



~~WS~~/WS 20.11../12..

Praktikum: (P1/~~2~~) (~~Di~~/~~Di~~/~~Di~~) Gruppe-Nr: ..11..

Name:Fleig..... Vorname:Georg.....

Name:Krause..... Vorname:Marcel.....

Versuch: ...Vierpole und Leitungen... (~~n~~t/ohne) Fehlerrechnung

Betreuer:Mirko Scherer..... Durchgeführt am: 08.11.11

Abgabe am:

Rückgabe am:

Begründung:

2. Abgabe am:

Ergebnis: (+ / 0 / -)

Fehlerrechnung: ja / nein

Datum:

Handzeichen:

Bemerkungen:



Bei diesem Versuch geht es um die Übertragungseigenschaften von Vierpolen, Vierpolketten und Kabeln. Die in der Praxis häufig vorkommenden R-C-Spannungsteiler (Differenzier- und Integrierglied bzw. Hoch- und Tiefpaß) werden untersucht, ebenso das L-C-Glied und eine Kette aus solchen Gliedern (Drosselkette). Anhand der Drosselkette werden Eigenschaften von Übertragungsleitungen diskutiert und ermittelt. Schließlich wird als Grenzfall der Drosselkette mit einem Koaxialkabel experimentiert. Bei den Experimenten spielt die Verwendung eines Oszilloskops eine gewichtige Rolle.

Aufgaben:

1. Bei dieser Aufgabe werden einfache passive lineare Vierpole, nämlich **R-C-Spannungsteiler**, bezüglich des **Abschwächungsverhältnisses** (unter diesem Aspekt heißen sie 'Hochpaß' bzw. 'Tiefpaß') und der **Phasenverschiebung** (unter diesem Aspekt heißen sie 'Phasenschieber') zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung untersucht.

1.1 Legen Sie sinusförmige Wechselspannung ($f \approx 1,7\text{kHz}$; $u_e \approx 8V_{ss}$) an die Reihenschaltung von C ($\approx 1\text{nF}$) und R ($\approx 1 / 10 / 100 / 1000\text{ k}\Omega$) und beobachten Sie als Ausgangsspannung u_a die Spannung an R oszilloskopisch: **'Hochpaß'**. Der Index „ss“ bei der Spannungsangabe V_{ss} bedeutet, daß der zwischen Maximum und Minimum der Wechselspannung gemessene und am Oszilloskop besonders gut ablesbare Spitze-Spitze-Wert gemeint ist. Er beträgt das $2\sqrt{2}$ -fache der üblicherweise angegebenen Effektivspannung. Am Zweikanaloszilloskop wird gleichzeitig die Eingangsspannung u_e dargestellt. Verwenden Sie am Oszilloskopeingang für u_a den Tastkopf. (Warum?). Messen Sie sowohl den Betrag von u_a als auch die zeitliche Verschiebung Δt zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung, und rechnen Sie um in das Abschwächungsverhältnis u_a/u_e und die Phasenverschiebung $\Delta\phi$ in Winkelgrad. Stellen Sie sowohl u_a/u_e als auch $\Delta\phi$ über $\log(f/f_0)$ mit $f_0 = 1/2\pi RC$ dar, und tragen Sie jeweils den berechneten Verlauf dazu ein.

1.2 Wie 1.1, jedoch wird jetzt als Ausgangsspannung u_a die Spannung an C beobachtet: **'Tiefpaß'**.

2. Dieselben Vierpole wie bei Aufgabe 1 werden benutzt, aber statt sinusförmiger Wechselspannung wird jetzt Dreieck- bzw. Rechteckwechselspannung angelegt. Bei geeigneter Dimensionierung spricht man von **'Differenzier- bzw. Integriergliedern'**.

2.1 Legen Sie **dreieckförmige** Wechselspannung ($f \approx 1,7\text{kHz}$; $u_e \approx 8V_{ss}$) an die Reihenschaltung von C ($\approx 1\text{nF}$) und R (wie bei 1.1) und beobachten Sie als Ausgangsspannung u_a die Spannung an R oszilloskopisch: **'Differenzierglied'**, falls $f/f_0 \ll 1$. Am Zweikanaloszilloskop wird gleichzeitig die Eingangsspannung u_e dargestellt. Verwenden Sie am Oszilloskopeingang für u_a den Tastkopf. Vergleichen Sie die Meßergebnisse mit Rechenergebnissen.

2.2 Wie 2.1, jedoch wird jetzt als Ausgangsspannung u_a die Spannung an C beobachtet: **'Integrierglied'**, falls $f/f_0 \gg 1$. Statt dreieckförmiger ist hier **rechteckförmige** Wechselspannung zweckmäßig.

2.3 Es ist interessant, außer den in den Aufgaben verlangten R-C-Kombinationen weitere zu verwenden oder etwa das Differenzierglied mit Rechteck- und das Integrierglied mit Dreiecksspannung zu betreiben oder bei festem R und C die Frequenz der angelegten Spannung über weite Bereiche zu variieren. Machen Sie solche Untersuchungen.

3. Hier geht es um längssymmetrische **Vierpole** aus (idealisiert) reinen Blindwiderständen und ihre **Übertragungseigenschaften** (Betrag und Phase von u_a/u_e) sowie um die Wirkung der Verkettung mehrerer gleicher Vierpole. Dabei wird die **'Drosselkette'** untersucht, die einerseits als 'Impulsverzögerer' sowie als 'Tiefpaß mit steiler Flanke' praktische Bedeutung hat und andererseits das Funktionieren eines Kabels (Aufgabe 4) leichter verständlich macht.

3.1 Bestimmen Sie den **charakteristischen Widerstand** $Z_0(f \ll f_0)$ einer Drosselkette bei relativ geringer Frequenz. Legen Sie dazu an die sechsgliedrige Kette rechteckförmige Wechselspannung ($f \approx 20\text{kHz}$; $u_e \approx 6V_{ss}$) und beobachten Sie oszilloskopisch das Eingangssignal. Schalten Sie den

regelbaren Lastwiderstand Z_A ('Abschlußwiderstand') der Kette ein, und stellen Sie ihn so ein, daß die beobachtete Spannung das im wesentlichen unverfälschte Rechteck ist, das möglichst wenig durch **Reflexionen** vom Kettenende beeinträchtigt wird.

3.2 Bestimmen Sie die **Grenzfrequenz f_0** der Drosselkette. Legen Sie dazu an die 6-gliedrige Kette sinusförmige Wechselspannung (f bis 1MHz; $u \sim 6V_{SS}$). Stellen Sie den Lastwiderstand anfangs auf $Z_0(f \ll f_0)$ ein. Beobachten Sie zunächst die Eingangsspannung an der Kette, und überzeugen Sie sich davon, daß der Generator eine nahezu frequenzunabhängige Spannung liefert. Beobachten Sie dann die Ausgangsspannung der Kette beim Erhöhen der Frequenz. Dabei muß der Lastwiderstand Z_A entsprechend der theoretischen Frequenzabhängigkeit von Z_0 (f/f_0) nachgeregelt werden, um Reflexionen zu vermeiden. Suchen Sie jenen Frequenzbereich, in dem sich u_a stark mit f ändert, und lesen Sie die Grenzfrequenz f_0 von der Generatorskala ab (etwa an der Stelle $u_a/u_e = 1/10$).

3.3 Berechnen Sie aus Z_0 ($f \ll f_0$) und f_0 die **Kapazität $C/2 + C/2$** und die **Induktivität L** jedes Kettengliedes. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den angegebenen Daten der Bauelemente.

3.4 Untersuchen Sie mit Hilfe des Zweikanaloszilloskops die **Phasenverschiebung** zwischen Ausgangs- und Eingangssignal in Abhängigkeit von der Frequenz (Sinusförmige Wechselspannung; $f \sim 10 / 100 / 300 / 500 / 600 / 650 / 690$ kHz) sowohl für das einzelne π -Glied als auch für die 6-gliedrige Kette. Sorgen Sie jeweils für reflexionsfreien Abschluß der Kette. Rechnen Sie aus der am Oszilloskop abgelesenen zeitlichen Verschiebung um auf die Verschiebung im Bogenmaß. Überzeugen Sie sich davon, daß bei der Grenzfrequenz die Phasenverschiebung über einen Vierpol gerade gleich π ist, und davon, daß bei einer n -gliedrigen Kette von Vierpolen gegenüber dem einzelnen Vierpol die Phasenverschiebung etwa n -fach wird. Sie können durch geschickte Benutzung des Zweikanaloszilloskops recht genau jene Frequenzen einstellen, die bei der 6-gliedrigen Kette Phasenverschiebungen von π , 2π , 3π , 4π und 5π ergeben. Ermitteln Sie aus diesen fünf Frequenzen nochmals die Grenzfrequenz f_0 .

3.5 Erzwingen Sie Reflexionen vom Kettenende ($Z_A = 0$), vermeiden Sie weitgehend Reflexionen am Kettenanfang (200 Ω -Steckwiderstand anstelle des Kurzschlußsteckers zwischen Generator und Kettenanfang einfügen) und verwenden Sie rechteckförmige Wechselspannung (ca. 20kHz). Welche **Signalform** erwarten Sie am Kettenanfang? Vergleichen Sie Vorhersage und Beobachtung.

4. Die Vierpolkette aus einzelnen Gliedern wird jetzt ersetzt durch eine **homogene Leitung**, nämlich ein übliches **Koaxialkabel**, wie es z.B. zur Impulsübertragung verwendet wird. Einige der Messungen an der Vierpolkette werden an dem Kabel in entsprechender Weise ausgeführt, um die Verwandtschaft zu erkennen.

4.1 Bestimmen Sie den **charakteristischen Widerstand Z_0** des Kabels, der wegen der sehr geringen Verluste als praktisch frequenzunabhängig angenommen werden darf. Wie 3.1, jedoch Kabel statt Vierpolkette und rechteckförmige Wechselspannung mit $f \sim 1.1$ MHz.

4.2 Bestimmen Sie die **Verzögerungszeit τ'** pro Längeneinheit des Kabels durch gleichzeitige Beobachtung von Eingangs- und Ausgangs-Rechteckspannung am Oszilloskop. (Oszilloskop-Betriebsart 'alternating'; Zeitachsendehnung maximal.)

4.3 Bestimmen Sie die Verzögerungszeit τ' pro Längeneinheit des Kabels in einer zu Aufgabe 3.5 analogen Weise: $Z_A = 0$ einstellen und die **Überlagerung von Generatorsignal (1MHz) und reflektiertem Signal** am Kabeingang beobachten.

4.4 Vergleichen Sie die aus verschiedenen Messungen und aus geometrischen Kabeldaten gewonnenen Ergebnisse für die relative **Dielektrizitätskonstante**, $\epsilon\{C\}$, r_i , r_a ; $\epsilon\{\tau'\}$; $\epsilon\{Z_0(f \ll f_0), r_i, r_a\}$.

Physikalisches Anfängerpraktikum P1

**Versuch:
P1-55
Vierpole und Leitungen**

Schriftliche Ausarbeitung von Georg Fleig
Gruppe: Di-11

Datum der Versuchsdurchführung:
08.11.2011

Einführung

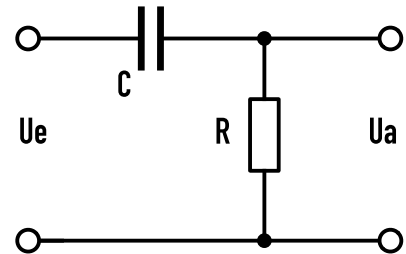
Ein Vierpol beschreibt allgemein ein Netzwerk mit vier Anschlüssen. Die hier verwendeten Vierpole haben jeweils zwei Anschlüsse als Eingang und zwei als Ausgang, daher bezeichnet man diese Netzwerke auch als Zweitore. Es sollen ein R-C-Spannungsteiler, ein L-C-Glied sowie eine Kette solcher Glieder auf ihre Eigenschaften untersucht werden. Anschließend werden noch einige der Messungen an einem Koaxialkabel wiederholt. Zur Darstellung der Messspannungen wird ein Oszilloskop verwendet.

Aufgabe 1: Hoch- und Tiefpass

Hier sollen R-C-Spannungsteiler auf ihr Abschwächungsverhältnis sowie ihre Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung untersucht werden.

