

Versuche P2-72,73,83

Gammaspektrometrie Versuchsauswertung

Marco A. Harrendorf und Thomas Keck, Gruppe: Mo-3
Karlsruhe Institut für Technologie, Bachelor Physik

Versuchstag: 09.05.2011

Inhaltsverzeichnis

1. Versuch 1	3
1.1. Versuch 1.1: Messung des Impulshöhenspektrums von Cs-137 im Einkanalbetrieb	3
1.2. Versuch 1.2: Messen des Impulshöhenspektrums von Cs-137, Na-22 und Co-60 sowie des Untergrunds im 1024-Kanalbetrieb	4
1.3. Versuch 1.3: Deutung der Impulshöhenspektren	5
1.3.1. Energiekalibrierung	5
1.3.2. Charakteristische Peaks in den Spektren	6
1.3.3. Auflösung des Detektors	7
2. Versuch 2: Bestimmung der Aktivität des Cs-137 Präparats	8
2.1. Ziel des Versuchs	8
2.2. Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung	8
2.3. Auswertung	8
2.3.1. Totzeitkorrektur	8
2.3.2. Berechnung der korrigierten Zählrate	9
2.3.3. Berechnung der Aktivität	9
2.3.4. Ergebnisse und Mittelwert für die Aktivität der Cäsium-137 Quelle . .	10
3. Versuch 3: Röntgenemission	11
3.1. Versuch 3.1: Durchführung einer Energiekalibration an Hand der Ba- und Pb- K_{α} Röntgenlinie	11
3.1.1. Ziel des Versuchs	11
3.1.2. Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung	11
3.1.3. Auswertung	11
3.2. Versuch 3.2: Bestimmung des “unbekannten” Elements	17
3.2.1. Ziel des Versuchs	17
3.2.2. Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung	17
3.2.3. Auswertung	17
4. Versuch 4: Statistische Verteilungen	23
4.1. Versuch 4.1: Untersuchung der statistischen Verteilung von Ereigniszahlen für Untergrundstrahlung	26
4.2. Versuch 4.2: Berechnung weiterer statistischer Größen	26
4.3. Versuch 4.3: Darstellung der Stichproben als Häufigkeitsverteilung	26
4.4. Versuch 4.4: Anwendung des χ^2 -Tests	27
A. Quellcode zu Versuch 4	29
Literatur	32

1. Versuch 1

Mithilfe eines Szintillationskristalls und einem angeschlossenen Sekundärelektronenvervielfacher (SEV), wurde das Impulshöhenspektrum verschiedener radioaktiver Nuklide bestimmt.

Dabei kam zur Datenerfassung CASSY-Lab zum Einsatz. Zuvor wurde die Sättigungsspannung zu $U_S = 992\text{V}$ ermittelt. Während der nachfolgenden Experimente wurde die Spannung am SEV U jeweils unter dieser Sättigungsspannung U_S gehalten.

1.1. Versuch 1.1: Messung des Impulshöhenspektrums von Cs-137 im Einkanalbetrieb

Anhand der Cs-137 Probe Nr 83, wurde eine Einkanalmessung durchgeführt.

Das Spektrum wurde in 50 Intervalle zerlegt, wobei die Spannung am SEV U so eingestellt wurde, dass der Full-Energy-Peak am rechten Ende des Spektrums lag. Jedes Intervall wurde 10 Sekunden lang vermessen. Die aufgenommenen Daten sind in der Abbildung 1 dargestellt.

