nun soll, wie in Abbildung 1 dargestellt, eine Einhüllende, die die Dämpfung des Systems widerspiegelt möglichst nahe an die Messdaten angepasst werden. Dafür benutzt man die Kurve

$$a(t) = a_0 e^{-\beta t}$$

a_0 ist dabei die Amplitude zu Beginn der Schwingung. Durch annähern an die Messdaten erhält man für β :

$$\beta = 0,00535 \frac{1}{s}$$

Kapitel 2

Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen

Wie in der Aufgabenstellung gefordert, haben wir in diesem Versuch wieder die Winkel-Zeit-Diagramme des Pohl'schen Rads aufgenommen und grafisch dargestellt. Im Vergleich zu Versuch 1 gibt es hier zusätzlich eine, durch eine Wirbelstrom induzierte Dämpfung, die durch unterschiedliche Stromstärken auch unterschiedlich groß ist. Hier wird nun wiederum eine Einhüllende an die Messkurven angepasst, und damit β_{fit} bestimmt. Zudem soll β_k aus dem Dämpfungsverhältnis

$$\beta_k = \frac{\ln k}{T}$$

und

$$k = \sqrt[n]{\frac{\Phi_0}{\Phi_n}}$$

bestimmt werden.

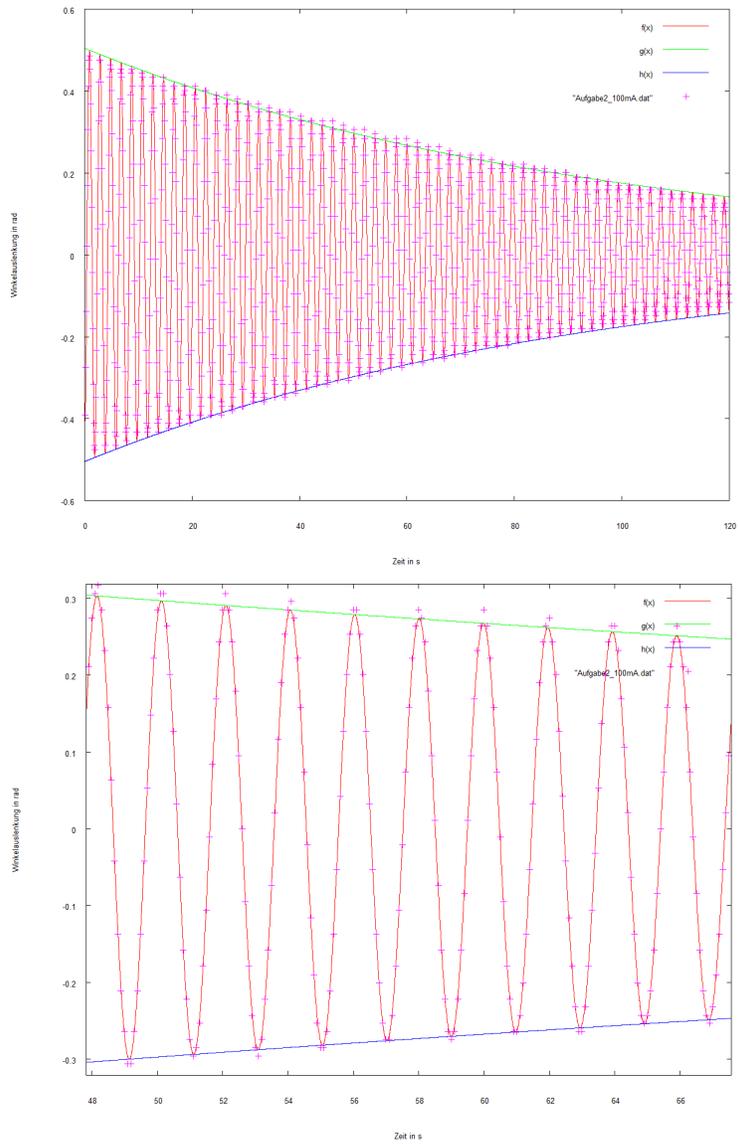


Abbildung 2.1: $I_B = 100mA$

$$\beta_{fit} = 0,0105752 \frac{1}{s}$$

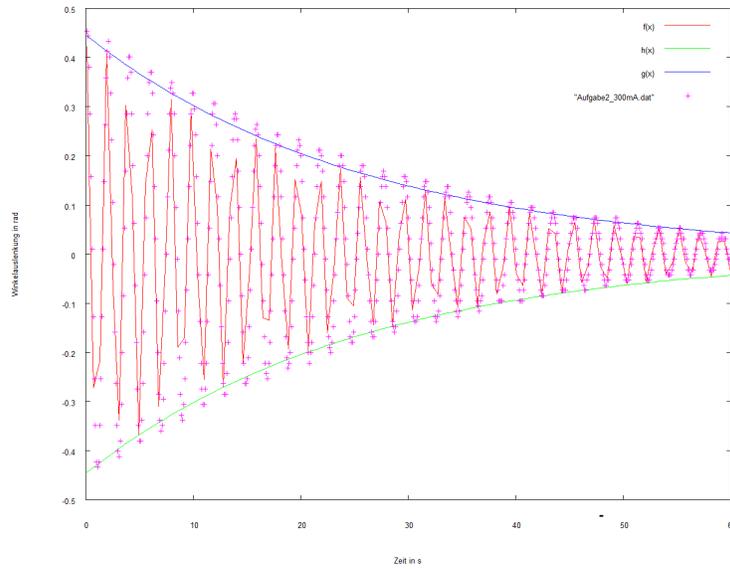