1.1 Hochpass

Bei diesem Versuch verwenden wir einen R-C-Spannungsteiler, der hier als Hochpass angeschlossen wird. Ein Hochpass hat die besondere Eigenschaft, dass er hochfrequenten Wechselstrom fast ungehindert passieren lässt, jedoch Ströme mit niedriger Frequenz herausfiltert. Realisiert wird das durch einen Vierpol gemäß der Schaltskizze rechts. Bei niedrigen Frequenzen ist der Widerstand des Kondensators C sehr hoch und die Spannung fällt so an ihm ab. Bei höheren Frequenzen sinkt dieser Widerstand des Kondensators und die Spannung fällt fast ausschließlich am Widerstand R ab.



Mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln lässt sich folgender Zusammenhang zwischen U_a und U_e herstellen:

$$U_a = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} U_e = \frac{R^2 \omega^2 C^2 + i\omega C R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} U_e$$
$$\Rightarrow |U_a| = \frac{\omega R C}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} |U_e|$$

Die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen U_e und U_a beträgt:

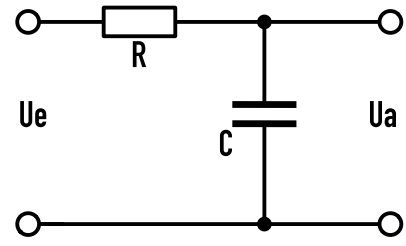
$$\Delta\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}(U_a)}{\text{Re}(U_a)}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\omega R C}\right) = \frac{\Delta t}{T} 360^\circ$$

Es soll nun mit verschiedenen Widerständen R bei einer angelegten sinusförmigen Wechselspannung U_e die Ausgangsspannung U_a sowie die zeitliche Verschiebung Δt zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung gemessen werden. Daraus können wir anschließend das Abschwächungsverhältnis $\frac{U_a}{U_e}$ und die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ berechnen. Beides soll außerdem über $\log\left(\frac{f}{f_0}\right)$ mit $f_0 = \frac{1}{2\pi R C}$ aufgetragen werden und mit den Berechneten Werten verglichen werden. Diese erhält man durch:

$$\frac{|U_a|}{|U_e|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\omega R C)^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f_0}{f}\right)^2 + 1}}$$

1.2 Tiefpass

Durch Vertauschen der Positionen von C und R in der Schaltung erhält man einen Tiefpass. Dieser filtert im Gegensatz zum Hochpass die Ströme hoher Frequenzen und lässt nur die mit niedrigen Frequenzen passieren. Ein solcher Tiefpass ist in der Schaltung rechts dargestellt. Mit ihm sollen alle Messungen analog zur Aufgabe 1.1 durchgeführt werden. Für den Zusammenhang zwischen U_e und U_a gilt hier:



$$\begin{aligned}
 U_a &= \frac{1}{1 + i\omega RC} U_e \\
 \Rightarrow |U_a| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} |U_e| \\
 \Rightarrow \frac{|U_a|}{|U_e|} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + 1}} \\
 \Delta\varphi &= \arctan(\omega RC)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Differenzier- und Integrierglieder

Es werden die Vierpole aus Aufgabe 1 verwendet und eine Dreieck- bzw. Rechteckwechselspannung angelegt.

2.1 Differenzierglied

Hier wird an den Hochpass eine Dreieckwechselspannung angelegt. Wählt man nun $\frac{f}{f_0} \ll 1$, spricht man von einem Differenzierglied. Hier entspricht U_a ungefähr der Ableitung von U_e . Da man eine geringere Frequenz f als die Grenzfrequenz f_0 wählt, fällt die Spannung fast ausschließlich am Blindwiderstand des Kondensators ab, daher kann man $U_e \approx U_C$ annehmen. Man erhält also:

$$U_a = R \cdot I = R \frac{dQ}{dt} = RC \frac{dU_C}{dt} \approx RC \frac{dU_e}{dt}$$

2.2 Integrierglied

Nun wird eine Rechteckwechselspannung an den Tiefpass angelegt. Bei $\frac{f}{f_0} \gg 1$ erwarten wir bei U_a eine Dreiecksspannung, da hier die Spannung größtenteils am Widerstand R abfällt, man nähert daher $U_e \approx U_R$.

$$U_a = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{RC} \int U_R dt \approx \frac{1}{RC} \int U_e dt$$

2.3 weitere Untersuchungen

Nun sollen noch verschiedene Messungen unter Variation des Versuchsaufbaus durchgeführt werden. Beispielsweise kann man den Hochpass mit Rechteckwechselspannung oder den Tiefpass mit Dreieck-

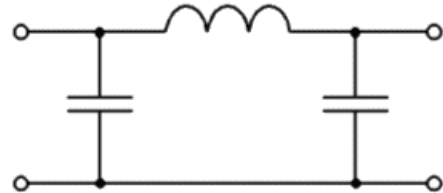
wechselspannung betreiben. Auch kann man bei festem R und C die Frequenz der Wechselspannung variieren und so weitere Untersuchungen durchführen.

Aufgabe 3: Drosselkette

In den folgenden Versuchen sollen die Übertragungseigenschaften (d.h. Betrag und Phase von $\frac{U_a}{U_e}$) von längssymmetrischen Vierpolen, die idealisiert aus reinen Blindwiderständen bestehen, untersucht werden. Dabei sollen wir auch untersuchen, wie sich solche Vierpole bei Verkettung verhalten, als Beispiel verwenden wir hier die sogenannte “Drosselkette”. Diese kann als “Impulsverzögerer” und als “Tiefpass mit steiler Flanke” in der Praxis verwendet werden.

3.1 charakteristischer Widerstand Z_0

Wir verwenden eine Drosselkette, die aus sechs L-C-Gliedern besteht. Der Schaltplan zeigt einen Ausschnitt (π -Glieder) der Kette. Am Ende wird ein Lastwiderstand mit der Impedanz Z_A angeschlossen. Nun wird eine Wechselspannung mit geringer Frequenz ($f \ll f_0$) angelegt und das Eingangssignal am Oszilloskop beobachtet. Z_A ist regelbar und wird nun so gewählt, dass die Spannung möglichst einer Rechteckwechselspannung gleicht und nicht durch Reflexionen vom Kettenende beeinträchtigt wird. Nun entspricht Z_A genau dem charakteristischen Widerstand Z_0 . Betrachtet man nur ein Glied, erhält man mit den Kirchhoffschen Regeln folgende Gleichung für Z_0



$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

wobei $\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ gilt.

Der charakteristische Widerstand ist also frequenzabhängig. Für niedrige Frequenzen ($\omega \ll \omega_0$) gilt jedoch

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$$

3.2 Grenzfrequenz f_0

Es wird eine sinusförmige Wechselspannung angelegt und der Lastwiderstand auf Z_0 eingestellt. Nun wird die Frequenz erhöht und dabei die Ausgangsspannung beobachtet. Wie eben dargestellt wurde, hängt der charakteristische Widerstand von der Frequenz ab, daher muss er kontinuierlich nachjustiert werden. Ändert sich U_a stark mit f , so ist die Grenzfrequenz f_0 gefunden. Diese Änderung erwarten wir etwa bei

$$\frac{|U_a|}{|U_e|} = \frac{1}{10}$$

3.3 Kapazität C und Induktivität L

Aus den Ergebnissen der Aufgaben 3.1 und 3.2 sollen nun die Induktivität L und die Kapazität C eines π -Kettenglieds bestimmt werden. Wie in 3.1 gezeigt wurde gilt

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$$

außerdem gilt

$$f_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}}$$

Durch umstellen dieser Gleichungen erhält man C und L

$$C = \frac{1}{\pi f_0 Z_0}$$

$$L = \frac{Z_0}{\pi f_0}$$

Da Z_0 und f_0 bereits bestimmt wurden, lassen sich nun C und L berechnen. Die Ergebnisse sollen anschließend mit den Herstellerangaben verglichen werden.

3.4 Phasenverschiebung

Bei diesem Versuch soll die Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal bei verschiedenen sinusförmigen Frequenzen für ein π -Glied sowie für die gesamte Kette untersucht werden. Beim anschließen der Kette ist darauf zu achten, dass dieser reflexionsfrei erfolgt. Bei der Grenzfrequenz ist eine Verschiebung um π zu erwarten, bei n Gliedern etwa eine Verschiebung um $n \cdot \pi$.

Zur Umrechnung der zeitlichen Verschiebung Δt in $\Delta\varphi$ verwenden wir

$$\Delta\varphi = 2\pi f \Delta t$$

Zum Vergleich berechnen wir noch den theoretischen Wert mit

$$\Delta\varphi = 2n \arcsin\left(\frac{f}{f_0}\right)$$

wobei n die Anzahl der in der Kette verwendeten π -Glieder darstellt.

Hier soll die Grenzfrequenz f_0 erneut bestimmt werden. Dazu erzeugen wir bei der Ketten eine Phasenverschiebung von π , 2π , 3π , 4π und 5π . f_0 erhält man dann folgendermaßen:

$$f_0 = \frac{f}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2n}\right)}$$

3.5 Reflexion am Kettenende

Setzt man $Z_A = 0$, kommt es zu Reflexion am Kettenende. Um Reflexion am Kettenanfang zu vermeiden, setzen wir einen 200Ω Widerstand anstatt der Kurzschlussbrücke ein, außerdem wird die Kette mit rechteckiger Wechselstromspannung betrieben.

Über den Reflexionsfaktor ρ lässt sich das Amplitudenverhältnis bestimmen:

$$\rho = \frac{Z_A - Z_0}{Z_A + Z_0}$$

Mit $Z_A = 0$ ergibt sich $\rho = -1$, die Welle wird also mit umgekehrtem Vorzeichen reflektiert. Daher ist zu erwarten, dass die am Kettenanfang ankommende Welle ebenfalls ein Rechtecksignal darstellt.

4: Koaxialkabel

Bei den folgenden Versuchen ersetzen wir die Drosselkette mit einem Koaxialkabel. An diesem sollen wir nun einige Messungen erneut durchführen um die Ähnlichkeit von Koaxialkabeln und Vierpolketten zu erkennen.

4.1 charakteristischer Widerstand Z_0

Der charakteristische Widerstand Z_0 soll analog zu Aufgabe 3.1 bestimmt werden. Z_A wird so gewählt, dass wir am Oszilloskop möglichst eine unverfälschte Rechteckspannung beobachten können, die am Eingang anliegt. Da Koaxialkabel kaum Verluste bei der Übertragung aufweisen, können wir davon ausgehen, dass der charakteristische Widerstand frequenzunabhängig ist. Typische Koaxialkabel haben einen charakteristischen Widerstand von $50 - 100\Omega$.

4.2 Verzögerungszeit τ' - Methode 1

Um die Verzögerungszeit τ' pro Längeneinheit des Kabels zu bestimmen, beobachten wir am Oszilloskop gleichzeitig die rechteckige Eingangs- und Ausgangsspannung. Um die abgelesene Verzögerungszeit τ in τ' umzurechnen, wird noch durch die Länge l des Kabels dividiert:

$$\tau' = \frac{\tau}{l}$$

4.3 Verzögerungszeit τ' - Methode 2

τ' soll nun erneut mit einer zweiten Methode bestimmt werden. Dabei gehen wir analog zu Aufgabe 3.5 vor und setzen $Z_A = 0$. Am Oszilloskop wird nun die Überlagerung des Eingangssignals und des reflektierten Signals beobachtet. Über die Breite der sich überlagernden Bereiche kann man τ bestimmen und daraus anschließend τ'

$$\tau' = \frac{\tau}{2l}$$

4.4 relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r

Über drei verschiedene Wege soll die relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r aus des gewonnenen Messdaten sowie den geometrischen Kabeldaten bestimmt und verglichen werden.