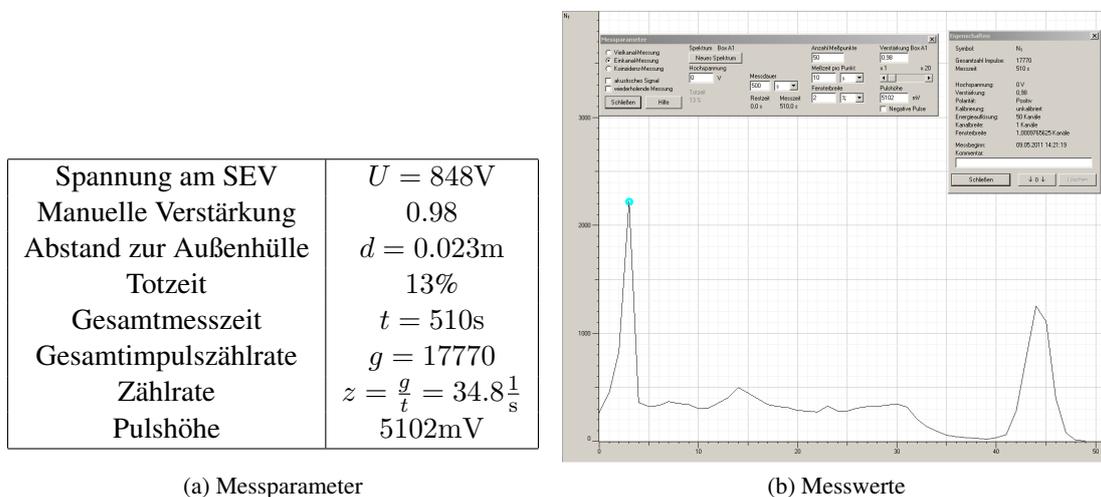


Abbildung 1: Einkanalmessung von Cs-137

Durch die Einkanalmessung ist die Zählrate pro Kanal und damit die Gesamt-Zählrate natürlich sehr gering, da immer nur jeweils einer der 50 Kanäle gemessen wurde, sodass die Messzeit pro Kanal nur bei 10 Sekunden lang.

1.2. Versuch 1.2: Messen des Impulshöhenspektrums von Cs-137, Na-22 und Co-60 sowie des Untergrunds im 1024-Kanalbetrieb

Wie in der Aufgabenstellung beschrieben, wurden die Impulshöhenspektren von Cs-137, Na-22 und Co-60 sowie des Untergrunds im 1024-Kanalbetrieb gemessen.

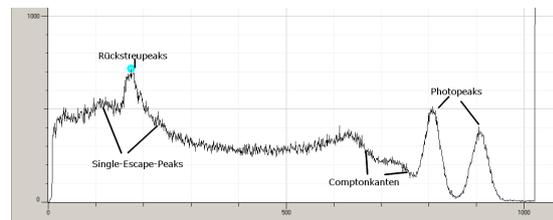
Dabei wurde das Impulsspektrum so skaliert, dass der Full-Energy-Peak von Co-60 am rechten Rand des Spektrums lag, die Full-Energy-Peaks der übrigen Proben liegen daher aufgrund der geringeren Energie weiter links. In den nachfolgenden Abbildungen 2, 3, 4 und 5 sind die Messdaten und Messparameter festgehalten:

Spannung am SEV	$U = 787V$
Pulshöhe	5102mV
Manuelle Verstärkung	0.98
Gesamtmesszeit	$t = 300s$

Tabelle 1: Messparameter: Allgemeine Messparameter für alle Messungen

Abstand zur Außenhülle	$d = 0m$
Totzeit	8%
Gesamtimpulszählrate	$g = 311371$
Zählrate	$z = 1037.9 \frac{1}{s}$

(a) Messparameter

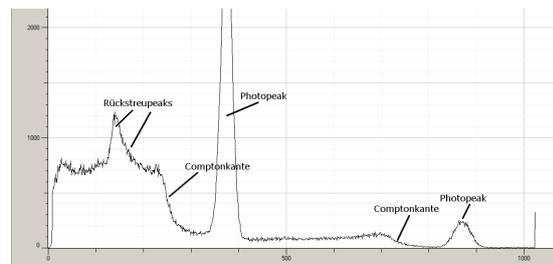


(b) Messwerte

Abbildung 2: Vielkanalmessung von Co-60

Abstand zur Außenhülle	$d = 0.028m$
Totzeit	8%
Gesamtimpulszählrate	$g = 332710$
Zählrate	$z = 1109.0 \frac{1}{s}$