Abbildung 2.2: $I_B = 300\text{mA}$

$$\beta_{fit} = 0,0389556 \frac{1}{s}$$

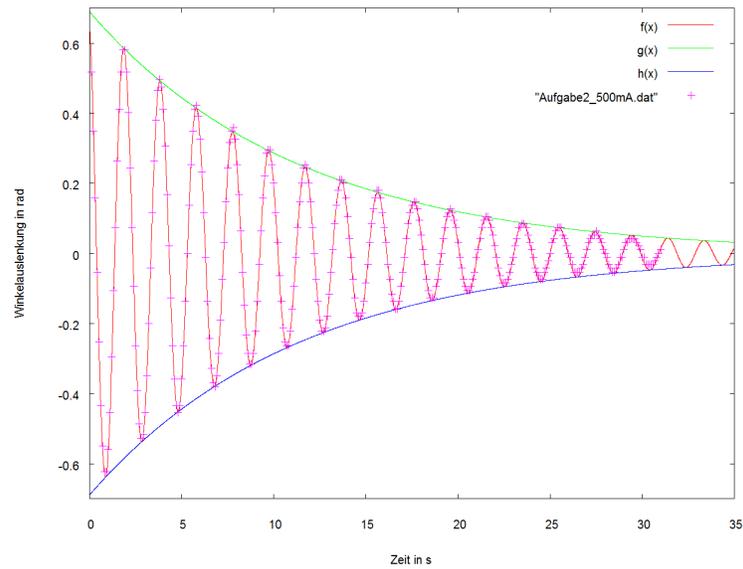


Abbildung 2.3: $I_B = 500\text{mA}$

$$\beta_{fit} = 0,0878397 \frac{1}{s}$$

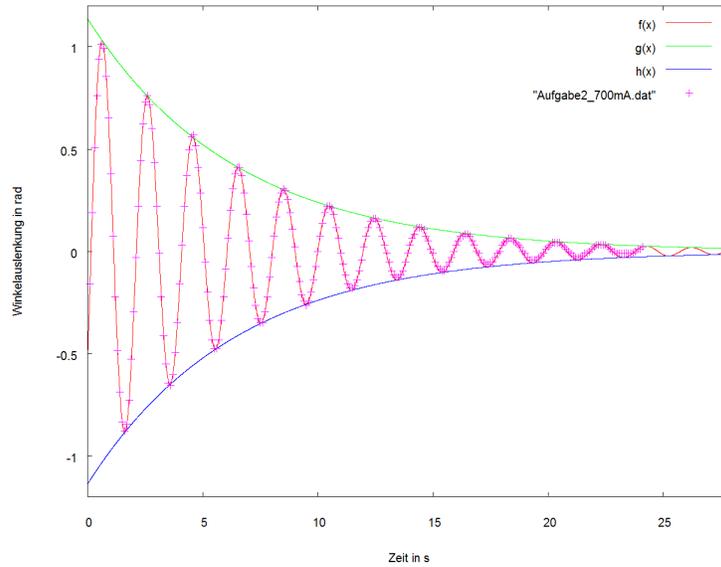


Abbildung 2.4: $I_B = 700mA$

$$\beta_{fit} = 0,155784 \frac{1}{s}$$

Im folgenden sind die Ergebnisse tabellarisch aufgelistet:

I_B in mA	100	300	500	700
k	1,0175	1,0830	1,1859	1,3626
β_k in $\frac{1}{s}$	0,0088	0,0405	0,0865	0,1571
β_{fit} in $\frac{1}{s}$	0,0106	0,0390	0,0878	0,1558
β_0 in $\frac{1}{s}$	0,0053	0,0053	0,0053	0,0053
$\beta_{korrr,k}$ in $\frac{1}{s}$	0,0035	0,0352	0,0812	0,1518
$\beta_{korrr,fit}$ in $\frac{1}{s}$	0,0053	0,0337	0,0825	0,1505
T in s	1,97	1,97	1,97	1,97

Tabelle 2.1: Messtabelle

Wie man sieht, weichen die “gefitteten” Parameter nicht sehr von den, aus der oben angegebenen Formel, berechneten Werten ab. Dies zeigt, dass das theoretische Modell, mit dem die fit-Parameter extrapoliert wurden, gut funktioniert.

Wie im Vorprotokoll beschrieben, erhält man (fast) keine Stromabhängigkeit für die Periodendauer. Dies zeigt sich auch sehr gut an den Messergebnissen.