(i)

$$\epsilon_r(C_l, r_i, r_a) = \frac{C_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

(ii)

$$\epsilon_r(\tau') = \frac{c^2\tau'^2}{\mu_r}$$

(iii)

$$\epsilon_r(Z_0, r_i, r_a) = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi^2 Z_0^2 \epsilon_0} \left(\ln\frac{r_a}{r_i}\right)^2$$

Quellenangabe

Jüngst, W.: Vorbereitungshilfe zum Versuch “Vierpole und Leitungen“

Grafiken:

Tiefpass: <https://secure.wikimedia.org/wikipedia/de/wiki/Tiefpass>, abgerufen am 06.11.2011

Hochpass: <https://secure.wikimedia.org/wikipedia/de/wiki/Hochpass>, abgerufen am 06.11.2011

Ausschnitt Drosselkette: <http://www.dj4uf.de/lehr/a04/a04.html>, abgerufen am 06.11.2011

Physikalisches Anfängerpraktikum P1

Versuch:

P1-55

Vierpole und Leitungen

Schriftliche Vorbereitung von Marcel Krause (mrrrc@leech.it)

Gruppe: Di-11

Datum der Versuchsdurchführung:

08.11.11

Theoretische Grundlagen

Impedanzen

Impedanzen, auch Wechselstromwiderstände genannt, geben das Verhältnis von Spannung zu aufgenommenem Strom an. Eine Impedanz ist in der Regel eine komplexe Größe aus einem Real- und Imaginärteil. Der Imaginärteil ist dabei für den Phasenversatz verantwortlich und sorgt für keine Energieumwandlung, weshalb Impedanzen, die rein vom Imaginärteil bestimmt sind, als Blindwiderstände bezeichnet. Für einen Widerstand R , eine Kapazität C und eine Induktivität L gelten die Impedanzen

$$Z_R = R \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad Z_L = i\omega L$$

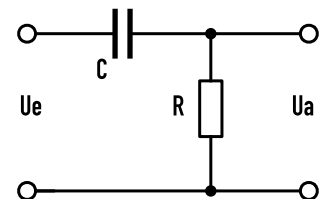
Aufgabe 1: RC-Spannungsteiler

In dieser Versuchsreihe werden wir das Abschwächungsverhältnis sowie die Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal in Form von Wechselspannungen an einfachen, passiven, linearen Vierpolen untersuchen. Dabei legen wir eine sinusförmige Wechselspannung u_e mit $u_e \approx 8V_{ss}$ und der Frequenz $f \approx 1,7kHz$ an eine Reihenschaltung aus Widerstand R mit $R \approx 1, 10, 100, 1000k\Omega$ und einen Kondensator C mit $C \approx 1nF$ (kurz RC-Glied genannt) an. Die Ausgangsspannung u_a wird mithilfe eines Oszilloskops beobachtet. Als Grenzfrequenz f_0 des RC-Glieds nutzen wir später:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

Aufgabe 1.1: Hochpass

Als Hochpass bezeichnet man eine Bauteilanordnung, welche es ermöglicht, tiefe Frequenzen eines Eingangssignals unterhalb einer für den verwendeten Hochpass spezifischen Grenzfrequenz herauszufiltern. Höhere Frequenzen gelangen praktisch ungeschwächt durch den Hochpass. Die nebenstehende Schaltskizze zeigt den prinzipiellen Aufbau, mit dem wir uns in der Messung beschäftigen. Wie man erkennt, wird beim Hochpass die Ausgangsspannung u_a am Widerstand R abgegriffen.



Mittels der Kirchhoffschen Gesetze erkennt man leicht, dass folgende komplexe Abhängigkeit zwischen Eingangsspannung und Ausgangsspannung besteht:

$$u_a = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} u_e$$

Erweitert man diesen Ausdruck mit dem konjugiert Komplexen, so erhält man

$$u_a = \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} (i + \omega RC) u_e$$

Uns interessiert in dieser Versuchsreihe nun das Abschwächungsverhältnis $\frac{|u_a|}{|u_e|}$ sowie die Phasenverschiebung $\Delta\Phi$. Für das Abschwächungsverhältnis bilden wir von obigem Ausdruck zunächst den Betrag,

kürzen ωRC und bringen $|u_e|$ auf die andere Seite. Mithilfe von $\omega = 2\pi f$ ergibt sich

$$\frac{|u_a|}{|u_e|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\pi f RC}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}}$$

Die Phasenverschiebung berechnet sich aus dem Verhältnis von Imaginär- und Realteil des komplexen Zusammenhangs von u_a und u_e :

$$\Delta\Phi = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right) = \arctan\left(\frac{f_0}{f}\right)$$

Mit diesen Gleichungen werden wir den berechneten Verlauf der gewünschten Kurven auftragen können. Für den gemessenen Verlauf findet sich $|u_a|$ direkt, $\Delta\Phi$ wird aber über die zeitliche Verschiebung Δt zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung bestimmt. Aus $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \omega = 2\pi f$ folgert man, dass gilt:

$$\Delta\Phi = 2f\Delta t \cdot \pi \hat{=} 360f\Delta t^\circ$$

Wir tragen dann $\frac{|u_a|}{|u_e|}$ und $\Delta\Phi$ über $\log\left(\frac{f}{f_0}\right)$ sowohl für unsere gemessenen, als auch für die zugehörigen berechneten Werte auf.

Aufgabe 1.2: Tiefpass

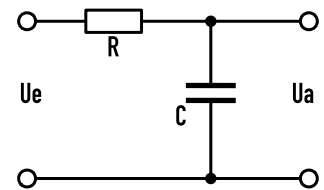
Wir wiederholen alle Messungen aus Aufgabe 1.1, greifen die Ausgangsspannung u_a dieses Mal aber am Kondensator ab. Damit erhält man einen Tiefpass, welcher das Gegenteil des Hochpasses darstellt. Ein solcher Tiefpass filtert hohe Frequenzen aus dem Eingangssignal heraus und lässt tiefe Frequenzen beinahe ungeschwächt hindurch. Die nebenstehende Schaltskizze zeigt erneut den prinzipiellen Versuchsaufbau. Da nun die Spannung am Kondensator abgegriffen wird, verändern sich auch die Formeln von oben etwas. Durch analoge Herleitung mittels der Kirchhoffschen Gesetze folgt für das Abschwächungsverhältnis $\frac{|u_a|}{|u_e|}$

$$\frac{|u_a|}{|u_e|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$$

und für den Phasenversatz

$$\Delta\Phi = -\arctan\left(\frac{f}{f_0}\right)$$

Wir tragen dann erneut $\frac{|u_a|}{|u_e|}$ und $\Delta\Phi$ über $\log\left(\frac{f}{f_0}\right)$ sowohl für unsere gemessenen, als auch für die zugehörigen berechneten Werte auf.



Aufgabe 2: Differenzier- und Integrierglieder

Wir nutzen den selben Vierpol wie in Aufgabe 1, allerdings wird die Versuchsanordnung nun mit dreieck- oder rechteckförmige Wechselspannung angelegt.

Aufgabe 2.1: Differenzierglied

Wir legen eine dreieckförmige Wechselspannung an die Reihenschaltung von C und R an. Die Kennwerte der verwendeten Bauteile sind dabei dieselben wie in Aufgabe 1. Nun beobachten wir die Ausgangsspannung u_a , die am Widerstand abgegriffen wird. Für diese gilt $u_a = R \cdot I$. Die Ladung des Kondensators ist gegeben durch $Q = C \cdot u_C$ und es gilt allgemein $I = \frac{dQ}{dt}$. Betrachten wir den Fall $f \ll f_0$, so wird $u_C \approx u_e$; damit folgt:

$$u_a = RC \frac{du_C}{dt} \approx RC \frac{du_e}{dt}$$

Da wir eine Dreiecksspannung anlegen ist die Differentiation leicht, denn sie entspricht gerade der Steigung der Dreiecksspannung. Da diese alle $\frac{T}{2}$ das Vorzeichen wechselt, wird hier der Betrag betrachtet:

$$|u_a| = 2RCf \cdot |u_e|$$

Es sei hier angemerkt, dass dies nur für $\frac{f}{f_0} \ll 1$ gilt; andernfalls müsste man den aus der Produktregel folgenden Term $\dot{C}$ mit berücksichtigen. Man erkennt, dass es sich hierbei um ein Differenzierglied handelt, weshalb ein Versuchsaufbau dieser Art auch Analogdifferenzierer genannt wird. Speisen wir diesen mit dreieckförmiger Wechselspannung, so ist zu erwarten, dass wir als Ausgangssignal die Ableitung davon erhalten, nämlich eine Rechtecksspannung.

Aufgabe 2.2: Integrierglied

Es wird nun eine rechteckförmige Wechselspannung an denselben Versuchsaufbau gelegt und die Ausgangsspannung u_a am Kondensator beobachtet. Für die Ladung gilt $Q = \int I dt$ und für die Stromstärke $I = \frac{U_R}{R}$. Für den Fall $f \gg f_0$ gilt in guter Näherung $u_R \approx u_e$; somit haben wir:

$$u_a = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{RC} \int U_R dt = \frac{1}{RC} \int (u_e - u_a) dt \approx \frac{1}{RC} \int u_e dt$$

Man bezeichnet einen solchen Aufbau als Integrierglied, falls $\frac{f}{f_0} \gg 1$ gilt. Dann darf man auch die Ausgangsspannung im Integral auf der rechten Seite vernachlässigen, da sie gering ist gegen u_e .

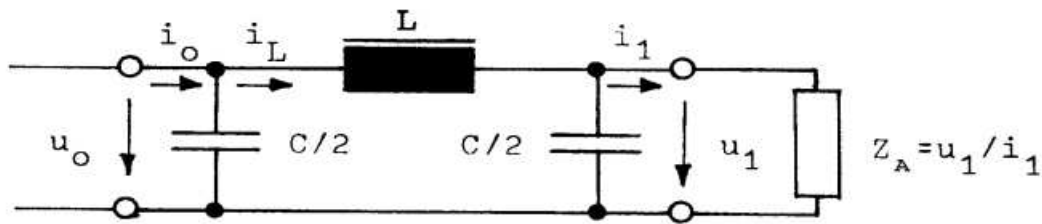
In diesem Fall ist die Ausführung der Integration bei angelegter Rechtecksspannung leicht, denn sie entspricht gerade der Fläche unter dem Rechteck bis zum Amplitudensprung. Wegen dieser Unstetigkeit wird wieder der Betrag betrachtet:

$$|u_a| = \frac{1}{RC} \int_0^{\frac{T}{2}} (u_e) dt = \frac{u_{e,ss}}{4fRC}$$

Aufgabe 2.3: Sonstige Kombinationen

Wir werden an den beiden Versuchsaufbauten von Aufgabe 2.1 und 2.2 weitere Versuche durchführen, indem wir beispielsweise die Frequenz der angelegten Wechselspannung variieren oder andere Arten von Wechselspannung anlegen. Dabei werden wir stets die Ausgangsspannung u_a beobachten und prüfen, inwiefern sich die theoretischen Vorhersagen mit den Messergebnissen decken.

Aufgabe 3: Drosselkette



In dieser Versuchsreihe betrachten wir eine Drosselkette. Eine solche Kette ist aus mehreren π -Gliedern aufgebaut, welche aus zwei Querkapazitäten und einer Längsinduktivität aufgebaut sind. In obiger Skizze ist eine solche Drosselkette schematisch dargestellt. Dabei sollen Verlustwiderstände unberücksichtigt bleiben, sodass wir idealisiert nur von Blindwiderständen ausgehen. Wir bestimmen nachfolgend verschiedene Eigenschaften einer Drosselkette, die aus sechs π -Gliedern aufgebaut ist.

Aufgabe 3.1: Charakteristischer Widerstand Z_0

In der ersten Teilaufgabe wollen wir den charakteristischen Widerstand Z_0 bestimmen. Mithilfe der Kirchhoffschen Gesetze kann man drei Gleichungen aufstellen, welche sich für einen speziellen Grenzfall, nämlich den charakteristischen Widerstand, vereinfachen lassen zu

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}}$$

mit $\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$.

Der regelbare Lastwiderstand Z_A muss von uns dabei so eingestellt werden, dass er die beobachtbare Rechteckspannung möglichst wenig durch ungewollte Reflexionen verfälscht. Dann gilt $Z_A \approx Z_0$. Da wir außerdem $f \ll f_0$ und damit $\omega \ll \omega_0$ beachten, gilt

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$$

in diesem Frequenzbereich.

Im Versuch ist die charakteristische Impedanz dann getroffen, falls wir am Ausgang eine möglichst ungestörte Rechteckspannung registrieren können.