(a) Messparameter

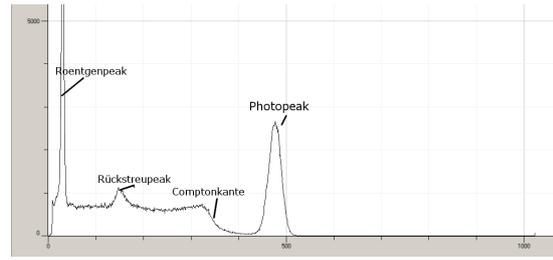


(b) Messwerte

Abbildung 3: Vielkanalmessung von Na-22

Abstand zur Außenhülle	$d = 0.031\text{m}$
Totzeit	9%
Gesamtimpulszählrate	$g = 379887$
Zählrate	$z = 1266.2 \frac{1}{\text{s}}$

(a) Messparameter

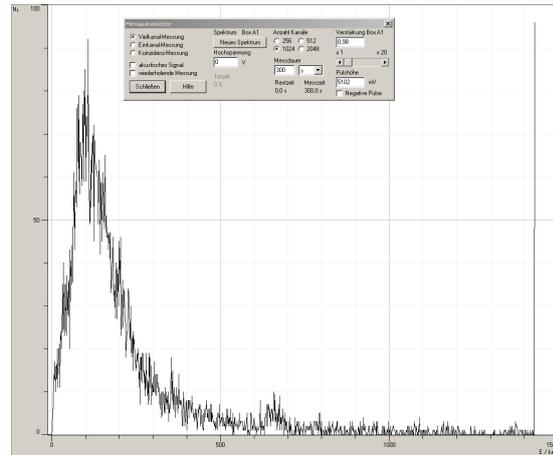


(b) Messwerte

Abbildung 4: Vielkanalmessung von Cs-137

Totzeit	9%
Gesamtimpulszählrate	$g = 9701$
Zählrate	$z = 32.3 \frac{1}{\text{s}}$

(a) Messparameter



(b) Messwerte

Abbildung 5: Vielkanalmessung des Untergrunds

Untergrund Man erkennt deutlich, dass der Untergrund aufgrund der äußerst geringen Zählrate und den wenigen Ereignissen, im Vergleich zu den Messungen mit Präparaten, keine Rolle spielt. Eine Korrektur muss deshalb an dieser Stelle nicht vorgenommen werden, da der Untergrund ohne weiteres vernachlässigt werden kann und im statistischen Rauschen untergeht.

Zählrate Die Zählrate konnte durchgehend im geforderten Bereich zwischen 1000-1500 Impulsen pro Sekunde (ips) gehalten werden.

1.3. Versuch 1.3: Deutung der Impulshöhenspektren

1.3.1. Energiekalibrierung

Anhand der Cs-137 Quelle wurde eine lineare Energiekalibrierung vorgenommen. Der Full-Energy-Peak von Cs-137 befand sich mit seiner Energie von $E_1 = 662\text{keV}$ auf dem Kanal $k_1 = 477$, der charakteristische K_α -Peak von Barium-137m befand sich mit einer Energie $E_2 =$

32.1keV auf dem Kanal $k_2 = 30$.

Dies ergibt eine Umrechnung von Kanal k zur Energie E in keV:

$$a = \frac{E_1 - E_2}{k_1 - k_2} = 1.409 \quad (1)$$

$$b = \frac{E_2 k_1 - E_1 k_2}{k_1 - k_2} = 10.175 \quad (2)$$

$$E = 1.409 \cdot k - 10.175 \quad (3)$$

Aus dieser Umrechnung und der Bestimmung der den charakteristischen Punkten (wie z.B. Comptonkante, Rückstreupeak usw.) entsprechenden Kanälen konnte der Energiewert für die charakteristischen Punkte berechnet werden.