Im Folgenden wird nun der bereits beschriebene Zusammenhang zwischen β_{korrr} und I_B^2 grafisch veranschaulicht:

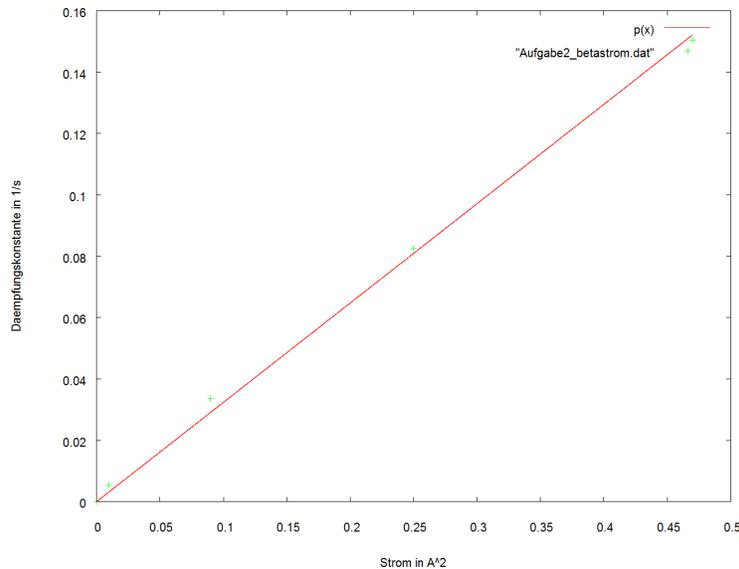


Abbildung 2.5: $\beta_{korrr}(I_B^2)$

Man sieht hier eindeutig den linearen Zusammenhang zwischen den beiden Größen. Verwendet man die oben gezeigte Ausgleichsgerade, ergibt sich für $\beta = \omega_0 = 3,1894 \frac{1}{s}$ ein Strom von $I_B = 3,138A$. Dieser Wert war für uns im Praktikum nicht erreichbar, weil die größte zulässige Stromstärke kurzzeitig 1,6A betragen durfte.

Letztendlich muss noch die Güte bestimmt werden. Für sie gilt der Zusammenhang: $Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{T \cdot \beta}$

I_B in mA	100	300	500	700
β_{fit} in $\frac{1}{s}$	0,0106	0,0390	0,0878	0,1558
T in s	1,97	1,97	1,97	1,97
Q	150,45	40,89	18,16	10,24

Tabelle 2.2: Güte

Kapitel 3

Messen der Winkelrichtgröße

D^*

Um die Winkelrichtgröße zu bestimmen, wurden pro Gewicht jeweils zwei Messungen durchgeführt. Die erste, sodass das Pohl'sche Rad nach rechts, die zweite, sodass es nach links ausgelenkt wurde. Die Gewichte wurden so angebracht, dass die Kraftkomponente tangential an den Radialvektor zur Aufhängung angreifen konnte. Die Winkelrichtgröße bestimmt sich dann durch:

$$D^* = \frac{rF}{\phi}$$

Gewichte	ϕ in rad	F in mN	D^* in $\frac{Nm}{rad}$
5g; rechts	0,3590	49,05	0,01294
5g; links	0,3485	49,05	0,01333
10g; rechts	0,7075	98,1	0,01313
10g; links	0,7075	98,1	0,01313
20g; rechts	1,3939	196,2	0,01333
20g; links	1,4256	196,2	0,01303

Tabelle 3.1: Winkelrichtgröße

Für die Winkelrichtgröße ergibt sich im Mittel:

$$\bar{D}^* = 0,01315 \frac{Nm}{rad}$$

Hiermit lässt sich das Trägheitsmoment des Pendels berechnen: $\Theta = \frac{D^*}{\omega_0^2} = 1,2926 \cdot 10^{-3} kgm^2$. Dies zeigt, dass unsere Schätzung in der Vorbereitung im Rahmen lag.

Kapitel 4

Drehpendel, erzwungene Schwingungen

In diesem Versuch wurde das Pohl'sche Rad durch ein externes Drehmoment angetrieben. Dabei beobachteten wir verschiedene Amplituden bei unterschiedliche Erregerfrequenzen. Außerdem wurde das Pohl'sche Rad durch die Wechselstrombremse mit $I_B = 300mA$ bzw. $I_B = 500mA$ gedämpft. Wir warteten stets den Einschwingvorgang ab und bestimmten dann die Amplitude bei einer Frequenz. Vor allem bei der schwächeren Dämpfung konnte der Einschwingvorgang nicht immer beendet werden, sodass wir gezwungen waren, per Augenmaß die Amplitude zu schätzen. Im Folgenden sieht man die beiden Messverläufe:

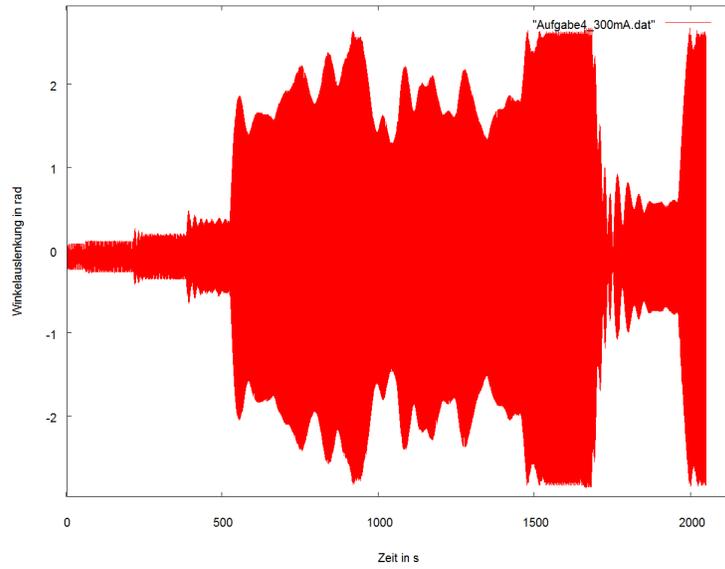


Abbildung 4.1: $I_B = 300mA$

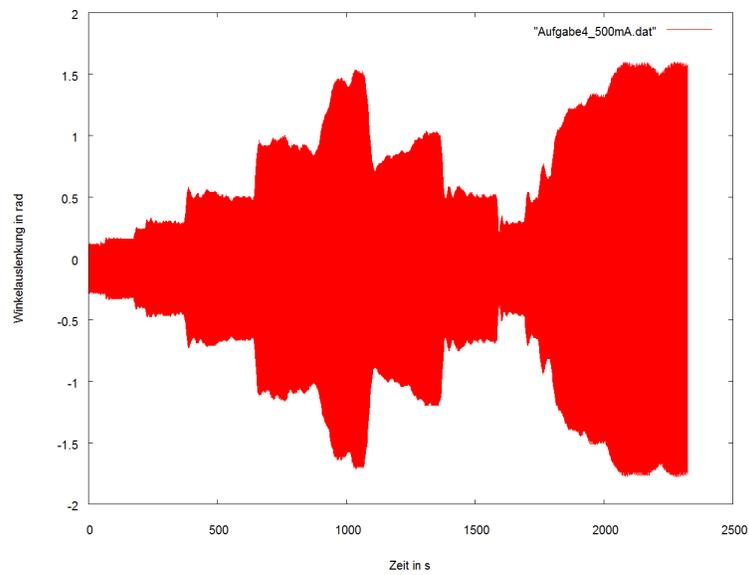


Abbildung 4.2: $I_B = 500mA$

Messung	Kreisfrequenz in $\frac{1}{s}$	Amplitude in rad
1	2,1444	0,1531
2	2,3533	0,1848
3	2,6289	0,2693
4	2,8560	0,4330
5	3,1574	2,0117
6	3,2388	2,7402
7	3,3781	0,5544

Tabelle 4.1: $I_B = 300mA$

Messungen	Kreisfrequenz in $\frac{1}{s}$	Amplitude in rad
1	2,4448	0,1954
2	2,5964	0,2376
3	2,8239	0,3749
4	2,9638	0,5861
5	3,0650	1,0032
6	3,2057	1,6684
7	3,2896	1,1088
8	3,3963	0,5914
9	3,5102	0,3696

Tabelle 4.2: $I_B = 500mA$

Im folgenden sieht man die Messdaten mit einer “gefitteten” Kurve:

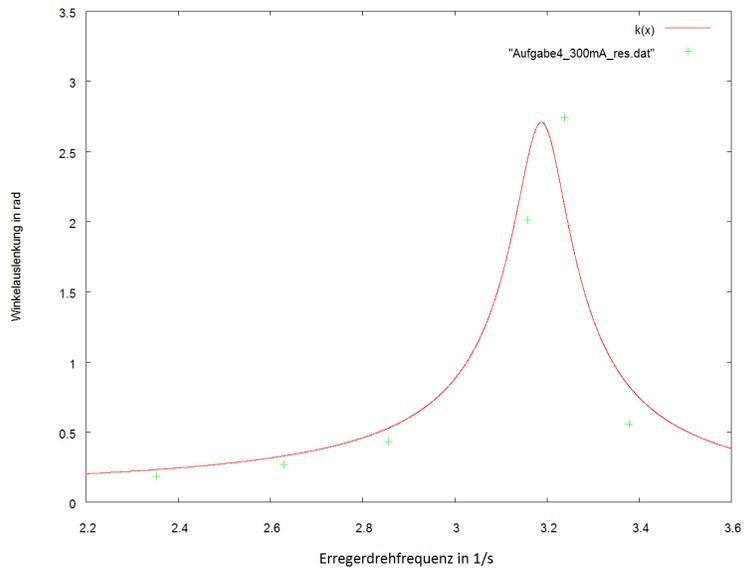


Abbildung 4.3: $I_B = 300\text{mA}$

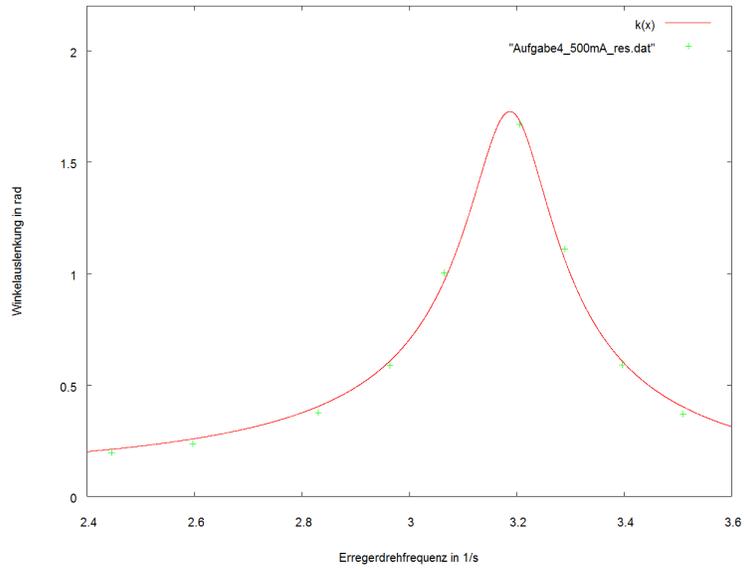


Abbildung 4.4: $I_B = 500\text{mA}$

Der theoretische funktionale Zusammenhang für die Amplitude ist:

$$A = \frac{c}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}}$$

Dieser Zusammenhang konnte somit sehr gut bestimmt werden. Aus den fit-Kurven-Parametern ergeben sich für 300mA:

$$\begin{aligned}\omega_r &= 3,1882 \frac{1}{s} \\ \Delta\omega &= 0,1256 \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Für 500mA:

$$\begin{aligned}\omega_r &= 3,1874 \frac{1}{s} \\ \Delta\omega &= 0,1624 \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Mit den in Versuch 2 ermittelten Werten für β wären mit $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ folgende Werte zu erwarten gewesen:

Für 300mA:

$$3,1890 \frac{1}{s}$$

Für 500mA:

$$\omega_r = 3,1870 \frac{1}{s}$$

Die beiden Messungen in Versuch 2 und 4 fast gleiche Ergebnisse liefern. Die Güte bestimmt sich dann jeweils über:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

I_B in mA	Güte
300	25,39
500	19,64

Tabelle 4.3: Güte

Man sieht, dass der Gütewert für 300mA sehr stark vom Wert aus Versuch 2 abweicht. Dies kann begründet werden durch die unbeeendeten Einschwingvorgänge und die Verwendung eines Messwerts, bei dem die Apparatur anschlug. Damit war es uns nicht möglich im Resonanzbereich bessere Messwerte zu erhalten. Der Wert für 500mA stimmt annähernd mit dem im Versuch 2 bestimmten Wert überein.

Die Phasenverschiebung ψ zur Erregerfrequenz ist gegeben durch den theoretischen Zusammenhang $\psi = \arctan\left(\frac{2\beta\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right)$ Man sieht leicht ein, dass die

Phasenverschiebung bei Resonanzfrequenz eine Sattelstelle besitzt und in etwa 0 rad beträgt. Für Frequenzen weit unterhalb der Resonanzfrequenz strebt sie gegen $-\frac{\pi}{2}$, weit oberhalb der Resonanzfrequenz gegen $\frac{\pi}{2}$. Dies konnte auch im Experiment gut beobachtet werden.

Kapitel 5

Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen

Bei diesem Versuch wurden mit drei verschiedenen Widerständen beim Schwingkreis die Resonanzkurven, die Spannungsverläufe zur Demonstration der Spannungsüberhöhung und die Phasenverschiebung aufgenommen:

5.1 $8,2\Omega$

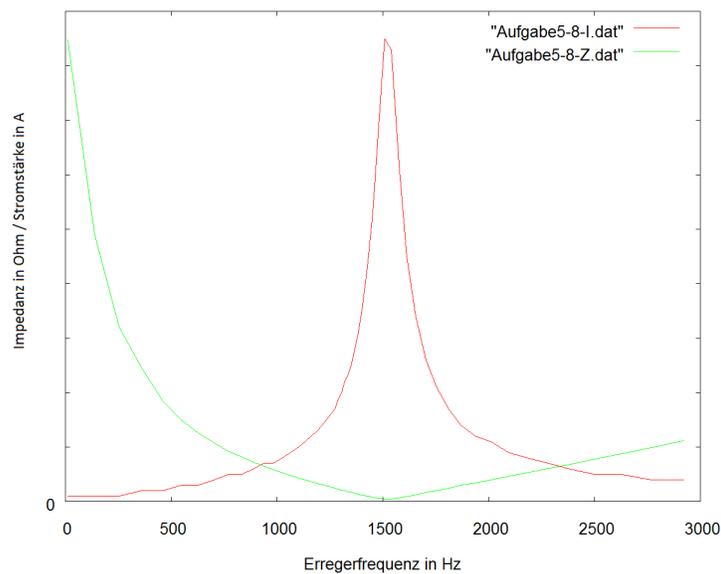


Abbildung 5.1: Aplitude/Impedanz

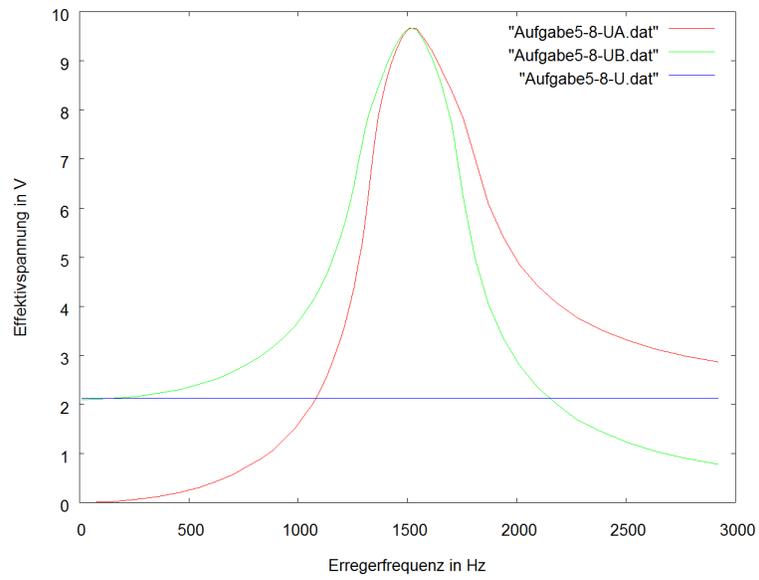


Abbildung 5.2: Spannung

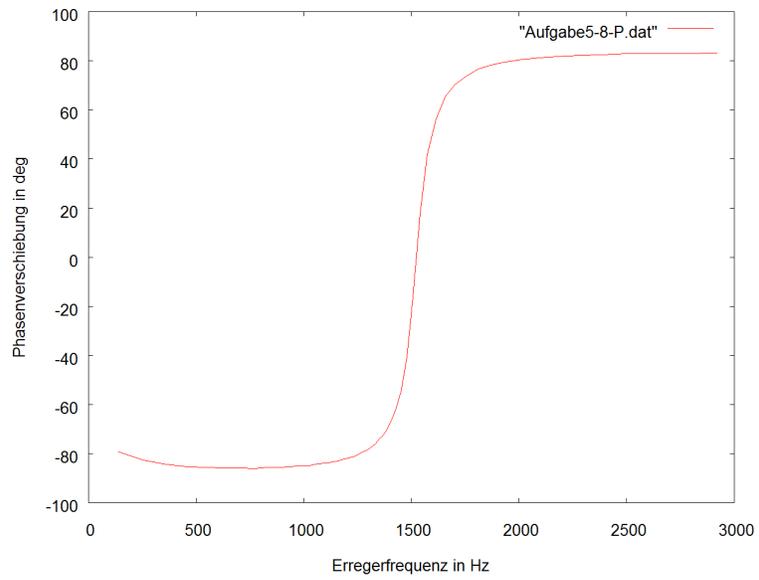


Abbildung 5.3: Phasenverschiebung

Wie in der Vorbereitung beschrieben kann man nun die Güte anhand des Amplitudenverlaufs berechnen. Die Resonanzfrequenz beträgt:

$$\omega_0 = 1524,5439Hz$$

Mit $\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ erhält man 2 Werte auf der Resonanzkurve mit dem Abstand: $\Delta\omega_{\sqrt{2}} = 99,097Hz$. Damit ergibt sich für die Güte:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{\sqrt{2}}} = 15,38$$

Dies weicht stark vom theoretisch ermittelten Wert ab:

$$Q_{theo} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 45,6$$

Diese starke Abweichung ist vermutlich mit den Messwerten und einer womöglich ungenauen Näherungsweise zu erklären.