Aufgabe 3.2: Grenzfrequenz f_0

Wir machen uns in dieser Teilaufgabe bewusst, inwiefern die Drosselkette als Tiefpass fungieren kann. Dazu überzeugen wir uns zunächst davon, dass der Generator nahezu frequenzunabhängige Spannung liefert. Anschließend stellen wir den Lastwiderstand auf Z_0 und erhöhen dann kontinuierlich die Frequenz der angelegten Wechselspannung unter Beobachtung der Ausgangsspannung.

In Aufgabe 3.1 wurde gezeigt, dass die charakteristische Impedanz frequenzabhängig ist, also müssen wir bei Erhöhen der Frequenz auch den Lastwiderstand nachjustieren, da sich sonst unerwünschte Reflexionen ausbilden. Die Grenzfrequenz f_0 ist gefunden, wenn wir einen Bereich erreichen, in dem sich u_a

sehr stark mit f ändern wird. Dies soll beobachtet werden, wenn ungefähr gilt:

$$\frac{|u_a|}{|u_e|} = \frac{1}{10}$$

Es ist zu erwarten, dass oberhalb dieser Frequenz die Ausgangsspannung stark abfällt.

Aufgabe 3.3: Kapazität und Induktivität

Es sollen nun mit den gewonnenen Erkenntnissen die Kapazitäten C und die Induktivität L eines π -Glieds bestimmt werden.

Nach Aufgabe 3.1 gilt für $\omega \ll \omega_0$

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$$

mit nun bekanntem Z_0 .

Nach Aufgabe 3.2 ist nun f_0 bekannt und es gilt:

$$f_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}}$$

Umstellen dieser Gleichungen liefert zwei Gleichungen für die gesuchten Größen C und L :

$$C = \frac{1}{\pi f_0 Z_0}$$
$$L = \frac{Z_0}{\pi f_0}$$

Es soll anschließend mit den angegebenen Kennwerten der Bauteile verglichen werden.

Aufgabe 3.4: Phasenverschiebung

In diesem Versuch soll die Phasenverschiebung zwischen sinusförmigem Eingangs- und Ausgangssignal sowohl für ein einzelnes π -Glied als auch für die sechsgliedrige Drosselkette betrachtet werden. Es muss darauf geachtet werden, dass der Anschluss der Kette jeweils reflexionsfrei erfolgt.

Für die Umrechnung der zeitlichen Verschiebung Δt in die Phasenverschiebung im Bogenmaß $\Delta\Phi$ gilt wie in Aufgabe 1.1:

$$\Delta\Phi = 2\pi f \Delta t$$

Um einen theoretischen Wert als Vergleich zu erhalten, nutzen wir noch die Formel

$$\Delta\Phi = 2n \arcsin\left(\frac{f}{f_0}\right)$$

wobei n die Anzahl an verwendeten π -Gliedern darstellt.

Wir werden uns davon überzeugen, dass sich für einen einzelnen Vierpol bei der Grenzfrequenz gerade eine Phasenverschiebung von π einstellt und dass sich bei einer n -gliedrigen Kette bei der Grenzfrequenz die n -fache Phasenverschiebung einstellt. Es sollen mithilfe des Oszilloskops Frequenzen eingestellt werden, die Phasenverschiebungen von π , 2π , 3π , 4π und 5π hervorrufen. Daraus wird abschließend erneut die Grenzfrequenz f_0 ermittelt.

Auch hier können wir noch einen theoretischen Wert für f_0 ermitteln. Dazu nutzen wir folgende Formel:

$$f_0 = \frac{f}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}$$

wobei n die Anzahl an verwendeten π -Gliedern und k die Anzahl an Phasenverschiebungen als Vielfache von π darstellen.

Aufgabe 3.5: Reflexionen und Signalform

Wir werden Reflexionen am Kettenende erzwingen, indem wir dort einen Kurzschluss verursachen, das heißt $Z_A = 0$. Am Kettenanfang hingegen wollen wir Reflexionen vermeiden, sodass wir dort den Kurzschlussstecker mit einem 200Ω -Widerstand ersetzen. Es kommt rechteckförmige Wechselspannung zum Einsatz.

Für den Reflexionsfaktor ρ gilt:

$$\rho = \frac{Z_A - Z_0}{Z_A + Z_0}$$

Da bei uns $Z_A = 0$ vorliegt, wird $\rho = -1$, die Reflexion erfolgt also mit Vorzeichenumkehr. Es ist dabei zu erwarten, dass die am Kettenanfang registrierte Welle ebenfalls rechteckförmig sein wird, wobei sie etwas abgeschwächt sein müsste.

Aufgabe 4: Koaxialkabel

In der letzten Versuchsreihe ersetzen wir die inhomogene Drosselkette mit einer homogenen Leitung, dem Koaxialkabel. Dabei werden wir einige Messungen der vorigen Aufgaben am Koaxialkabel wiederholen, um so die Verwandtschaft zwischen dem Kabel und der Vierpolkette zu erkennen.

Aufgabe 4.1: Charakteristischer Widerstand Z_0

Da ein Koaxialkabel üblicherweise zur Informationsübertragung ausgelegt ist, besitzt es im Allgemeinen sehr geringe Verluste. Wir können also während dem Versuch davon ausgehen, dass die charakteristische Impedanz Z_0 unabhängig von der verwendeten Frequenz ist. Für den Versuch benutzen wir eine Rechteckspannung mit $f \approx 1,1\text{MHz}$.

Für den Versuch gehen wir analog vor wie in Aufgabe 3.1. Wir stellen den Lastwiderstand Z_A so ein, dass wir als Ausgangssignal wieder eine möglichst ungestörte Rechtecksspannung registrieren. Dann ist Z_0 getroffen.

Die für die Signalübertragung üblichen Koaxialkabel haben charakteristische Impedanzen von $Z_0 = 50\Omega$ oder $Z_0 = 75\Omega$, sodass erwartet wird, dass sich der von uns bestimmte Wert in diesen Größenordnungen befindet.

Aufgabe 4.2: Verzögerungszeit τ' - Variante 1

In dieser Aufgabe beobachten wir gleichzeitig eine rechteckförmige Eingangs- und Ausgangsspannung am Oszilloskop. Damit können wir die Zeitverzögerung $\Delta\tau$ beider Signale ermitteln. Benutzen wir ein Koaxialkabel der Länge l , so ergibt sich die Verzögerungszeit pro Längeneinheit τ' zu

$$\tau' = \frac{\Delta\tau}{l}$$

Da Koaxialkabel zur Signal- und Impulsübertragung verwendet werden, können geringe Verzögerungszeiten erwartet werden.

Aufgabe 4.3: Verzögerungszeit τ' - Variante 2

Wir bestimmen erneut die Verzögerungszeit pro Längeneinheit τ' , dieses Mal allerdings analog wie in Aufgabe 3.5. So werden wir den Lastwiderstand auf $Z_A = 0$ setzen und dann die Überlagerung von Generatorsignal und reflektiertem Signal beobachten. Die Reflexion erhält durch den Kurzschluss den Faktor $\rho = -1$, daher werden sich die Signale destruktiv überlagern. Allerdings wird es, bedingt durch die Signalverzögerung, gewisse Bereiche geben, in denen die Interferenz beider Signale nicht (vollständig) destruktiv erfolgt.

Anhand der Breite dieser Bereiche kann man dann $\Delta\tau$ ermitteln und daraus mit der obigen Formel τ' .

Aufgabe 4.4: Dielektrizitätskonstante

Es sollen nun mithilfe der unten angegebenen Formeln die relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r des Kabels auf drei verschiedene Weisen bestimmt werden. Anschließend sollen die ϵ_r -Werte, welche mithilfe von Messdaten bestimmt wurden, verglichen werden mit dem rechnerisch ermittelten Ergebnis der Permittivität, welche nur aus geometrischen Kabeldaten ermittelt werden kann.

(a) **Kabelgeometrisch:**

$$\epsilon_r(C, r_i, r_a) = \frac{C}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

(b) **Über τ' :**

$$\epsilon_r(\tau') = \frac{c^2 \tau'^2}{\mu_r}$$

(c) **Über Z_0 :**

$$\epsilon_r(Z_0, r_i, r_a) = \frac{\mu_r}{4\pi^2 Z_0^2 \epsilon_0^2 c^2} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2$$

Quellenverzeichnis

Jüngst, W.: Vorbereitungshilfe zum Versuch "Vierpole und Leitungen"

Demtröder, W.: Experimentalphysik 2

Meschede, D.: Gerthsen Physik

Skizzen der RC-Spannungsteiler:

<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5a/Hochpass.svg>

<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e8/Tiefpass.svg>

Skizze der Drosselkette:

Jüngst, W.: Vorbereitungshilfe zum Versuch "Vierpole und Leitungen"

Physikalisches Anfängerpraktikum P1

**Versuch:
P1-55
Vierpole und Leitungen**

Auswertung

von

Georg Fleig (georg@leech.it)
Marcel Krause (mrrrc@leech.it)

Gruppe: Di-11

Datum der Versuchsdurchführung:
08.11.11

Aufgabe 1: RC-Spannungsteiler

Wir stellen den Funktionsgenerator auf sinusförmige Wechselspannung mit $f = 1,7\text{kHz}$ sowie $u_e = 8V_{ss}$, wobei sich der Index ss darauf bezieht, dass der Wert von u_e als Spitze-Spitze-Wert aufzufassen ist. Die Eingangsspannung wurde mithilfe des Oszilloskops möglichst genau auf $8V$ eingestellt. Es wurde nun sowohl am Hoch-, als auch am Tiefpass experimentiert. Dabei wurde als Kapazität $C = 1\text{nF}$ gewählt und für den Widerstand $R = 1/10/100/1000\text{k}\Omega$.

In den beiden nachfolgenden Versuchen haben wir den Tastkopf des Oszilloskops verwendet. Dies hat hauptsächlich den Grund, dass wir Widerstandswerte bis zur Größenordnung des Innenwiderstands des Oszilloskops verwenden. Damit dieser aber keinen zu großen Einfluss auf die Messung hat, benötigt man den Tastkopf. Dadurch haben wir einen Spannungsteiler mit dem Verhältnis 1:10, sodass wir die am Oszilloskop ablesbaren Ausgangsspannungen mit dem Faktor 10 multiplizieren mussten.

Aufgabe 1.1: Hochpass

Beim Hochpass wurde die Spannung am Widerstand abgegriffen. Diese Spannung wurde geeignet am Oszilloskop dargestellt und vermessen. Aus oben genannten Gründen haben wir dieses Messergebnis noch mit dem Faktor 10 gewichtet.

Für jeden Widerstand R lässt sich mithilfe der Formel

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

die Grenzfrequenz f_0 berechnen. Dadurch können dann auch die Werte $\log\left(\frac{f}{f_0}\right)$ bestimmt werden, über die nachher $\frac{|u_a|}{|u_e|}$ und $\Delta\Phi$ aufgetragen werden sollen.

In nachfolgender Tabelle sind die Messwerte zusammen mit den berechneten Größen dargestellt.