Zur Bestimmung des dem jeweiligen Punkts zugeordneten Kanals wurden die Pixel p im abgespeicherten Bild auf die Kanäle k umgerechnet, so konnte die Position des jeweiligen Charakteristikums sehr genau bestimmt werden.

$$k = 1.059322 \cdot p - 76.271186 \quad (4)$$

Für die Kalibrierung mit Hilfe von 2 Punkten wurde sich entschieden, da die Ergebnisse für die charakteristischen Punkte im niederenergetischen Bereich sonst stark verzerrt gewesen wären. Auch erwies sich diese Art der 2-Punkt-Kalibrierung gegenüber einer Kalibrierung mit allen zur Verfügung stehenden Photopeaks als besser geeignet, wobei auch diese Energiekalibrierung stichprobenartig getestet wurde.

1.3.2. Charakteristische Peaks in den Spektren

Charakteristikum	Gemessener Wert keV	Theoretischer Wert keV	Abweichung in Prozent
Photopeak	1123, 1263	1173, 1333	4.2, 5.2
Rueckstreupeak	234, 234	210, 214	11.4, 9.3
Compton-Kante	924, 1061	963, 1119	4.0, 5.1
Single-Escape-Peak	151, 315	151, 311	0, 1.2

Tabelle 2: Co-60 - Charakteristiken im Spektrum

Charakteristikum	Gemessener Wert keV	Theoretischer Wert keV	Abweichung in Prozent
Photopeaks	518, 1210	511, 1275	1.3, 5.0
Rueckstreupeak	190, 215	170, 213	11.7, 0.9
Compton-Kante	339, 1019	341, 1062	0.5, 4.0
Single-Escape-Peak	-	764	-

Tabelle 3: Na-22 - Charakteristiken im Spektrum

Charakteristikum	Gemessener Wert keV	Theoretischer Wert keV	Abweichung in Prozent
Photopeak	662	662	0
Rueckstreupeak	198	184	7.6
Compton-Kante	464	478	2.9
Roentgenpeak	34.6	32	8.1

Tabelle 4: Cs-137 - Charakteristiken im Spektrum

Fazit Die Messergebnisse lassen sich qualitativ sehr gut den einzelnen, von der Theorie vorhergesagten, Peaks zuordnen. Aufgrund der Nichtlinearität des Detektors, gerade im mittleren bis hohen Energiebereich, gibt es zum Teil allerdings auch deutliche Abweichungen von den Messwerten zu den berechneten Werten im Bereich von bis zu 50keV. Eine nichtlineare (lineare Ursprungsgerade wurde testweise ausprobiert, und war schlechter) Energiekalibrierung der Kanäle von weiteren bekannten Peaks, hätte hier wahrscheinlich ein besseres Ergebnis erbracht. Die Rückstreupeaks bei Quellen mit mehreren Photopeaks, waren zum Teil nur sehr schwer zu trennen. Die Single-Escape-Peaks fielen klein, aber durchaus gut erkennbar aus, lediglich der Single-Escape-Peak von Na-22 konnte im vorhergesagten Energiebereich nicht beobachtet werden.

1.3.3. Auflösung des Detektors

Wie in der Vorbereitung bereits beschrieben, wurde anhand der Halbwertsbreite des Full-Energy-Peaks von Cs-137 bei $E_P = 662\text{keV}$ die Auflösung des Detektors, sowie die Anzahl der ausgelösten Elektronen, bestimmt. Die Halbwertsbreite des Full-Energy-Peaks beträgt $FWHM = 680\text{keV} - 636\text{keV} = 44\text{keV}$.

$$R = \frac{FWHM}{E_P} = 0.0664 \quad (5)$$

$$n_e = R^2 = 226 \quad (6)$$

2. Versuch 2: Bestimmung der Aktivität des Cs-137 Präparats

2.1. Ziel des Versuchs

Im Rahmen dieses Versuchs sollte die Aktivität der im Praktikum verwendeten Cäsium-137 Quelle bestimmt werden.

2.2. Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

Die Cäsium-137 Quelle mit der Kennzeichnungsnummer "83" wurde in den Quellenhalter oberhalb des Szintillationsdetektors eingesetzt.

Für verschiedene Abstände d_{mess} zwischen der Stirnfläche der Quelle und dem Detektor wurde mit einer Messzeit t_{mess} von 60 Sekunden im Vielkanalbetrieb des Impulshöhenanalysators ein Impulshöhenspektrum aufgenommen, wobei die Gesamtzählimpulse R_{gesamt} und die relative Totzeit $t_{tot,r}$ jeweils mitprotokolliert wurde.

