

Vorbereitung: Vierpole und Leitungen

Marcel Köpke
Gruppe 7

27.11.2011

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1	3
1.1 Vierpole	3
1.2 RC-Spannungsteiler	3
1.2.1 Hochpass	3
1.2.2 Tiefpass	4
2 Aufgabe 2	6
2.1 Differenzierglied	6
2.2 Integrierglied	6
3 Aufgabe 3	7
3.1 Charakteristischer Widerstand	7
3.2 Grenzfrequenz	7
3.3 Kapazität und Induktivität	8
3.4 Phasenverschiebung	8
3.5 Reflexion am Kettenende	8
4 Aufgabe 4	10
4.1 Charakteristischer Widerstand	10
4.2 Verzögerungszeit	10
4.3 Reflexion	10
4.4 Relative Dielektrizitätskonstante	10

1 Aufgabe 1

1.1 Vierpole

Vierpole sind allgemein elektronische Bauteile, die je zwei paare von Anschlussklemmen besitzen (also insgesamt 4). Der innere Aufbau kann dabei von Vierpol zu Vierpol sehr unterschiedlich sein. Vierpole führen also eine bestimmte Funktion in einen Schaltkreis aus.

1.2 RC-Spannungsteiler

Ein RC-Spannungsteiler ist ein linearer Vierpol bestehend aus Widerstand und Kondensator. Dabei lassen sich im engeren Sinne zwei Arten unterscheiden:

- Hochpass
- Tiefpass

Im folgenden werden diese näher beschrieben.

1.2.1 Hochpass

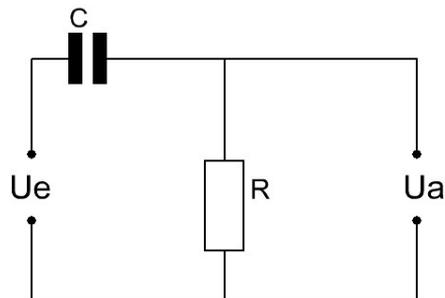


Abbildung 1.1: Hochpass

Abbildung 1.1 zeigt das Schaltbild eines Hochpasses. Die Spannungen an den Eingangs- bzw. Ausgangsklemmen seien jeweils mit U_e und U_a bezeichnet.

Im Versuch kommt eine sinus-förmige Spannung an den Eingangsklemmen zum Einsatz. Durch Aufstellen der Differentialgleichung für Strom bzw. Spannung und Einsetzen eines komplexen-Ansatzes kommt leicht folgender Zusammenhang zustande:

$$U_a = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} U_e$$

$$\|U_a\| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \|U_e\|$$

mit ω der Kreisfrequenz der angelegten Spannung. Damit gilt dann auch:

$$\left\| \frac{U_a}{U_e} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}}$$

wobei $f = \frac{\omega}{2\pi}$ und $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$ gilt.

Die Spannung fällt am Kondensator ab. Die Impedanz des Kondensators ist gegeben durch:

$$Z = \frac{1}{i\omega C}$$

Man sieht leicht, dass mit wachsender Frequenz die Impedanz immer kleiner wird. Für kleine Frequenzen ist die Impedanz und damit auch der Spannungsabfall jedoch groß. Mit einem Hochpass kann man also niederfrequente Signale unterdrücken!

Für die Phasenverschiebung des Ausgangssignals gilt:

$$\tan \varphi = \frac{1}{\omega RC}$$

Für hohe Frequenzen ergibt sich kaum eine Phasenverschiebung (das Signal bleibt ungestört), für kleine strebt sie jedoch gegen $\frac{\pi}{2}$.

Im Versuch wird die Spannung mit einem Oszilloskop gemessen. Dabei wird der Tastkopf verwendet um den Messfehler möglichst gering zu halten, da der Widerstand desselbigen vergleichsweise hoch ist.

1.2.2 Tiefpass

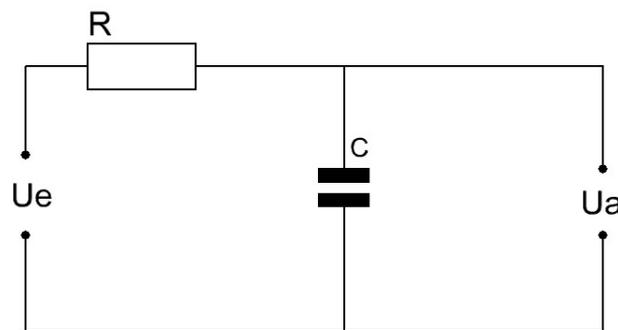


Abbildung 1.2: Tiefpass

Im Gegensatz zum Hochpass wird die Spannung hier am Kondensator abgenommen, sodass sich ein anderes Verhalten einstellt. Die Impedanz der Schaltung ist für hohe Frequenzen am größten, sodass also hochfrequente Signale unterdrückt werden können! Analog findet man:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{U_a}{U_e}\right\| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}} \\ \tan \varphi &= -\omega RC\end{aligned}$$

Für niedrige Frequenzen ist die Phasenverschiebung also klein (das Signal bleibt ungestört), für hohe jedoch strebt sie gegen $-\frac{\pi}{2}$. Auch strebt die Ausgangsspannung für hohe Eingangsfrequenzen wie erwartet gegen Null.