R in kΩ	f ₀ in kHz	log(f/f ₀)	u _{a,ex} in V _{ss}	u _{a,exp} / u _e
1	159,155	-1,971	0,080	0,010
10	15,915	-0,971	0,795	0,099
100	1,592	0,029	5,500	0,688
1000	0,159	1,029	7,700	0,963

Die Verhältnisse $\frac{|u_{a,theor}|}{|u_e|}$ lassen sich durch

$$\frac{|u_{a,theor}|}{|u_e|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}}$$

berechnen. Diese werden zusammen mit der theoretischen Phasenverschiebung

$$\Delta\Phi_{theor} = \arctan\left(\frac{f_0}{f}\right)$$

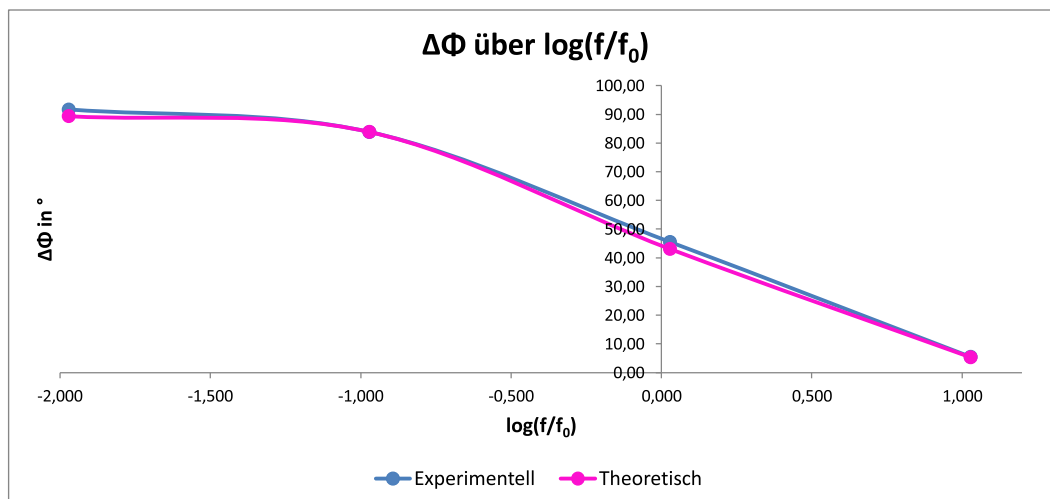
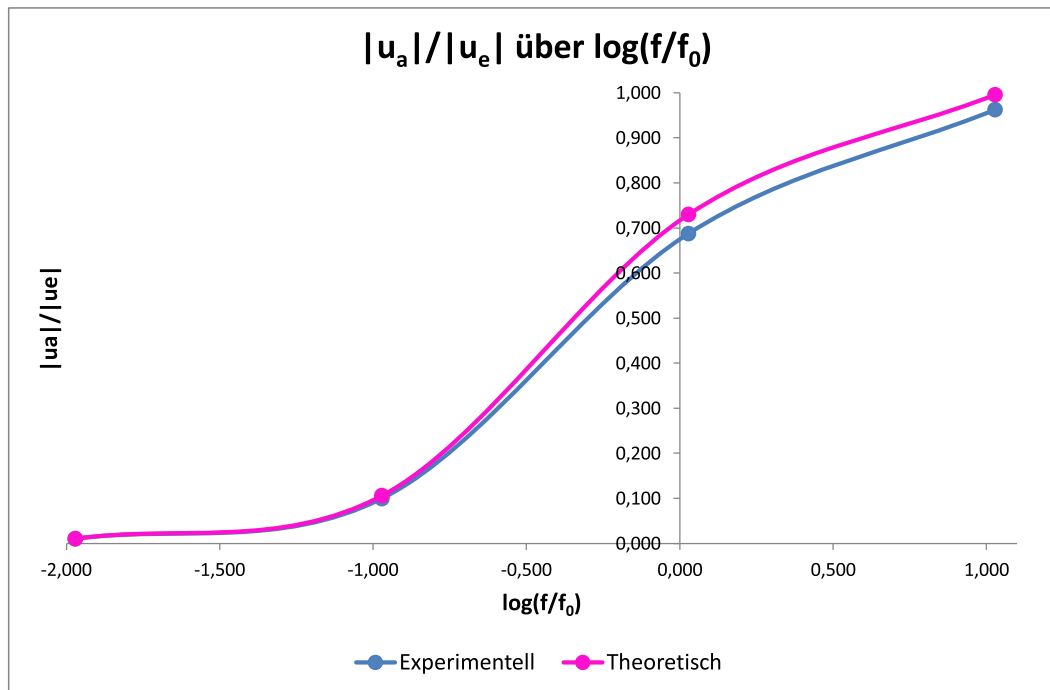
benötigt, um zu prüfen, ob die aus unseren Messergebnissen resultierenden Werte auch realitätsnah sind. Für die Berechnung von $\Delta\Phi_{exp}$ haben wir die zeitliche Verschiebung Δt zwischen der Eingangs- und Ausgangsspannung mithilfe des Oszilloskops bestimmt und dann mit der Formel

$$\Delta\Phi_{exp} = 360f\Delta t^\circ$$

in die Phasenverschiebung im Gradmaß umgerechnet. Die unten stehende Tabelle zeigt die aufgenommenen Messwerte und die daraus berechneten Phasenverschiebungen.

Δt in μs	$\Delta\Phi_{\text{exp}}$ in $^\circ$	$\Delta\Phi_{\text{theor}}$ in $^\circ$
149,8	91,68	89,39
137	83,84	83,90
74,4	45,53	43,11
9	5,51	5,35

Damit können wir nun die gewünschten Graphen erstellen, die uns für die weitere Diskussion nützlich sind.



Damit bestätigt sich unsere Vermutung aus der Vorbereitung und die Hochpass-Funktion dieser Schaltung. Bei niedrigen Widerstandswerten steigt die Grenzfrequenz f_0 über die verwendete Eingangsfrequenz f . In diesen Fällen ist das Spannungsverhältnis sehr gering (bis nahezu Null), wohingegen die

Phasenverschiebung sehr hoch (bis etwa 90°) liegt. Steigert man R , so sinkt die Grenzfrequenz unter die verwendete Frequenz, wobei gleichzeitig das Spannungsverhältnis steigt und der Phasenversatz sinkt. Daraus lässt sich schließen, dass der Hochpass hohe Frequenzen durchlässt und niedrigere Frequenzen unterhalb f_0 herausfiltert.

Aufgabe 1.2: Tiefpass

Wir wiederholen nun die Messungen aus Aufgabe 1.1, allerdings verwenden wir dieses Mal einen Tiefpass. Wir verändern unsere Schaltung also dahingehend, als dass wir die Spannung u_a nun am Kondensator abgreifen. Auch hier müssen die gemessenen Werte mit dem Faktor 10 gewichtet werden.

Messen und berechnen der experimentellen Werte erfolgt ganz analog zu Aufgabe 1.1. Die für Vergleichszwecke benötigten theoretischen Gleichungen müssen, wie in der Vorbereitung angesprochen, mit leicht angepassten Formeln berechnet werden.

Die Verhältnisse $\frac{|u_{a,theor}|}{|u_e|}$ berechnen sich hier nun zu

$$\frac{|u_{a,theor}|}{|u_e|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$$

und den Phasenversatz erhält man mit

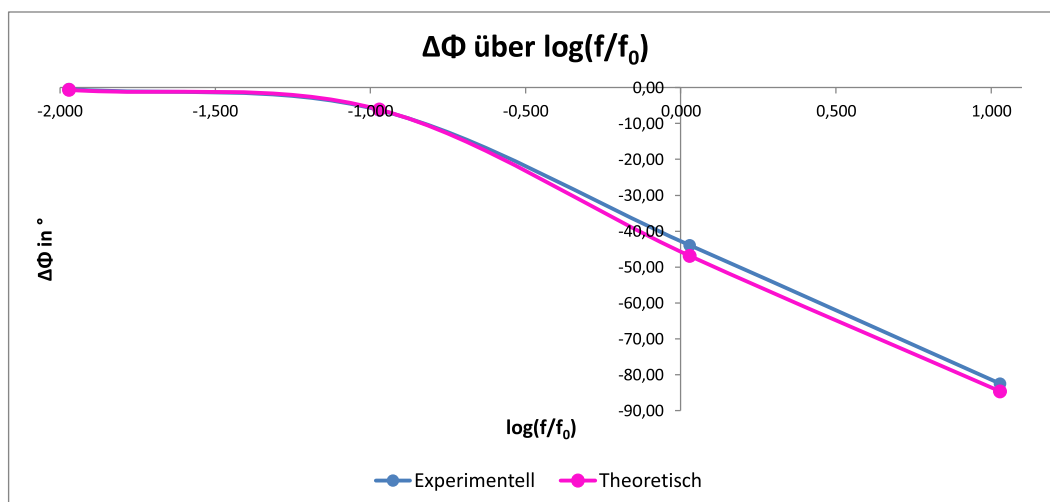
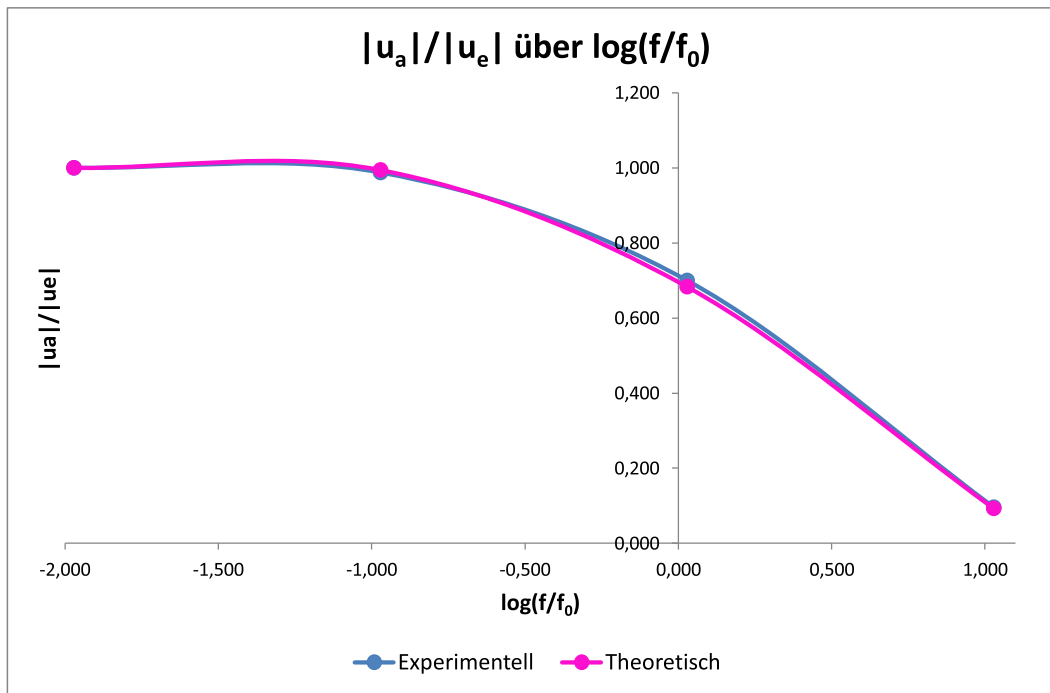
$$\Delta\Phi_{theor} = -\arctan\left(\frac{f}{f_0}\right)$$

Nachfolgend sind unsere Messergebnisse zusammen mit den daraus berechneten Werten dargestellt.

R in k Ω	f_0 in kHz	$\log(f/f_0)$	$u_{a,ex}$ in V _{ss}	$ u_{a,exp} / u_e $
1	159,155	-1,971	8,00	1,000
10	15,915	-0,971	7,90	0,988
100	1,592	0,029	5,60	0,700
1000	0,159	1,029	0,77	0,096

Δt in μs	$\Delta\Phi_{exp}$ in $^\circ$	$\Delta\Phi_{theor}$ in $^\circ$
-0,7	-0,43	-0,61
-10,3	-6,30	-6,10
-71,8	-43,94	-46,89
-134,8	-82,50	-84,65

Auch hier können wir nun $\frac{|u_a|}{|u_e|}$ bzw. $\Delta\Phi$ über $\log\left(\frac{f}{f_0}\right)$ darstellen, um die weitere Diskussion zu stützen.



Hier bestätigt sich ebenfalls die Vermutung aus der Vorbereitung, dass diese Schaltung als Tiefpass funktioniert. Die hohen Frequenzen werden herausgefiltert, was man am Abfall des Spannungsverhältnisses und an der Zunahme der Phasenverschiebung erkennen kann, wohingegen die tiefen Frequenzen nahezu ungehindert passieren.

Aufgabe 2: Differenzier- und Integrierglieder

Wir betrachten dieselben Vierpole wie in Aufgabe 1 und schauen, inwiefern sich diese als Analogdifferenzierer oder -integrierer eignen. Dabei nutzen wir für jede Teilaufgabe geeignete Signalformen, damit man die Effekte auch bestmöglich beschreiben und deuten kann. Der Tastkopf findet erneut Verwendung, sodass wir die am Oszilloskop abgelesenen Werte mit dem Faktor 10 wichten müssen.