Der Abstand d_{real} zwischen der eigentlichen Quelle und dem Detektor wurde hierbei so gewählt, dass die in der Abbildung 4 der [Vorbereitungshilfe] eingezeichneten Linien für die Bestimmung des Kalibrierfaktors f_K verwendet werden konnten.

Zu beachten ist hierbei, dass nach [Aufgabenstellung] der Abstand d_{stirn} zwischen der Stirnfläche der Quellenhalterung und der Quelle selbst $d_{stirn} = (2 \pm 0.5) \text{ mm}$ sowie die Dicke der Aluminiumhülle des Detektors $d_{Al} = 0.5 \text{ mm}$ beträgt. Diese beiden Abstände sind bei der Bestimmung des realen Abstand d_{real} zu berücksichtigen, sodass sich der reale Abstand d_{real} wie folgt aus dem gemessenen Abstand d_{mess} und den Abständen d_{stirn} und d_{Al} ergibt:

$$d_{real} = d_{mess} + d_{stirn} + d_{Al}$$

2.3. Auswertung

2.3.1. Totzeitkorrektur

Die Zahl der Gesamtzählimpulse R_{gesamt} war um einige Größenordnungen größer als die Zahl der durch den Untergrund bedingten Zählimpulse, aus diesem Grund konnte – vereinfachend – auf einen Abzug des Untergrunds verzichtet werden.

Nach [Vogt] ist bei der Messung von Impulsraten grundsätzlich zu beachten, dass die messtechnisch bestimmten Impulshöhen auf Grund des begrenzten zeitlichen Auflösungsvermögens des Detektorsystems – man bezeichnet dies als Totzeit t_{tot} des Detektors – in der Regel kleiner sind als der richtige Wert. Die Ursache liegt darin, dass ein oder mehrere einzelne Impuls-Signale auch in einem Zeitraum, dem sogenannten Auflöszeitraum, in die Auswerteeinheit gelangen können, währenddessen die Auswerteeinheit noch mit der Auswertung eines vorangegangenen Signal-Impulses beschäftigt ist.

Das oder die weiteren während des Auflöszeitraums eintreffenden Signale werden dann allerdings nicht vom Detektorsystem registriert, bleiben also bei der Messung unberücksichtigt. Die relative Totzeit $t_{tot,r}$ ist hierbei ein Maß für den prozentualen Zeitanteil an der Messzeit t , in welchem der Detektor kein zweites Zählereignis auflösen konnte. Es ist offensichtlich, dass die relative Totzeit $t_{tot,r}$ mit der Gesamtzählrate N_{gesamt} zunimmt.

Unter der Annahme, dass während der einzelnen Totzeit t_{tot} des Detektorsystems nicht mehr als ein Zählimpuls „verloren geht“ (dies ist für relative Totzeiten $t_{tot,r} < 40\%$ in der Regel der Fall), kann folgende einfache Totzeitkorrektur für die Gesamtzählimpulse R_{gesamt} vorgenommen werden, sodass sich die korrigierte Anzahl an Zählimpulsen R_{kor} ergibt:

$$R_{kor} = R_{gesamt} \cdot (100\% + t_{tot,r})$$

2.3.2. Berechnung der korrigierten Zählrate

Durch Kenntnis der Messdauer $t_{mess} = 60\text{ s}$ und der korrigierten Anzahl an Zählimpulsen R_{kor} konnte dann die korrigierte Zählrate N_{kor} bestimmt werden:

$$N_{kor} = \frac{R_{kor}}{t_{mess}}$$

2.3.3. Berechnung der Aktivität

Die Aktivität A ist definiert, als die Anzahl der Zerfälle N eines bestimmten Nuklids pro Zeiteinheit t .