2 Aufgabe 2

Ein Hochpass bzw. Tiefpass kann unter bestimmten Voraussetzungen als Differenzier- bzw. Integrierglied verwendet werden.

2.1 Differenzierglied

Im Versuch wird eine Dreiecksspannung an den Hochpass angelegt. Gilt $\frac{f}{f_0} \ll 1$ so folgt der Zusammenhang:

$$U_a = R \frac{dQ}{dt} \approx RC \frac{dU_e}{dt}$$

Die Ausgangsspannung ist also proportional zur Zeitableitung der Eingangsspannung. Daher der Name «Differenzierglied». Für zu hohe Frequenzen gilt diese Näherung nicht mehr, da der Kondensatorstrom zu groß wird.

Im Versuch sollte also eine Rechtecksspannung am Ausgang zu sehen sein.

2.2 Integrierglied

Im Versuch wird eine Rechtecksspannung an den Tiefpass angelegt. Gilt $\frac{f}{f_0} \gg 1$ so folgt:

$$U_a = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I \cdot dt = \frac{1}{RC} \int (U_e - U_a) \cdot dt$$

Man sollte also entsprechend eine Dreiecksspannung am Ausgang sehen können.

3 Aufgabe 3

In diesem Versuch geht es um Drosselketten. Eine Drosselkette ist eine Hintereinanderschaltung vieler LC-Vierpole. Abbildung 3.1 zeigt eine solche Drosselkette.

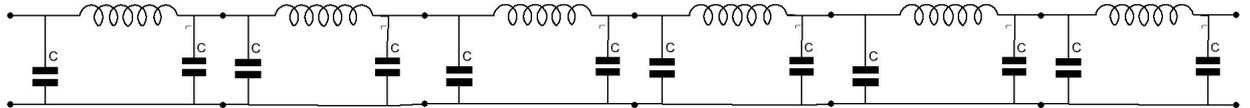


Abbildung 3.1: Drosselkette

3.1 Charakteristischer Widerstand

Im Versuch soll der charakteristische Widerstand Z_0 einer 6 gliedrigen Drosselkette bestimmt werden. Dazu wird ein einstellbarer Abschlusswiderstand Z_A am Ende der Kette angeschlossen und eine Rechteckspannung angelegt. Nun stellt man Z_A so ein, dass möglichst keine Reflexion am Ende der Kette auftritt, sodass die Rechteckspannung unverändert bleibt. Der eingestellte Widerstand ist dann der gesuchte charakteristische Widerstand Z_0 .

Für Z_0 gilt:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$$

wobei $f_0 = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{LC}}$ ist. Die Näherung gilt für $\frac{f}{f_0} \ll 1$.

3.2 Grenzfrequenz

Die Grenzfrequenz f_0 ist theoretisch:

$$f_0 = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{LC}}$$

Zur Bestimmung wird nun allerdings eine sinusförmige Spannung an die Drosselkette angelegt und der Abschlusswiderstand auf Z_0 eingestellt. Man beobachtet nun die Ausgangsspannung an Z_A für steigende Frequenzen. Dabei muss Z_A natürlich immer wieder auf Z_0 nachgeregelt werden, da dieser Frequenzabhängig ist. Die Grenzfrequenz f_0 liegt in einem Bereich bei dem sich das Verhältnis $\frac{U_a}{U_e}$ stark mit der Frequenz ändert.

3.3 Kapazität und Induktivität

Für $\frac{f}{f_0} \ll 1$ gilt:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$
$$f_0 = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{LC}}$$

Damit folgt dann:

$$C = \frac{1}{\pi Z_0 f_0}$$
$$L = \frac{Z_0}{\pi f_0}$$

3.4 Phasenverschiebung

Um die Phasenverschiebung zwischen Eingangss- und Ausgangssignal zu messen wird ein Zweikanal-Oszilloskop verwendet. Bei n Gliedern ist die n -fache Phasenverschiebung eines einzelnen Glieds zu erwarten:

$$\varphi = 2n \cdot \arcsin \frac{f}{f_0}$$

bzw.

$$f = f_0 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2n}\right)$$

Trägt man also f gegen $\sin\left(\frac{\varphi}{2n}\right)$ auf, so erhält man aus der Steigung der resultierenden Gerade f_0 .

Noch anzumerken ist, dass die Phasenverschiebung am Oszilloskop in Sekunden gemessen wird. Die Umrechnung in Bogenmaß erfolgt dann nach:

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{\Delta t}{T} = \omega \cdot \Delta t$$

3.5 Reflexion am Kettenende

Man stellt nun $Z_A = 0\Omega$ ein und legt eine Rechteckspannung mit $f = 20kHz$ an. Da $Z_A \neq Z_0$ gewählt wurde, kommt es zu Reflexionseffekten am Kettenende. Das Eingangs- und Reflexionssignal werden miteinander interferieren. Jedoch ist es stark abhängig von der Länge (Stichwort: stehende Welle) und dem Dämpfungsfaktor der Kette welche Form das resultierende Signal tatsächlich haben wird. Zudem kann es noch zu Reflexion zwischen den Kettengliedern kommen, sodass eine gestörte Rechteckspannung zu erwarten ist. Eine einfache Idee ist in Abbildung 3.2 zu sehen.