Die Berechnung der Grenzfrequenz f_0 erfolgte wie zuvor durch

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

Aufgabe 2.1: Differenzierglied

In diesem Versuch betrachten wir einen Hochpass mit Dreiecksspannung. Wie in der Vorbereitung diskutiert, spricht man hier von einem Differenzierglied, falls die Bedingung $f \ll f_0$ erfüllt ist. Dies soll nun gezeigt werden.

Für verschiedene Werte von R (und damit auch für verschiedene f_0) lesen wir am Oszilloskop die Ausgangsspannung u_a ab. Als Vergleich dienen uns die theoretisch berechneten Werte von u_a , welche wir durch

$$u_a = RC \frac{du_c}{dt} \approx 2RCf \cdot u_e$$

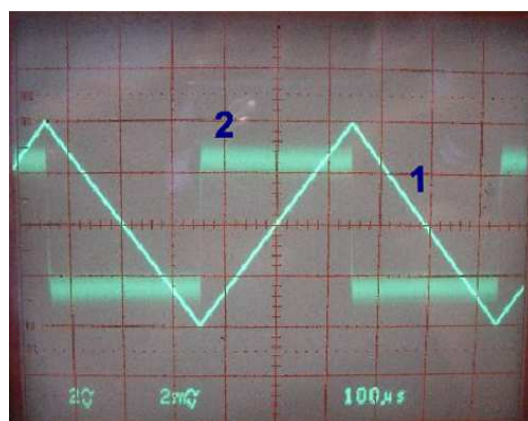
erhalten.

R in kΩ	f ₀ in kHz	u _a _{ex} in V _{ss}	u _a _{theo} in V _{ss}	
1	159,155	0,05	0,0272	f << f ₀
10	15,915	0,502	0,2720	f < f ₀
100	1,592	4,6	2,7200	f ≈ f ₀
1000	0,159	7,95	27,2000	f >> f ₀

Wir erkennen dabei, dass die obige Formel zur Berechnung der theoretischen Ausgangsspannung nur für $f \ll f_0$ sinnvolle Ergebnisse liefert.

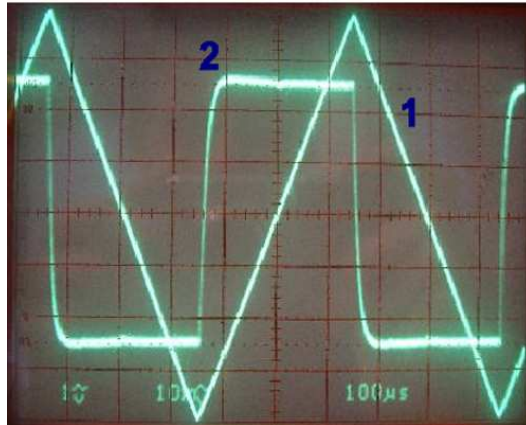
Für diese Bereiche haben sich unsere Vermutungen aus der Vorbereitung bestätigt. Aus der dreieckförmigen Wechselspannung wurde durch Differentiation eine Rechtecksspannung.

Nachfolgend ist für jeden Wert von R das Bild gezeigt, welches sich auf dem Oszilloskop eingestellt hat. Dabei bezeichnet die Ziffer 1 stets die Eingangs- und die Ziffer 2 die Ausgangsspannung.



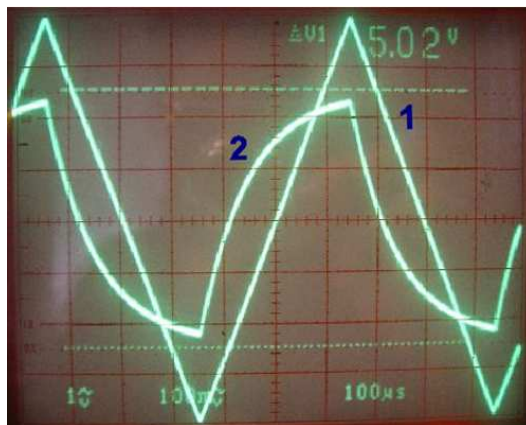
$$R = 1k\Omega$$

Man erkennt schön die rechteckige Form der Ausgangsspannung, die sich nach unserer Vorhersage in der Vorbereitung auch ausbilden muss. Die Unschärfe des Signals liegt an seiner Schwäche (vergleiche obige Messergebnisse).



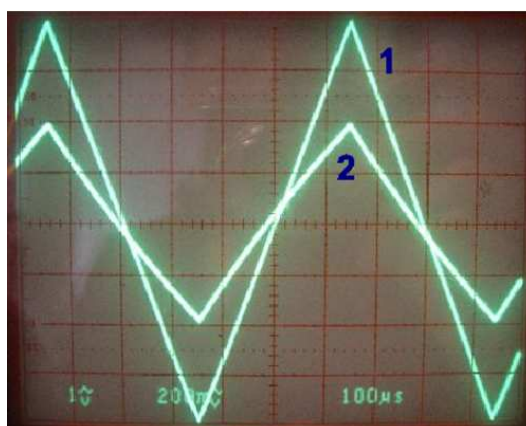
$$R = 10k\Omega$$

Es zeigt sich ebenfalls die Rechteckspannung am Ausgang mit etwas größerer Intensität, allerdings erkennt man bereits, wie sich die Zacken der Spannung abrunden. Dies liegt daran, dass wir die Bedingung $f \ll f_0$ nur noch zu schwach erfüllen.



$$R = 100k\Omega$$

Bei diesem Widerstandswert zeigt sich eine deutliche Abweichung von der vorhergesagten Ausgangssignalform. Es lässt sich nun viel mehr als parabolische Sägezahnspannung beschreiben.



$$R = 1000k\Omega$$

Die Sägezahnspannung vom vorigen Widerstandswert hat sich weiter abgeflacht und ist nun zu derselben Signalform geworden wie das Eingangssignal, nämlich eine Dreiecksspannung. Man erkennt sowohl an diesem und dem vorigen Bild wie auch an den berechneten Werten für u_a , dass die Funktion des Hochpasses als Differenzierglied für diese Frequenzen nicht mehr gegeben ist.

Aufgabe 2.2: Integrierglied

Nun betrachten wir den Tiefpass, allerdings mit einer angelegten Rechteckspannung. Man spricht hier, falls die Bedingung $f \gg f_0$ erfüllt ist, von einem Integrierglied. Auch hier wollen wir diese Bedingung und damit die Eignung des Tiefpasses als Integrierglied überprüfen.

Dazu messen wir wieder für verschiedene Werte von R die Ausgangsspannung u_a und vergleichen sie mit den theoretischen Werten, welche wir über

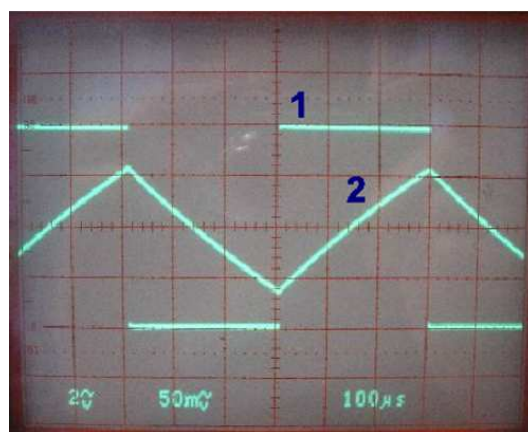
$$u_a = \frac{1}{RC} \int_0^{\frac{T}{2}} U_R dt \approx \frac{1}{RC} \int_0^{\frac{T}{2}} u_e dt = \frac{u_e}{4fRC}$$

berechnet haben. Es ergaben sich folgende Werte:

R in kΩ	f ₀ in kHz	u _a _{ex} in V _{ss}	u _a _{theo} in V _{ss}	
1	159,155	7,85	1176,4706	f << f ₀
10	15,915	7,7	117,6471	f < f ₀
100	1,592	7,05	11,7647	f ≈ f ₀
1000	0,159	1,2	1,1765	f >> f ₀

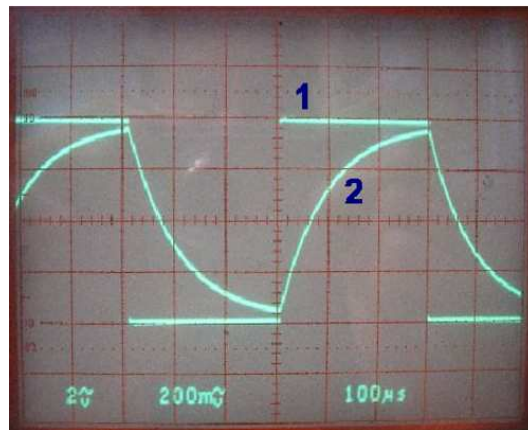
Damit bestätigen sich auch hier unsere Vermutungen. Nur für $f \gg f_0$ und ergibt sich ein sinnvoller Wert aus der theoretischen Berechnung. Dort wird durch Integration aus der Rechteckspannung eine Dreiecksspannung.

Unsere Messergebnisse sind in den nachfolgenden Bildern festgehalten.



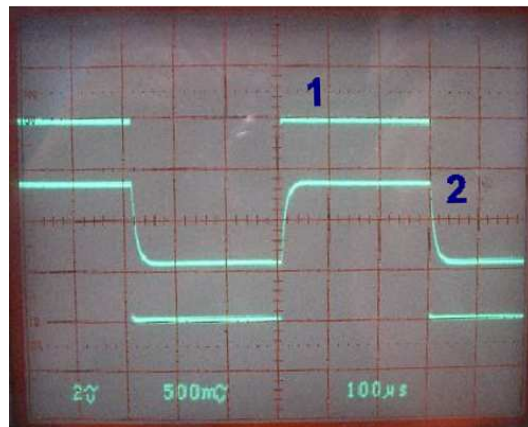
$$R = 1000k\Omega$$

Für diesen Widerstand erkennt man sehr schön, dass der Tiefpass als Analogintegrierer fungieren kann. Die Rechteckspannung ergibt integriert, wie wir es vorhergesagt haben, eine Dreiecksspannung.



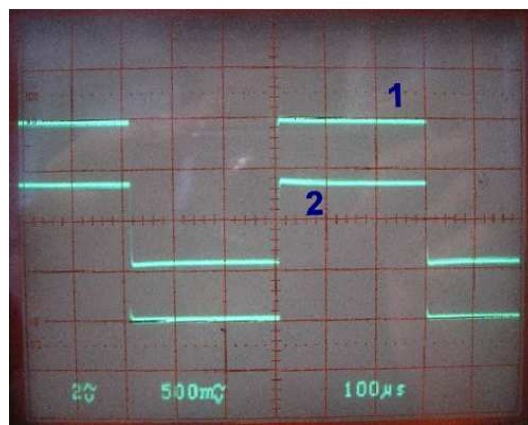
$$R = 100k\Omega$$

Bei diesem Widerstandswert verlassen wir langsam den Gültigkeitsbereich $f \gg f_0$ der obigen Gleichung. Die Rechteckspannung am Eingang ergibt nun eine parabolische Sägezahnspannung am Ausgang.



$$R = 10k\Omega$$

Die Sägezahnspannung wird weiter ausgedehnt zu einer an den Kanten leicht abgeflachten Rechteckspannung. Damit nähert sich das Ausgangssignal von der Form her immer mehr dem Eingangssignal an.



$$R = 1k\Omega$$

Für den kleinsten Widerstand erhalten wir schließlich als Ausgangssignal ebenfalls eine Rechteckspannung. Man erkennt an dieser Versuchsreihe schön, dass der Tiefpass nur für hohe Frequenzen als Integrierglied fungiert. Die niedrigeren Frequenzen werden leicht verändert oder passieren die Schaltung nahezu unverändert.