$$A = \frac{dN}{dt}$$

Sie wird in der Einheit Becquerel (Bq) angegeben, die einer Anzahl von Impulsen (ips) pro Sekunde (s) entspricht:

$$\begin{aligned} [A] &= \frac{\text{ips}}{\text{s}} \\ &= \text{Bq} \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Aktivität A_{Cs137} der Cäsium-137 Quelle aus der mittels des Impulshöhenspektrums ermittelten korrigierten Zählrate N_{kor} sind folgende Punkte zu berücksichtigen:

- Cäsium-137 sendet beim Zerfall selbst keine Gammastrahlung aus, allerdings liegt in den im Praktikum verwendeten Quellen ein Mutter-Tochter-Gleichgewicht zwischen Cäsium-137 und metastabilem Ba-137 vor, weswegen die Anzahl der Zerfälle von Cäsium-137 und Barium-137m gleich ist.
Allerdings sendet Barium-137m nur mit einer Emissionswahrscheinlichkeit I_E von 85.1 % Gammastrahlung (mit einer Energie von 662 keV) aus, d.h. nur bei 85.1 % der Zerfälle von Cäsium-137 wird auch Gammastrahlung emittiert.
Die Emissionswahrscheinlichkeit I_E muss daher bei der Ermittlung der Aktivität A_{Cs137} berücksichtigt werden.
- Da zum einen nicht alle von der Cäsium-137 Quelle ausgesandten Photonen den Detektor erreichen und zum anderen nicht alle Photonen, die den Detektor erreichen, in diesem auch so wechselwirken, dass sie vom Detektor als Signal bzw. Impuls registriert werden, ist die Anwendung eines weiteren Umrechnungsfaktors notwendig.
Dieser sogenannte Kalibrierfaktor f_K gibt für eine bestimmte Energie der ursprünglichen

Gammastrahlung (Cs-137: 662 keV) und einen bestimmten realen Messabstand d_{real} das Verhältnis von im Detektor gemessenen Gammaquanten zu den von der Quelle emittierten Gammaquanten an. Er kann aus der Abbildung 4 in [Vorbereitungshilfe] ermittelt werden.

Die Aktivität A_{Cs137} der Cäsium-137 Quelle kann also über folgenden Zusammenhang berechnet werden:

$$A_{Cs137} = \frac{N_{kor}}{I_E \cdot f_K}$$

2.3.4. Ergebnisse und Mittelwert für die Aktivität der Cäsium-137 Quelle

In der Tabelle 5 sind die im Rahmen dieses Versuchs gemessenen und berechneten Größen aufgeführt.

Für den Mittelwert der Aktivität \bar{A}_{Cs137} und dessen statistischer Unsicherheit $\Delta A_{stat,Cs137}$

d_{mess} [mm]	R_{Gesamt}	$t_{tot,r}$	d_{real} [mm]	R_{kor}	N_{kor} [ips]	f_K	A_{Cs137} [Bq]
1.5	335164	42 %	4.0	475933	7932.21	0.094	99160
5.0	248553	31 %	7.5	325604	5426.74	0.061	104539
10.0	193789	24 %	12.5	240298	4004.97	0.038	123847
12.5	177632	22 %	15.0	216711	3611.85	0.031	136911
27.5	82573	10 %	30.0	90830	1513.84	0.014	127064
37.5	58661	7 %	40.0	62767	1046.12	0.0068	180777
57.5	33276	4 %	60.0	34607	576.784	0.0040	169443
97.5	15115	2 %	100.0	15417	256.955	0.0013	232265

Tabelle 5: Gemessene und berechnete Größen für die Bestimmung der Aktivität der Cäsium-137 Quelle

erhält man aus den Messungen:

$$\bar{A}_{Cs137} + \Delta A_{stat,Cs137} = (146.75 \pm 44.79) \text{ kBq}$$

Ein Vergleich des durch Messungen ermittelten Aktivitätswerts mit der spezifizierten Aktivität der Quelle war leider nicht möglich, da in [Aufgabenstellung] das Bezugsdatum der Quelle nicht angegeben war und somit keine Berücksichtigung der Halbwertszeit von 30 Jahren erfolgen konnte.