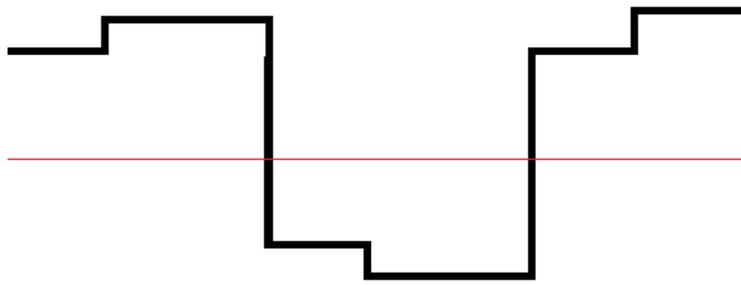


Abbildung 3.2: mögliche Spannungs-Form

4 Aufgabe 4

In diesem Abschnitt geht es um das Koaxialkabel und seine theoretische Beschreibung. Das Koaxialkabel ist eine homogene Leitung und kann als Hintereinanderschaltung von unendlich vielen infinitesimal kleinen Vierpolen gesehen werden. Da Kapazität und Induktivität längenabhängig sind werden $L' = \frac{L}{l}$ und $C' = \frac{C}{l}$ angegeben.

4.1 Charakteristischer Widerstand

Der charakteristische Widerstand Z_0 wird analog zum Versuch 3.1 bestimmt. Da kaum Verluste auftreten kann Z_0 als dispersionslos angesehen werden.

4.2 Verzögerungszeit

Für die Verzögerungszeit τ' gilt:

$$\tau' = \frac{1}{v} = \frac{\Delta t}{l}$$

Die Phasenverschiebung Δt wird analog zu Versuch 3.4 bestimmt. Bei bekannter Kabellänge l ergibt sich dann die Verzögerungszeit.

4.3 Reflexion

Auch hier kann durch kurzschließen der Kabelenden Reflexion beobachtet werden. Da das Signal zweimal die Kabellänge durchläuft bevor es wieder am Eingang ankommt gilt hier:

$$\tau' = \frac{\Delta t}{2l}$$

4.4 Relative Dielektrizitätskonstante

Allgemein gilt:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

Damit folgt:

$$\epsilon_r = \frac{\tau'^2 c^2}{\mu_r}$$

Mit dieser Formel lässt sich ϵ_r mit den Werten aus Versuch 4.2 und 4.3 berechnen.

Für den charakteristischen Widerstand gilt für $\frac{f}{f_0} \ll 1$:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

mit $L' = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$ und $C' = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$ folgt:

$$\epsilon_r = \frac{\mu_0^2 \mu_r c^2}{4\pi^2 Z_0^2} \ln^2\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

Damit bestimmt sich ϵ_r aus den Messwerten von Versuch 4.1.

Auswertung: Vierpole und Leitungen

Marcel Köpke & Axel Müller

28.11.2011

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1	3
1.1 Hochpass	3
1.2 Tiefpass	4
2 Aufgabe 2	6
2.1 Differenzierglied	6
2.2 Integrierglied	7
2.3 Weitere Einstellungen	8
3 Aufgabe 3	9
3.1 Charakteristischer Widerstand der Drosselkette	9
3.2 Grenzfrequenz	9
3.3 Kapazität und Induktivität	10
3.4 Phasenverschiebung	10
3.5 Signalform nach Reflexion	11
4 Aufgabe 4	13
4.1 Charakteristischer Widerstand des Koaxialkabels	13
4.2 Verzögerungszeit	13
4.3 Reflexion	13
4.4 Relative Dielektrizitätskonstante	13

1 Aufgabe 1

1.1 Hochpass

Wie in der Aufgabenstellung beschrieben, haben wir die Schaltung aufgebaut und bei verschiedenen Widerständen die Ausgangsspannung gemessen. Mit $\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}}}$

und $\tan\Delta\Phi = \frac{1}{\omega RC}$ lassen sich das Abschwächungsverhältnis und die Phasenverschiebung berechnen. Es ergaben sich folgende Werte:

Widerstand R [$k\Omega$]	1	10	100	1000
Abschwächungsverhältnis $\frac{U_a}{U_e}$	0,0115	0,0956	0,67	0,945
theoretischer Wert	0,0107	0,1062	0,7300	0,9956
Phasenverschiebung $\Delta\Phi$ [deg]	89,35	84,15	44,98	8,32
theoretischer Wert	89,39	83,90	43,11	5,35

Tabelle 1.1: Aufgabe 1

Trägt man die Werte über $\log(\frac{f}{f_0}) = \log(\omega RC)$ auf, ergeben sich folgende Schaubilder:

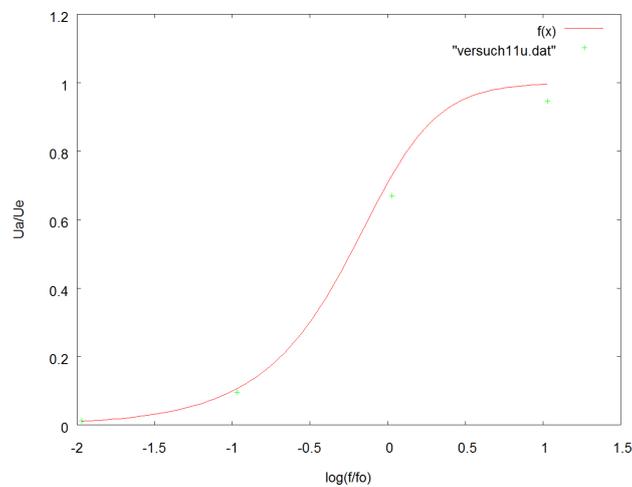


Abbildung 1.1: Abschwächungsverhältnis

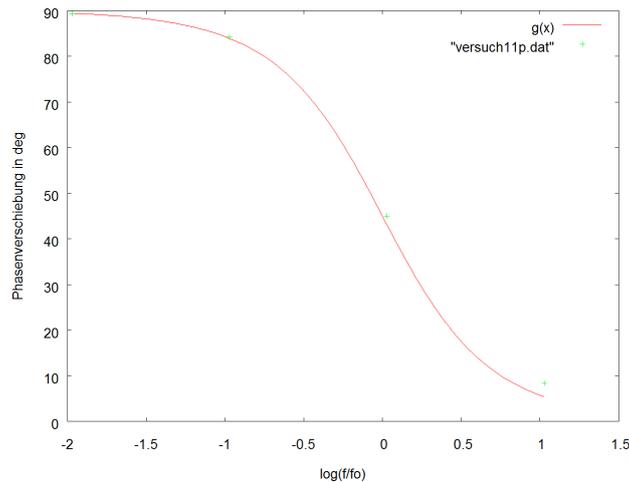


Abbildung 1.2: Phasenverschiebung

Dabei stellen die grünen Punkte die Messergebnisse und die roten Kurven den theoretischen Verlauf dar. Unsere gemessenen Daten weichen also nicht stark von der Theorie ab. Man sieht, dass der Hochpass Spannungen mit kleiner Frequenz stark dämpft und dort die Phasenverschiebung gegen 90° geht. Anzumerken ist noch, dass wir bei konstanter Frequenz und variablem Widerstand gemessen hatten. Dies ist aber äquivalent zu einer Messung mit konstantem Widerstand und variabler Frequenz, da beide Größen in den Formeln äquivalente Stellungen haben.

1.2 Tiefpass

Analog zu 1.1 wurde die Schaltung aufgebaut, wobei nun der Widerstand und der Kondensator vertauscht wurden. Wir ermitteln wiederum das Abschwächungsverhältnis und die Phasenverschiebung. Dafür ergaben sich folgende Werte:

Widerstand R [$k\Omega$]	1	10	100	1000
Abschwächungsverhältnis $\frac{U_a}{U_e}$	1	0,9625	0,6850	0,0969
theoretischer Wert	0,9999	0,9943	0,6834	0,0932
Phasenverschiebung $\Delta\Phi$ [deg]	0	-7,34	-44,43	-84,21
theoretischer Wert	-0,61	-6,10	-46,89	-84,65

Tabelle 1.2: Aufgabe 2

Hierfür ergeben sich analog zu 1.1 folgende Schaubilder:

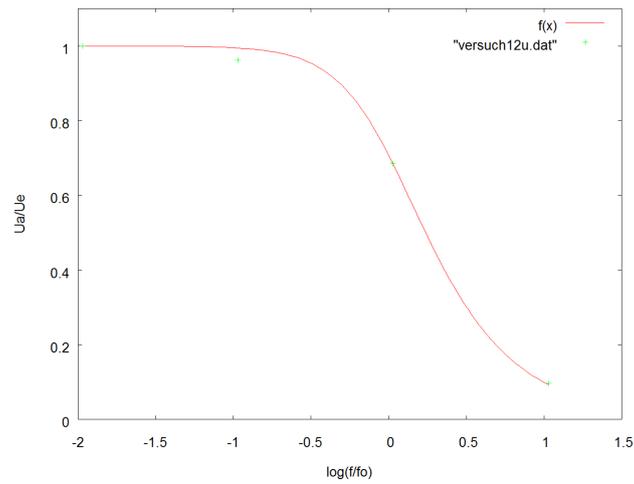


Abbildung 1.3: Abschwächungsverhältnis

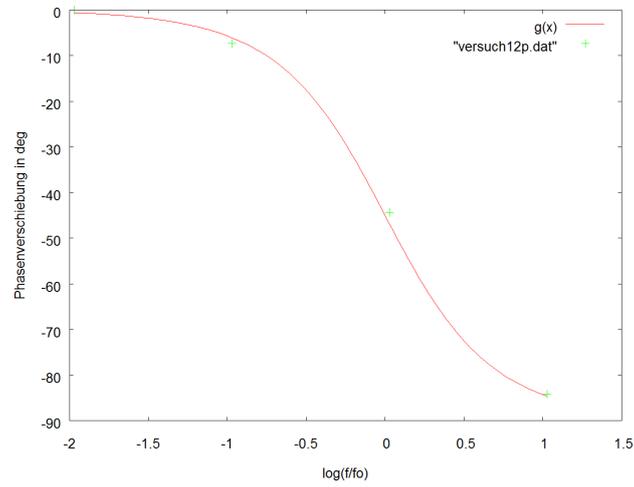


Abbildung 1.4: Phasenverschiebung

Die Kurven verlaufen wie erwartet: der Tiefpass dämpft die Spannungen mit hohen Frequenzen und weist dort eine hohe Phasenverschiebung auf.