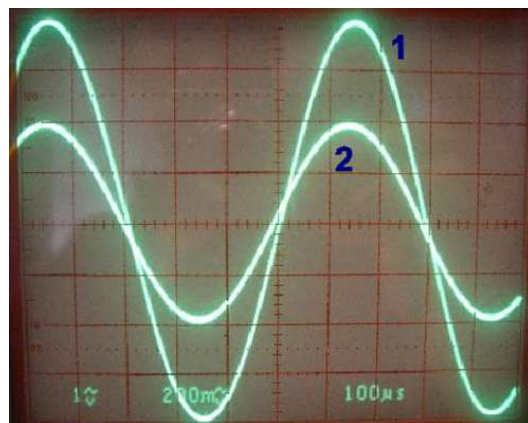
Aufgabe 2.3: Sonstige Kombinationen

In dieser Aufgabe haben wir einige zusätzliche Kombinationen ausprobiert, um zu schauen, ob sich die speziellen Eigenschaften des Hoch- und Tiefpasses auch für andere Eingangssignale bestätigen. Zunächst wollten wir mit unserer Nachbargruppe prüfen, ob ein in Reihe geschaltetes Differenzier- und Integrierglied dieselbe Ausgangssignalform liefert wie das Eingangssignal, das wir eingespeist haben. Dabei haben wir allerdings gemerkt, dass die Dämpfung durch diese Schaltungen zu stark war, als dass man noch ein vernünftiges Ausgangssignal erhalten würde. Auf dem Oszilloskop war so nur unspezifisches Rauschen zu erkennen.

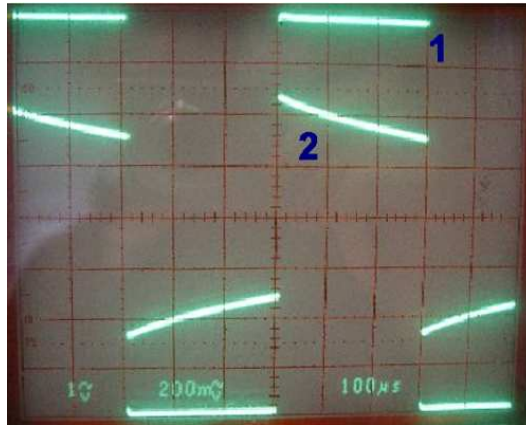
Nachfolgend noch einige zusätzliche Signalformen, die wir ausprobiert haben. Dabei wurde stets ein solcher Widerstand gewählt, der die bestmöglichen Differenzier- und Integrierergebnisse lieferte. Auch in diesen Bildern bezeichnet eine 1 immer das Eingangs- und eine 2 das Ausgangssignal.

Hochpass

Wir haben das Differenzierglied zunächst mit einer sinusförmigen Wechselspannung betrieben. Wie man auf dem Bild erkennen kann, ergibt sich wieder eine harmonische Funktion. Diese ist nach rechnerischer Herleitung ein Cosinus, was sich allerdings auf dem Oszilloskop nur bedingt unterscheiden lässt.

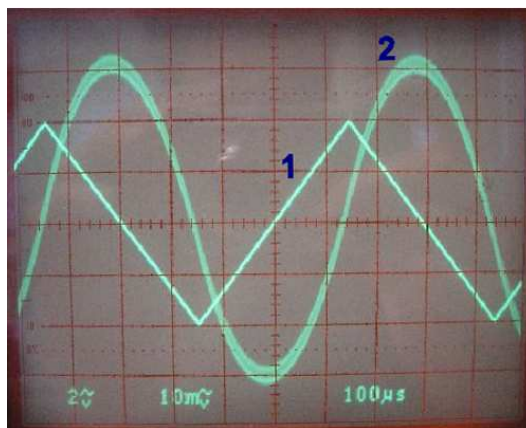


Anschließend haben wir als Eingangssignal eine Rechteckspannung ausprobiert. Dabei ergab sich die unten erkennbare Ausgangssignalform. Rein rechnerisch müssten sich Delta-Funktionen ergeben, also Peaks an Stellen des Amplitudensprungs. Aufgrund der Dämpfung und Induktivität des Systems fallen diese Peaks allerdings viel flacher ab.

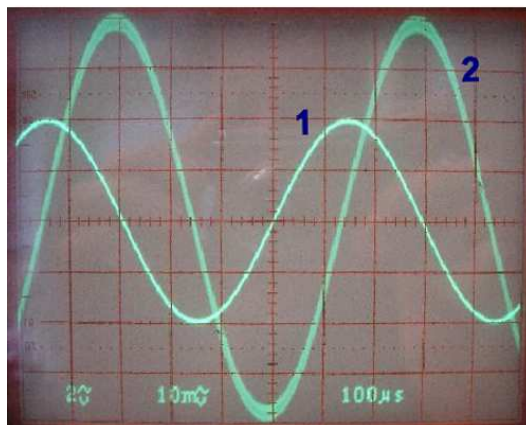


Tiefpass

Das Integrierglied wurde von uns zunächst mit einer Dreiecksspannung betrieben. Dabei bildeten sich Parabeln aus, wie es nach mathematischer Herleitung auch sein muss.



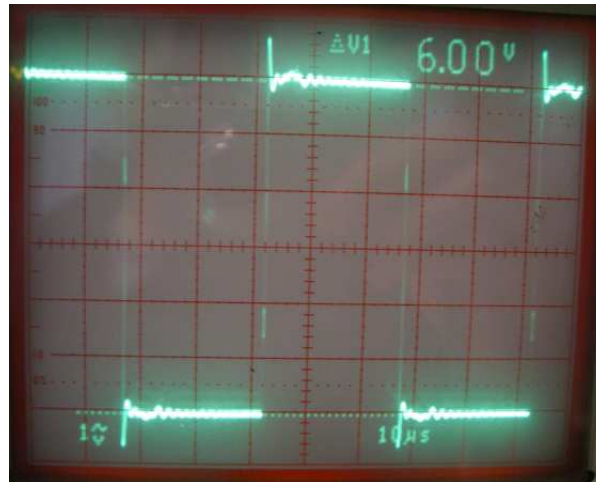
Im Anschluss daran haben wir noch eine Sinusspannung an den Tiefpass angelegt. Dies ergab als Ausgangssignal einen phasenverschobenen Cosinus, wie es zu erwarten war.



Aufgabe 3: Drosselkette

3.1 charakteristischer Widerstand Z_0

Zur Bestimmung des charakteristischen Widerstandes Z_0 wurde eine rechteckförmige Wechselspannung ($f \cong 20\text{kHz}$; $U_e \cong 6V_{SS}$) angelegt. Ein regelbarer Widerstand Z_A am Ende der Kette wurde so eingestellt, dass am Kabelanfang ein fast unverfälschtes Rechtecksignal ohne Reflexionen des Kettenendes zu sehen war.



Z_A entspricht nun genau dem gesuchten charakteristischen Widerstand Z_0 . Da der Regler des Widerstandes nicht genau abzulesen war und es eher einen Bereich als einen genauen Wert gab, bei dem die Reflexion minimal war, erhalten wir nur einen ungefähren Wert für Z_0 :

$$Z_0 \approx 210\Omega$$

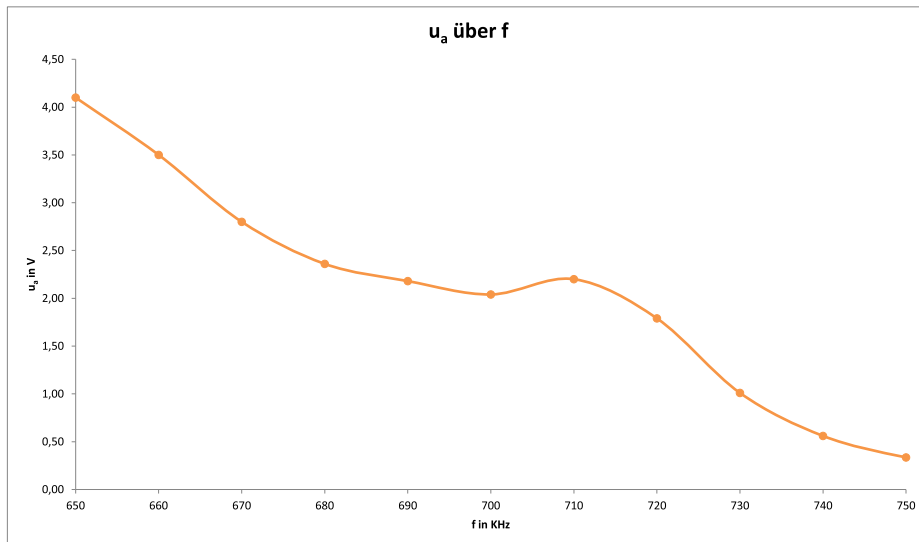
Der theoretische Wert liegt nach der Formel aus der Vorbereitung bei:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 96\mu H}{6 \cdot 2nF}} = 219\Omega$$

Wobei hier angenommen wurde, dass ($\omega \ll \omega_0$) gilt. Die Werte für $L = 96\mu H$ und $C = 2nF$ entnehmen wir der Versuchsanleitung.

3.2 Grenzfrequenz f_0

Um die Grenzfrequenz f_0 der Drosselkette zu bestimmen, legten wir sinusförmige Wechselspannungen mit Frequenzen von 650 bis 770 kHz an und beobachteten u_a am Oszilloskop.



f in kHz	u_a in V
650	4,10
660	3,50
670	2,80
680	2,36
690	2,18
700	2,04
710	2,20
720	1,79
730	1,01
740	0,56
750	0,34
760	0,20
770	0,13

Wie im Graphen zu sehen ist, änderte sich u_a etwa bei der Frequenz $f = 725\text{kHz}$ am stärksten. Wir vermuten dort also die Grenzfrequenz f_0 . Z_A ließen wir konstant, da durch das Verändern ein größerer Fehler entstehen würde, als der, den wir verhindern würden.

Der theoretische Wert kann folgendermaßen berechnet werden:

$$f_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}} = 726\text{kHz}$$

Unser gemessener Wert liegt ziemlich nahe am theoretischen Wert, allerdings ist das Ablesen der stärksten Steigung alles andere als genau.

3.3 Kapazität C und Induktivität L

Aus den Messdaten berechnen wir nun die Kapazität C und Induktivität L der verwendeten Kondensatoren und Spulen.

$$C = \frac{1}{\pi f_0 Z_0} = 2,09\text{ nF}$$

$$L = \frac{Z_0}{\pi f_0} = 92,2\text{ }\mu\text{H}$$

Die in der Versuchsanleitung angegebenen Werte sind $C = 2\text{ nF}$ und $L = 96\text{ }\mu\text{H}$. Unsere gemessenen Werte liegen daher sehr nahe an den angegebenen Werten.

3.4 Phasenverschiebung

Um die Phasenverschiebung zu bestimmen, wurde sinusförmige Wechselspannung mit den Frequenzen $f = 10/100/300/500/500/650/690 \text{ kHz}$ verwendet. Wir führten die Messungen ein mal mit der gesamten Kette und einmal mit nur einem π -Glied durch. Bei jeder Frequenz haben wir die zeitliche Verschiebung Δt zwischen Eingangs- und Ausgangssignal gemessen. Δt wird entsprechend der Formel aus der Vorbereitung nach $\Delta \varphi$ umgerechnet, auch die Formeln für den theoretischen Wert von $\Delta \varphi$ findet sich dort wieder. Die angegebenen Δt_K Werte entsprechen den bereits korrigierten Werten, die teilweise um einer oder zwei Periodendauern T erhöht wurden, da hier die Phasenverschiebung über 2π bzw. 4π lag.

Alle gemessenen und berechneten Werte sind in folgender Tabelle zu sehen:

f in kHz	Δt_π in μs	Δt_K in μs	$\Delta t_K / \Delta t_\pi$	Mittelwert $\Delta t_K / \Delta t_\pi$
10	0,000	2,200	-	6,29
100	0,390	2,555	6,551	
300	0,484	2,704	5,587	
500	0,493	2,857	5,795	
600	0,487	2,984	6,127	
650	0,471	3,214	6,823	
690	0,489	3,344	6,838	

$\Delta \Phi_\pi$ in rad	$\Delta \Phi_{\pi, \text{theor}}$ in rad	$\Delta \Phi_K$ in rad	$\Delta \Phi_{K, \text{theor}}$ in rad
0,000	0,028	0,138	0,166
0,245	0,277	1,605	1,660
0,912	0,853	5,097	5,119
1,549	1,522	8,976	9,132
1,836	1,950	11,248	11,698
1,924	2,224	13,124	13,343
2,120	2,518	14,496	15,106

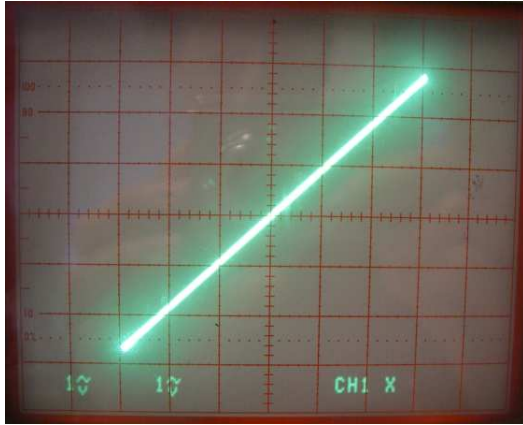
Im Schnitt ist die Phasenverschiebung bei der Kette also 6,29 mal so groß wie bei einem einzigen π -Glied. Die Abweichung vom theoretischen Wert (6,00) beträgt 4,8%. Dies wird wahrscheinlich daran liegen, dass alle verwendeten Bauteile gewisse Verluste und Reflexionen aufweisen.