5.2 47Ω

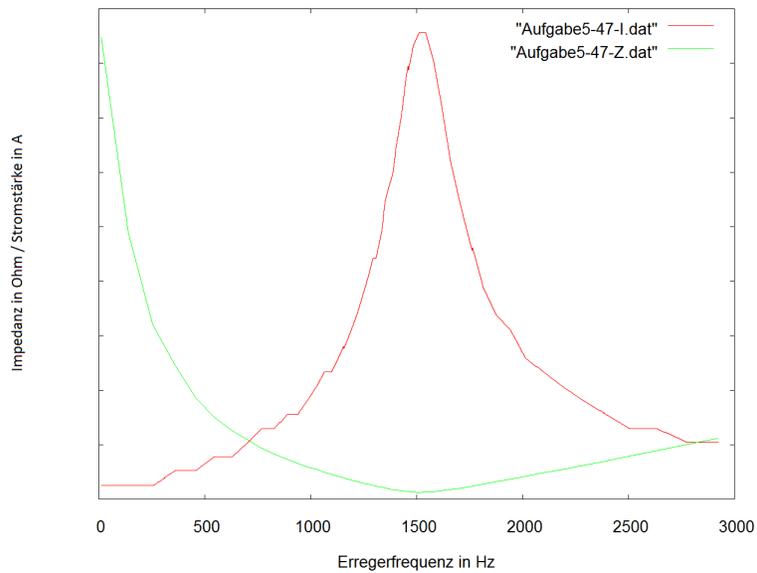


Abbildung 5.4: Amplitude/Impedanz

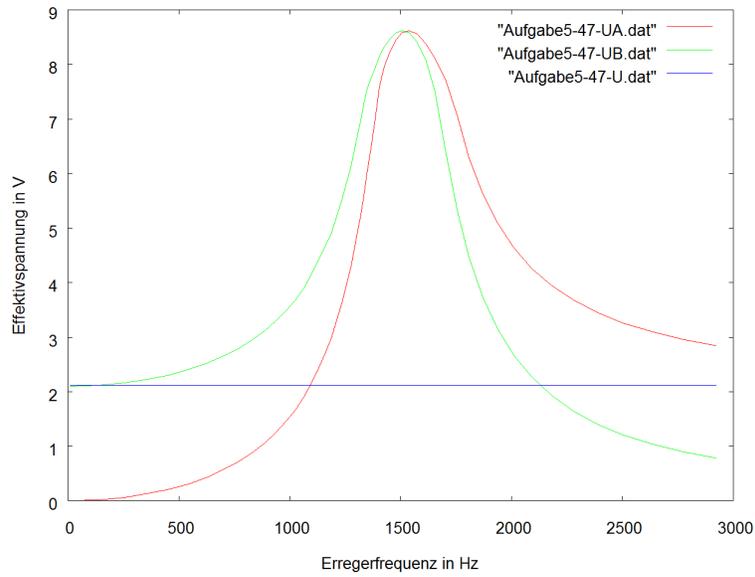


Abbildung 5.5: Spannung

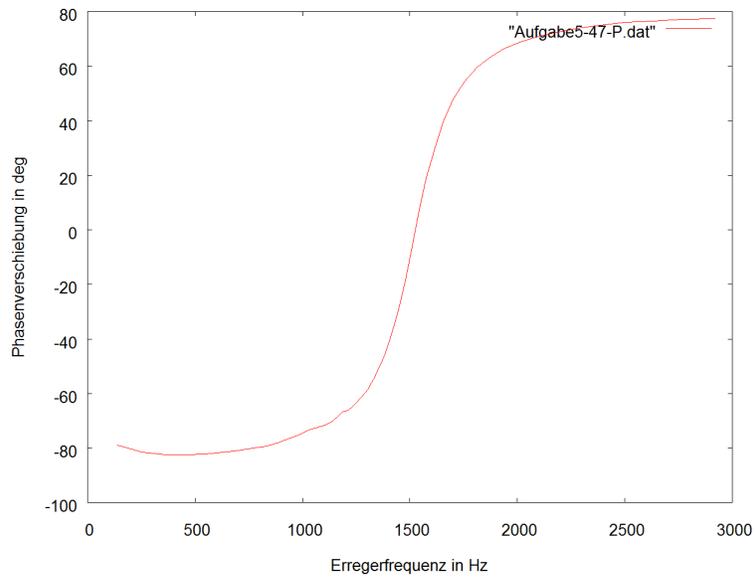


Abbildung 5.6: Phasenverschiebung

Mit der gleichen Rechnung wie oben erhält man:

$$Q = 7,4492$$

$$Q_{theo} = 7,7691$$

Hier sind die beiden Werte viel näher beieinander, womit man davon ausgehen kann, dass die Genauigkeit der theoretisch bestimmten Güte mit der Größe des ohmschen Widerstands zunimmt.