2 Aufgabe 2

2.1 Differenzierglied

Für diesen Versuch legen wir eine Dreiecksspannung ($f = 1,7kHz$; $U_e = 8V_{ss}$) an den Hochpass an. Auch hier veränderten wir wieder anstatt der Frequenz, den Widerstand. Wie erwartet, ergaben sich nur für kleine Widerstände sinnvolle Kurven (siehe Bilder)

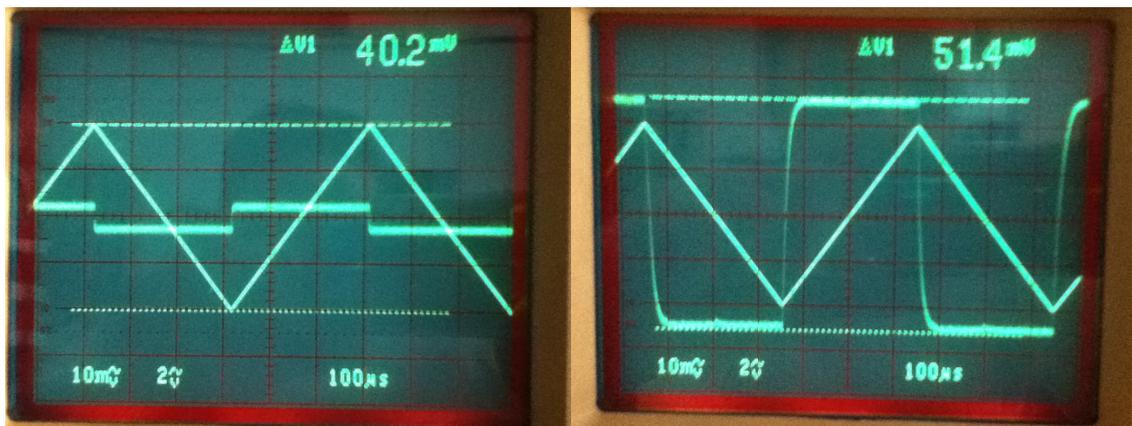


Abbildung 2.1: $1k\Omega/10k\Omega$

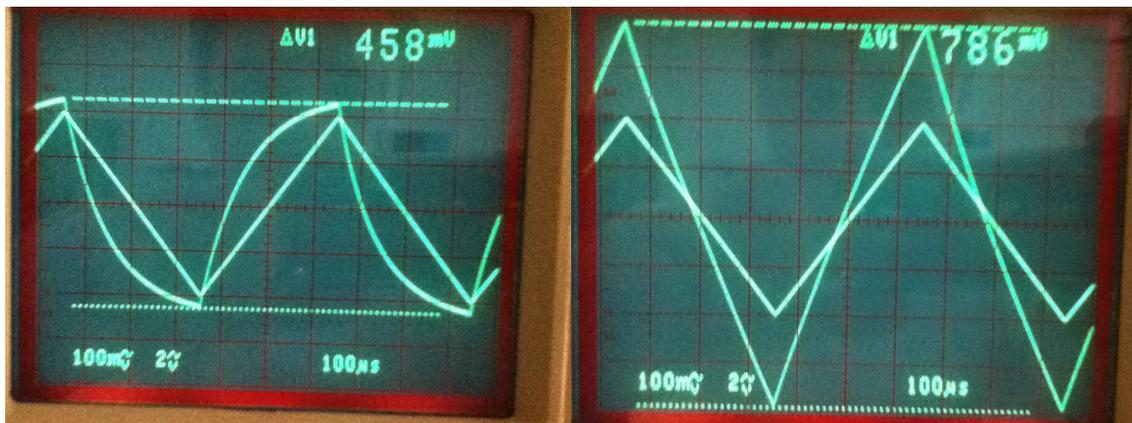


Abbildung 2.2: $100k\Omega/1M\Omega$

Für kleine Widerstände ergab sich also die Rechteckspannung, während für noch grö-

ßere Widerstände die Differenziereigenschaft verloren ging.

2.2 Integrierglied

Hier legten wir eine Rechteckspannung ($f = 1,7kHz$; $U_e = 8V_{ss}$) an einen Tiefpass an. Folgende Kurven ergaben sich analog zu 1.1:

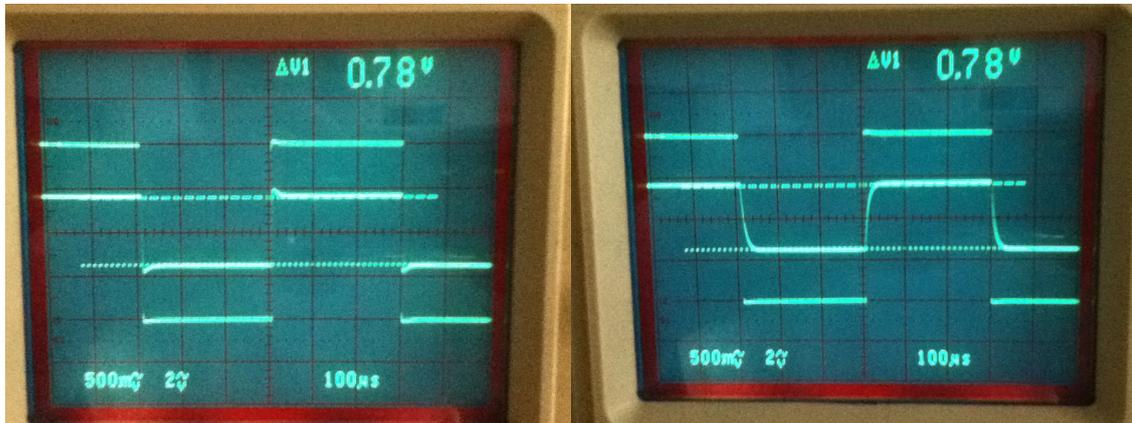


Abbildung 2.3: $1k\Omega/10k\Omega$

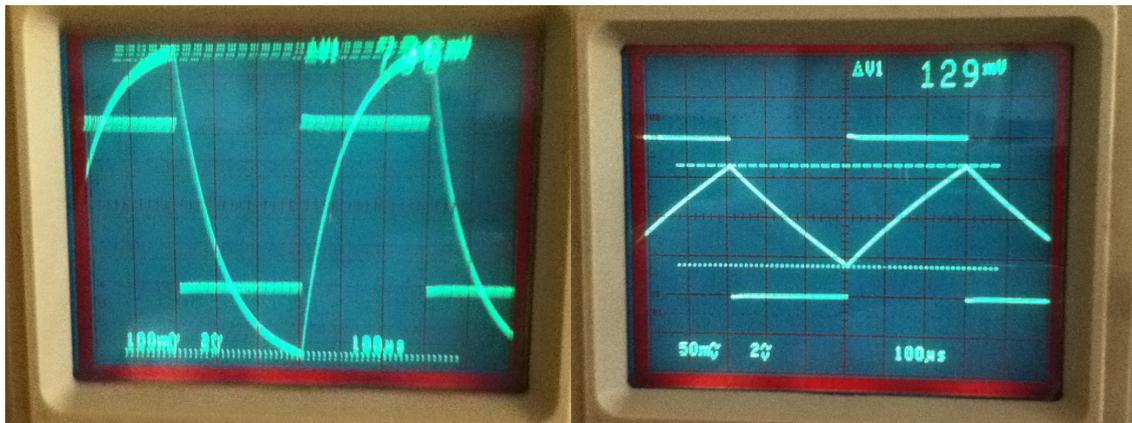


Abbildung 2.4: $100k\Omega/1M\Omega$

Für große Widerstände war die Integriereigenschaft gegeben, für kleine wirkte der Tiefpass nur wie ein Frequenzfilter.

2.3 Weitere Einstellungen

Legt man eine Dreiecksspannung ($f = 1,7kHz$) bei entsprechend groß gewähltem Widerstand ($1M\Omega$) an den Tiefpass an, ergibt sich eine Parabelspannung:



Abbildung 2.5: Dreiecksspannung an Tiefpass

Legt man nun die Rechtecksspannung ($f = 1,7kHz$) an den Hochpass ($R = 1k\Omega$) ergibt sich folgende Kurve:

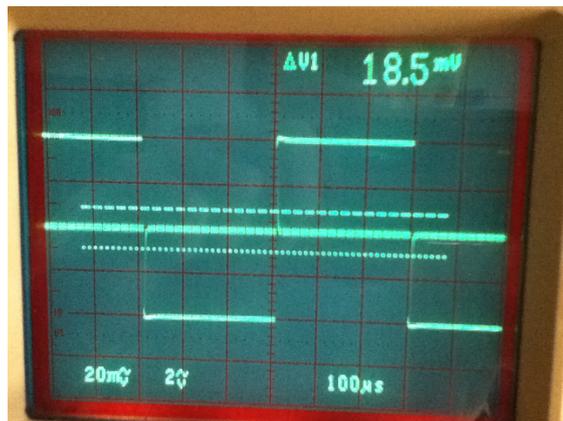


Abbildung 2.6: Rechtecksspannung an Hochpass

Wie erwartet ist die Spannung am Ausgang Null für die Plateaus der Rechtecksspannung, jedoch besitzt sie schmale Peaks an den Spannungswechseln.

Auch konnte man zeigen, dass durch Erhöhen der Frequenz der Hochpass seine Differenziereigenschaften verlor, bzw. der Tiefpass seine Integriereigenschaften bei kleinen Frequenzen nicht zeigte.

3 Aufgabe 3

3.1 Charakteristischer Widerstand der Drosselkette

Bei einem Abschlusswiderstand $Z_A = 225\Omega$ ergab sich das klarste Bild einer Rechteckspannung am Eingang. Das heißt, es trat so gut wie keine Reflexion auf. Damit ist der charakteristische Widerstand auf $Z_0 = Z_A = 225\Omega$ bestimmt. Wir maßen bei einer Frequenz $f = 20kHz$. Für die Grenzfrequenz ergibt sich ein theoretischer Wert $f_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}} = 726,44kHz$, sodass also $\frac{f}{f_0} \ll 1$ in guter Näherung galt. Damit sollte der charakteristische Widerstand bei $Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}} = 219,09\Omega$. Wir erhielten also experimentell einen annähernd guten Wert.