Allerdings ist die statistische Unsicherheit $\Delta A_{stat,Cs137}$ sehr groß, sie beträgt ungefähr 30.5 % der ermittelten Gesamtaktivität \bar{A}_{Cs137} ; es ist also davon auszugehen, dass die oben getroffenen Vereinfachungen wesentliche Einflüsse auf das Messergebnis haben und dass das bestehende Messverfahren ungeeignet ist.

Als Verbesserung des Messverfahrens würde ich zum Beispiel die Verwendung einer Kalibrier- bzw. Vergleichsaktivität mit bekanntem Aktivitätswert vorschlagen, wobei dann die „unbekannte“ Aktivität durch Vergleich der Fläche der beiden Fullenergypeaks bestimmt werden könnte.

3. Versuch 3: Röntgenemission

3.1. Versuch 3.1: Durchführung einer Energiekalibration an Hand der Ba- und Pb- K_{α} Röntgenlinie

3.1.1. Ziel des Versuchs

In diesem Versuch sollte für den niedrigen Energiebereich (ca. 10 bis 190 keV) eine Energiekalibrierung des Detektors vorgenommen werden, indem die Impulshöhenspektren von Barium und Blei in diesem Energiebereich bestimmt werden und deren charakteristische K_{α} -Linien als Referenzwert für eine Energiekalibrierung verwendet werden.

3.1.2. Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

Die Cs-137 Quelle wurde in einem Abstand von 2.75 Zentimeter oberhalb des Detektors angebracht.

Im Vielkanalbetrieb des Impulshöhenanalysators wurde jeweils mit einer Messzeit $t_{mess} = 300\text{ s}$ ein Impulshöhenspektrum mit 1024 Kanälen aufgenommen. Die Spannung am Photomultiplier wurde hierbei mit $U = 870\text{ V}$ so gewählt, dass das Impulshöhenspektrum so gespreizt wurde, dass gerade noch der Rückstreupic von Cs-137 (184 keV) im Bereich des Spektrums lag. Die manuelle Verstärkung und die Pulshöhe wurde gegenüber den vorangegangenen Versuchen nicht verändert und lag bei 0.98 bzw. 5102 mV.

Bei der ersten Messung befand sich zwischen Cs-137 Quelle und Detektor kein Probematerial, sodass der charakteristische K_{α} -Peak von Barium (32.2 keV) gemessen wurde.

Bei der zweiten Messung wurde das Probelättchen „A“, welches als Material nahezu reines Blei enthält, auf den Detektor gelegt und es wurde erneut ein Impulshöhenspektrum aufgenommen, um dieses Mal den charakteristischen K_{α} -Peak von Blei (75.0 keV) zu messen.

3.1.3. Auswertung

Zur Energiekalibrierung des Detektorsystems im niedrigen Energiebereich (ca. 10 bis 190 keV) wurden die charakteristischen K_{α} -Linien von Barium und Blei als Referenzpunkte für die Erstellung einer Kalibriergeraden wie folgt benutzt.

Zunächst wurde das Impulshöhenspektrum mit dem charakteristischen K_{α} -Peak von Barium verwendet und an Hand der Darstellung des Impulshöhenspektrums in CASSY-Lab (siehe hierzu Abbildung 6) der Bereich identifiziert, in dem der K_{α} -Peak von Barium ungefähr liegt (\approx Kanal 110 bis 180).

Mit Hilfe des Datenanalyse-Pakets ROOT wurde dann unter Verwendung dieses eingegrenzten Kanalbereichs der Kanal exakt bestimmt, in welchem der K_{α} -Peak von Barium sein Maximum erreicht. Hierzu wurde eine Gaußkurve an den Peak gefittet.

Laut dem Gaussfit in ROOT (siehe Abbildung 7) liegt das Peakmaximum von Barium im Kanal 141.965, eine Energie von 32.2 keV entspricht also gerade dem Kanal 141.965.

Anschließend wurde das Impulshöhenspektrum mit dem charakteristischen K_{α} -Peak von Blei verwendet und an Hand der Darstellung des Impulshöhenspektrums in CASSY-Lab (siehe hierzu Abbildung 8) der Bereich identifiziert, in dem der K_{α} -Peak von Blei ungefähr liegt (\approx Kanal 280 bis 350).