Nun sollte die Grenzfrequenz f_0 erneut bestimmt werden. Wir erzeugten dazu Phasenverschiebungen von π , 2π , 3π , 4π und 5π bei der 6-gliedrigen Kette. Wir verwendeten den x-y-Modus des Oszilloskops um die Signale der beiden Kanäle gegeneinander aufzutragen. Dabei entstanden sogenannte Lissajous-Figuren. Weiter hinten sind vier dieser Figuren mit ihren jeweiligen Phasenverschiebungen dargestellt.

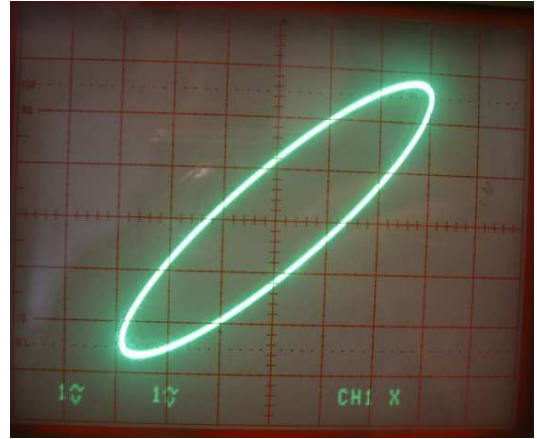
Unsere gemessenen Werte:

$\Delta \Phi_K$ in π	$\Delta \Phi_K$ in rad	f in kHz	f_0 in kHz	Mittelwert f_0 in kHz
1	3,142	191	737,97	738,1
2	6,283	370	740,00	
3	9,425	517	731,15	
4	12,566	642	741,32	
5	15,708	715	740,22	

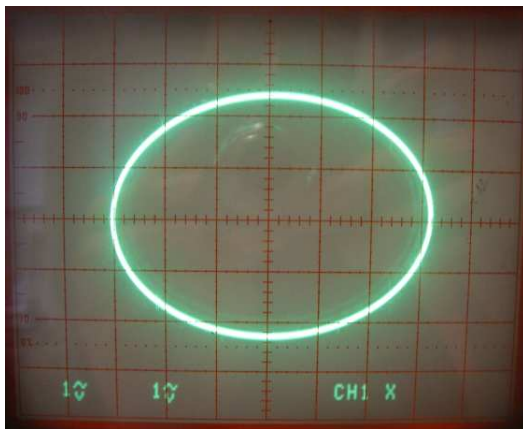
Wir konnten f_0 nun für jede Phasenverschiebung berechnen (Formel siehe Vorbereitung) und haben aus den einzelnen Werten den Mittelwert gebildet. Damit ergibt sich unser f_0 aus der zweiten Messung zu $f_0 = 738 \text{ kHz}$. Die Abweichung zum theoretischen Wert beträgt nun 1,7%.



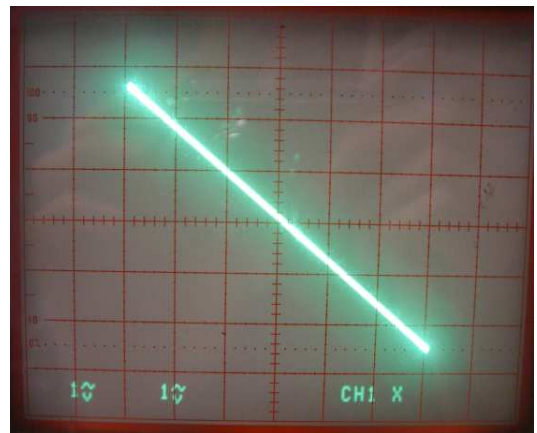
(a) $\Delta\varphi = 0\pi$ oder 2π



(b) $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$



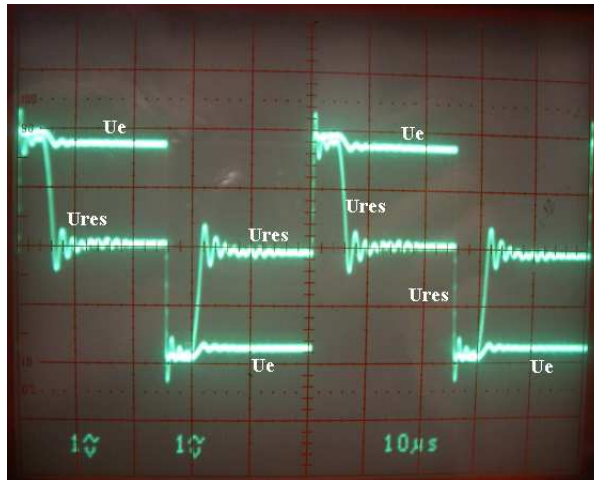
(c) $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$



(d) $\Delta\varphi = 1\pi$

3.5 Reflexion am Kettenende

Bei dieser Aufgabe sollte Reflexion am Kettenende erzwungen werden. Dies erreichten wir durch das setzen von $Z_A = 0$ und durch Verwenden eines 200Ω Widerstandes am Kettenanfang. Wir verwendeten eine rechteckförmige Wechselspannung mit $f = 20kHz$ und beobachteten das Signal am Kettenanfang. Wir erwarteten ein schmales Rechtecksignal am Kettenanfang mit längeren Nullphasen, da durch die Reflexion mit umgekehrter Amplitude destruktive Interferenz auftritt, wegen der Signalverzögerung die Phasen aber nicht komplett deckungsgleich sind und sich daher nicht vollständig auslöschen. Das resultierende Signal sah folgendermaßen aus:



Aufgabe 4

4.1 charakteristischer Widerstand Z_0

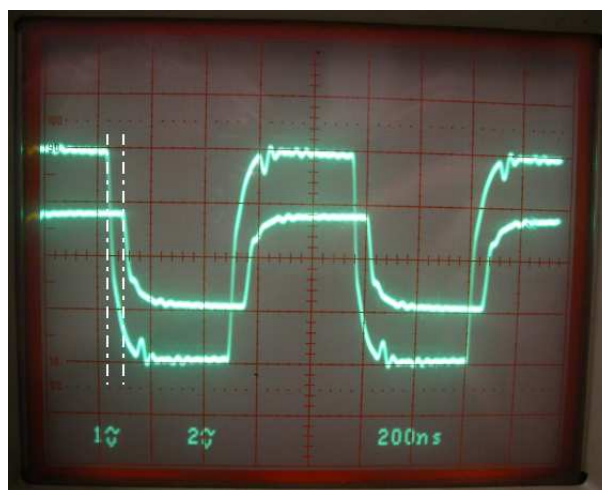
Es sollte analog zur Aufgabe 3.1 der charakteristische Widerstand Z_0 eines Koaxialkabels bestimmt werden. Dabei wurde eine rechteckförmige Wechselspannung mit $f \approx 1,1 MHz$ verwendet und ein regelbarer Widerstand Z_A am Ende des Kabels angeschlossen. Dieser wurde so eingestellt, dass das Signal am Eingang des Kabels möglichst einer Rechteckwechselspannung entsprach, also nicht durch Reflexionen am Kabelende gestört wurde. Wir haben so den Wert

$$Z_0 = 52\Omega$$

bestimmt. Dieser Wert liegt innerhalb des von uns erwarteten Bereichs und ist typisch für in der Praxis verwendete Koaxialkabel.

4.2 Verzögerungszeit τ' - Methode 1

Bei Messmethode 1 beobachteten wir gleichzeitig die rechteckige Eingangs- sowie Ausgangsspannung am Oszilloskop.

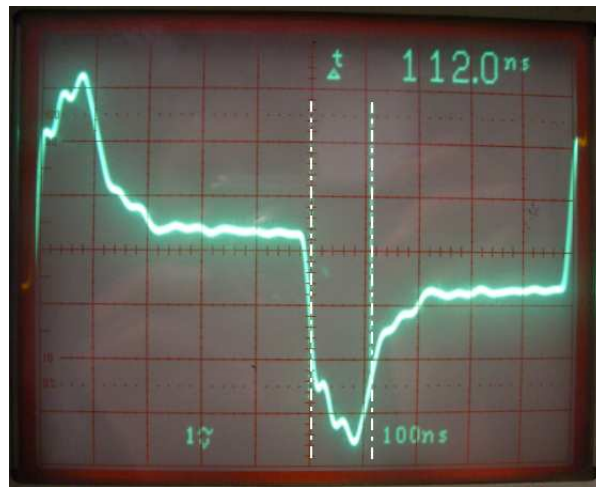


Wie in dem Bild zu sehen ist, sind die beiden Signale zeitlich verschoben um $\tau = 53,5ns$. Nun kann mit der Kabellänge ($l = 10,0m$) τ' bestimmt werden:

$$\tau' = \frac{\tau}{l} = \frac{53,5ns}{10m} = 5,35 \frac{ns}{m}$$

4.3 Verzögerungszeit τ' - Methode 2

Bei dieser Messmethode wurde $Z_A = 0$ gesetzt und so ein Kurzschluss erzeugt. Dadurch wird die Welle am Ende des Kabels mit umgekehrter Amplitude reflektiert und es kommt zu destruktiver Interferenz (ähnlich wie in Aufgabe 3.5). Wir beobachteten das Signal am Anfang des Kabels. Wegen der Verzögerung der reflektierten Welle kam es nur teilweise zur Auslöschung der Hin- und Rücklaufenden Wellen.



Wir haben die Verzögerungszeit $\tau = 112ns$ des gesamten Kabels, wie in der Abbildung markiert, bestimmt. Dieser Wert wird nun nach τ' umgerechnet:

$$\tau' = \frac{\tau}{2l} = \frac{112ns}{2 \cdot 10m} = 5,60 \frac{ns}{m}$$

4.4 relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r

Nun wird über drei verschiedene Wege die relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r bestimmt.

Dabei wurden folgende Werte aus der Versuchsanleitung verwendet:

$l = 10,0m$; $C = 925pF$; $r_i = 0,5mm$; $r_a = 1,75mm$

(i) über die Kabelgeometrie

$$\epsilon_r(C, r_i, r_a) = \frac{C}{2\pi l \epsilon_0} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) = \frac{925pF}{2\pi \cdot 8,864 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 10m} \ln\left(\frac{1,75mm}{0,5mm}\right) = 2,08$$

(ii) mit τ'

$$\epsilon_r(\tau') = \frac{c^2 \tau'^2}{\mu_r} = \frac{\left(3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot \left(5,48 \frac{ns}{m}\right)}{1} = 2,70$$

Hier wurde für $\tau' = 5,48 \frac{ns}{m}$ der Mittelwert aus Aufgabe 4.2 und 4.3 gewählt.

(iii) mit Z_0

$$\begin{aligned}\epsilon_r(Z_0, r_i, r_a) &= \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi^2 Z_0^2 \epsilon_0} \left(\ln \frac{r_a}{r_i} \right)^2 \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \cdot 1}{4\pi^2 \cdot (52\Omega)^2 \cdot 8,864 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}} \left(\ln \frac{1,75mm}{0,5mm} \right)^2 = 2,08\end{aligned}$$

Die Berechnung von ϵ_r über τ' zeigt eine große Abweichung zu dem Wert, der aus der Kabelgeometrie berechnet wurde. Wir nehmen an, dass dabei die große Messungenauigkeit von τ verantwortlich ist. Es war nicht immer klar ersichtlich, wie der Bereich im Graphen des Oszilloskops zu legen ist.