3.2 Grenzfrequenz

Um die Grenzfrequenz zu bestimmen, haben wir das Verhältnis $\frac{U_a}{U_e}$ in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen. Dabei ergab sich folgendes Schaubild:

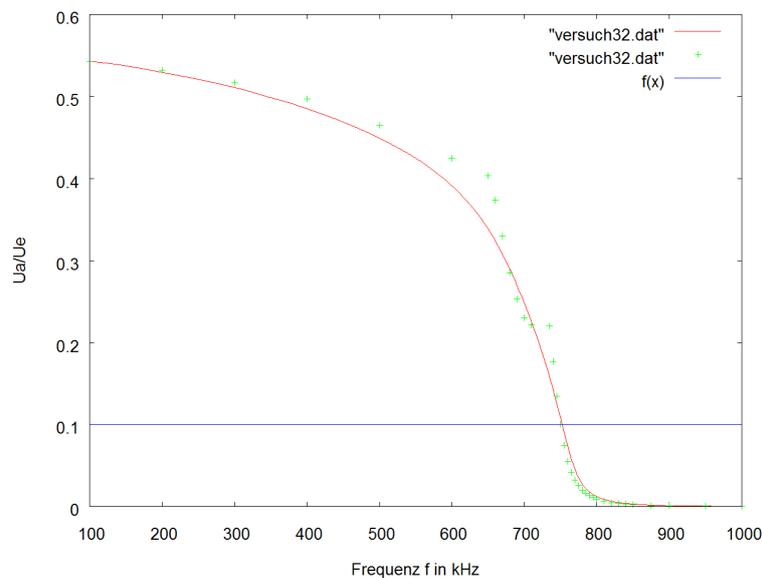


Abbildung 3.1: Grenzfrequenz

Die Grenzfrequenz ist diejenige Frequenz, bei der sich das Verhältnis $\frac{U_a}{U_e}$ am stärksten ändert. In der Aufgabenstellung war zudem angegeben, dass dies bei ungefähr $\frac{U_a}{U_e} =$

0,1 der Fall sein sollte. Dies bestätigt sich mit obigem Schaubild. Damit ergibt sich experimentell eine Grenzfrequenz von:

$$f_0 \approx 750kHz$$

Sie stimmt nicht ganz mit dem theoretischen Wert überein, weicht aber auch nur um etwa 3,3% davon ab.

3.3 Kapazität und Induktivität

Mit den Werten aus 3.1 und 3.2 ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} C &= 1,89nF \\ L &= 95,49\mu H \end{aligned}$$

Diese Werte liegen nahe bei den im Aufgabenblatt angegebenen Werten von $C = 2nF$ und $L = 96\mu H$.

3.4 Phasenverschiebung

Es wurde jeweils die Phasenverschiebung eines einzelnen Glieds und der gesamten Kette gemessen. Dabei ergab sich:

Frequenz f [kHz]	$\Delta\Phi_{Glieder}[rad]$	$\Delta\Phi_{Kette}[rad]$	$\sin\frac{\Delta\Phi_{Kette}}{2n}$
10	0,0421	0,1056	0,0088
100	0,3129	1,5821	0,1315
300	0,7917	4,9197	0,3986
500	1,4954	8,7022	0,6633
600	1,8774	11,1464	0,8009
650	2,0870	12,6544	0,8697
690	2,1980	13,9971	0,9193
190	—	π	0,2588
370	—	2π	0,5
530	—	3π	0,7071
646	—	4π	0,8660
730	—	5π	0,9659

Tabelle 3.1: Phasenverschiebung

Trägt man jetzt f über $\sin\frac{\Delta\Phi_{Kette}}{2n} = x$ auf, so erhält man aus der Steigung der Ausgleichsgeraden die Grenzfrequenz f_0 :

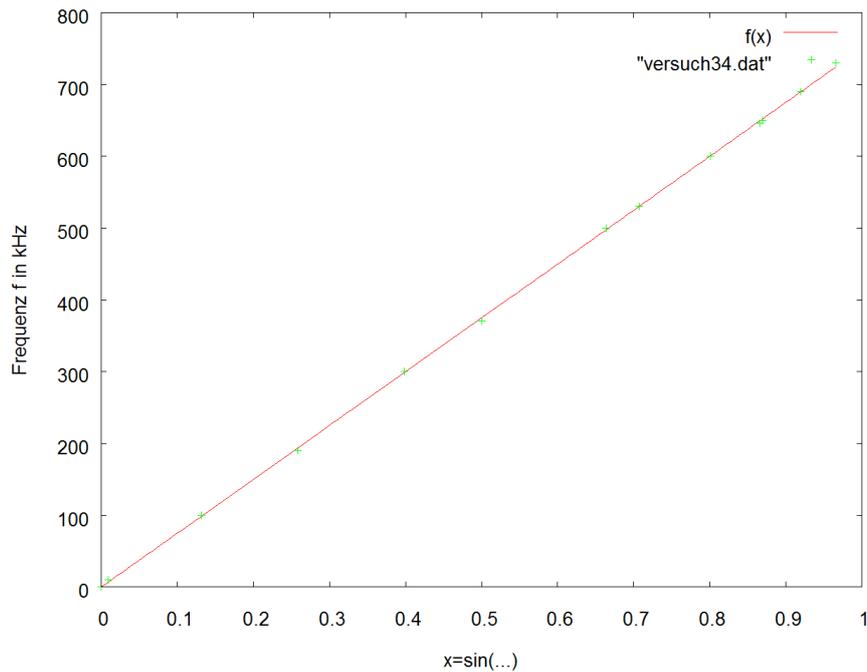


Abbildung 3.2: Ausgleichgerade

Damit ergibt sich eine Grenzfrequenz von:

$$f_0 = 749,78 \text{ kHz}$$

mit einem statistischen Fehler von 0,1759%. Dieser Wert liegt sehr nahe bei dem zuvor bestimmten. Im Schnitt liegt das Verhältnis $\frac{\Delta\Phi_{Kette}}{\Delta\Phi_{Glieder}}$ bei 5,9097 wobei der erste Messwert in der Tabelle ausgelassen wurde, da er zu stark von den Erwartungswerten abweicht und auch am Oszilloskop schwer zu bestimmen war, denn die Phasenverschiebung war zu gering, um sie exakt ablesen zu können.

3.5 Signalform nach Reflexion

Wie erwartet ergab sich folgendes Überlagerungsbild am Eingang:

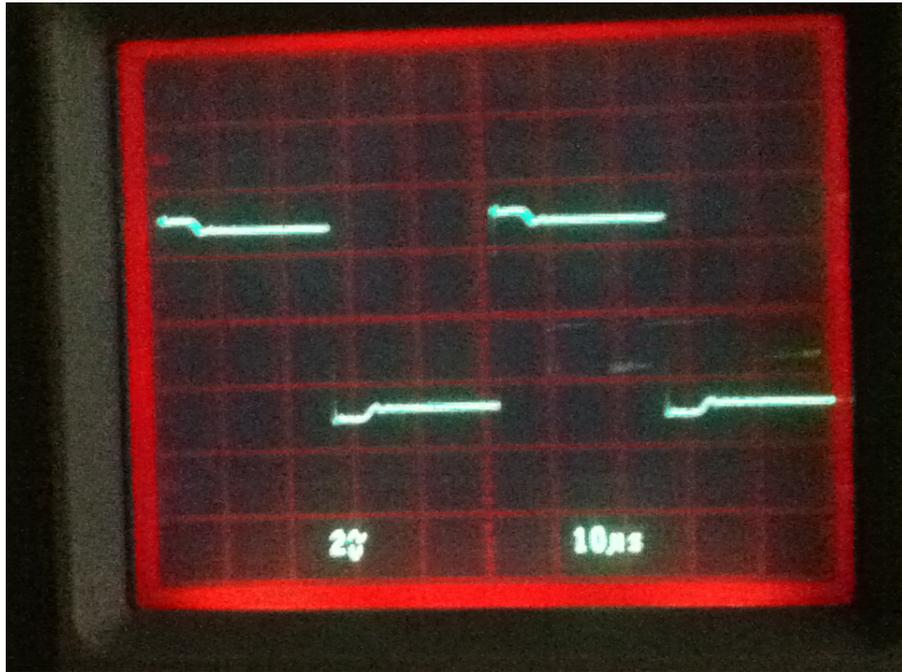


Abbildung 3.3: Eingangssignal

Man sieht klar die Interferenzplateaus der überlagerten, abgeschwächten, reflektierten Rechteckspannung.

4 Aufgabe 4

4.1 Charakteristischer Widerstand des Koaxialkabels

Für den charakteristischen Widerstand ergab sich analog zu 3.1:

$$Z_0 = 50\Omega$$

4.2 Verzögerungszeit

Die Phasenverschiebung von Eingang und Ausgang war: $\Delta t = 49ns$. Damit ergab sich die Verzögerungszeit

$$\tau' = \frac{\Delta t}{l} = \frac{49ns}{10m} = 4,9 \cdot 10^{-9} \frac{s}{m}$$

4.3 Reflexion

Es ergab sich eine Phasenverschiebung von $\Delta t = 108ns$. Damit folgt für die Verzögerungszeit:

$$\tau' = \frac{\Delta t}{2l} = 5,4 \cdot 10^{-9} \frac{s}{m}$$

4.4 Relative Dielektrizitätskonstante

Mit der Formel aus der Vorbereitung folgt:

$$\epsilon_r = \frac{\tau'^2 c^2}{\mu_r} = 2,3553$$

wobei der Mittelwert aus 4.2 und 4.3 für τ' benutzt und $\mu_r = 1$ angenommen wurde. Nun kann ϵ_r auch mit Z_0 bestimmt werden:

$$\epsilon_r = \frac{\mu_0^2 \mu_r c^2}{4\pi^2 Z_0^2} \left(\ln \frac{r_a}{r_i} \right)^2 = 2,2568$$

Abschließend wird ϵ_r durch C_l bestimmt:

$$\epsilon_r = \frac{C_l}{2\pi\epsilon_0 l} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) = 2,0830$$

Der Unterschied zwischen den drei Werten kann evtl. durch die angenommene Näherung $\mu_r = 1$ erklärt werden.