5.3 100Ω

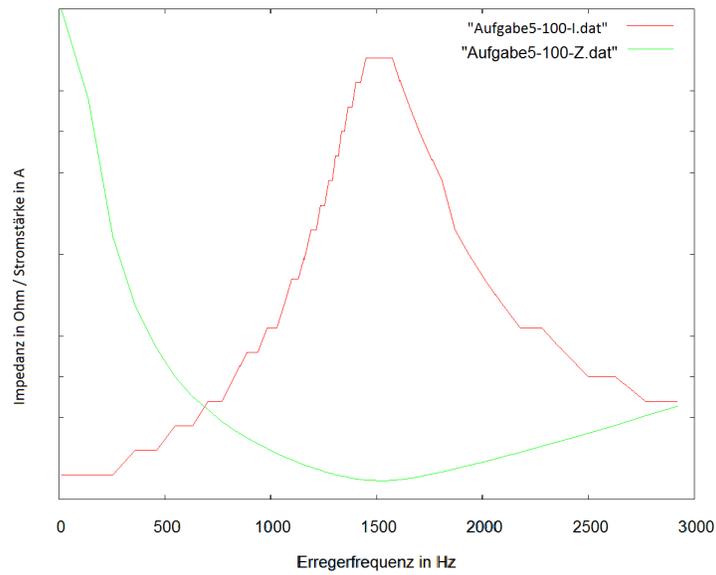


Abbildung 5.7: Amplitude/Impedanz

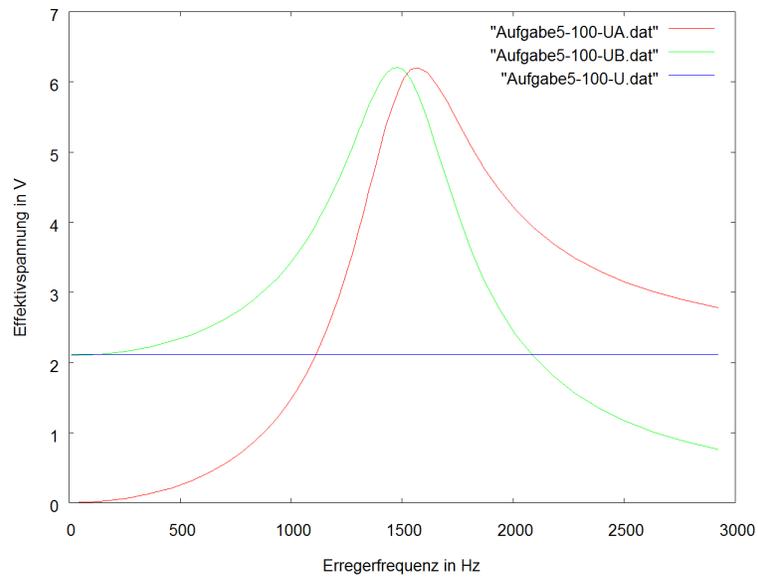


Abbildung 5.8: Spannung

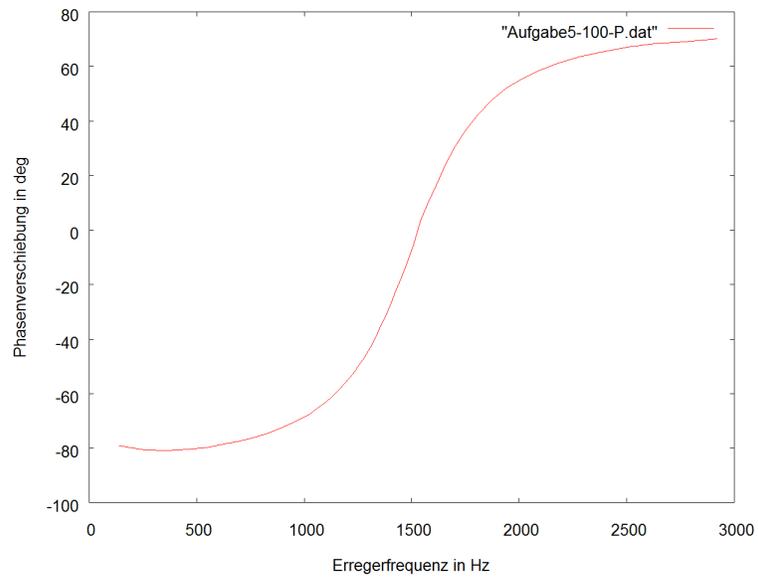


Abbildung 5.9: Phasenverschiebung

$$Q = 3,7398$$

$$Q_{theo} = 3,6515$$

Diese Werte bestärken obige Annahme. Für jeden der ohmschen Widerstände wurde oben auch die Spannung an je allen drei Bauteilen und die Phasenverschiebung als Funktion der Frequenz dargestellt. Wie bereits im Vorprotokoll beschrieben, treten im Resonanzbereich Spannungserhöhungen auf, die sich in den drei Versuchen proportional zum ohmschen Widerstand verhalten. Für die Phasenverschiebung kann man in den 3 verschiedenen Messvorgängen keine signifikanten Unterschiede erkennen. Zum Schluss soll nun auch noch die Güte anhand der Spannungskurven bestimmt werden. Leider war es uns hier nicht möglich die Kurven zu fitten und mussten daher die jeweiligen Werte per Hand berechnen. Die Verschiebung der Spannungskurven für Spule und Kondensator ist im entsprechenden Bereich auf beiden Seiten der Resonanzfrequenz annähernd gleich, womit man die Güte mit dem obigen Verfahren an beiden Kurven adäquat berechnen kann. Es ergibt sich damit:

R in Ω	Q
8,2	3,31
47	3,42
100	2,64

Tabelle 5.1: Güte durch Spannung

Diese Werte sind zumindest für den höchsten Widerstand annehmbar. Der Hauptgrund für den Fehler liegt bestimmt in der ungenauen Messmethode.