Mit Hilfe des Datenanalyse-Pakets ROOT wurde dann unter Verwendung dieses eingegrenzten Kanalbereichs der Kanal exakt bestimmt, in welchem der K_{α} -Peak von Blei sein Maximum erreicht. Hierzu wurde wiederum eine Gaußkurve an den Peak gefittet.

Laut dem Gaussfit in ROOT (siehe Abbildung 9) liegt das Peakmaximum von Blei im Kanal 316.451, eine Energie von 75.0 keV entspricht also gerade dem Kanal 316.451.

Aus den beiden Referenzpunkten konnte nun eine Kalibriergerade gezeichnet werden, indem die Energie des jeweiligen charakteristischen K_{α} -Peaks über der Kanalzahl aufgetragen wurde. Die Gerade ist in Abbildung 10 dargestellt und die über lineare Regression bestimmte Geradengleichung lautet:

$$\begin{aligned} y &= m \cdot x + b \\ &= (0.2453 \cdot x - 2.623) \text{ keV} \end{aligned}$$

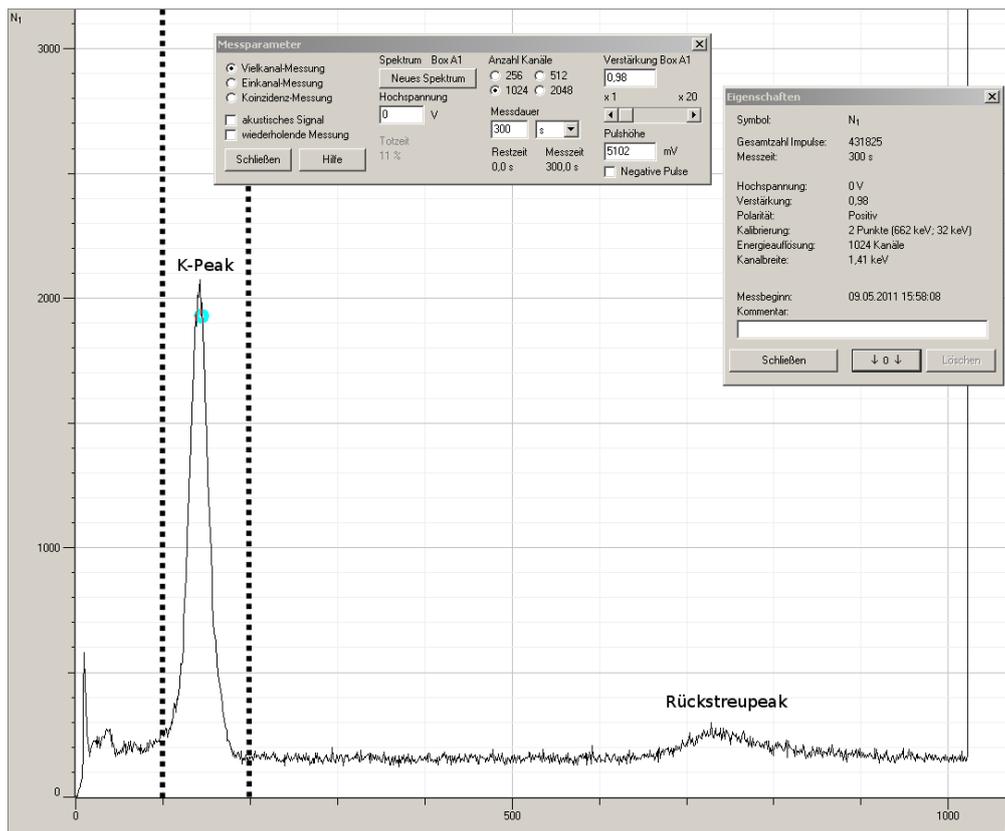


Abbildung 6: Darstellung des Impulshöhenspektrums mit dem K_{α} -Peak von Barium im CASSY-Lab

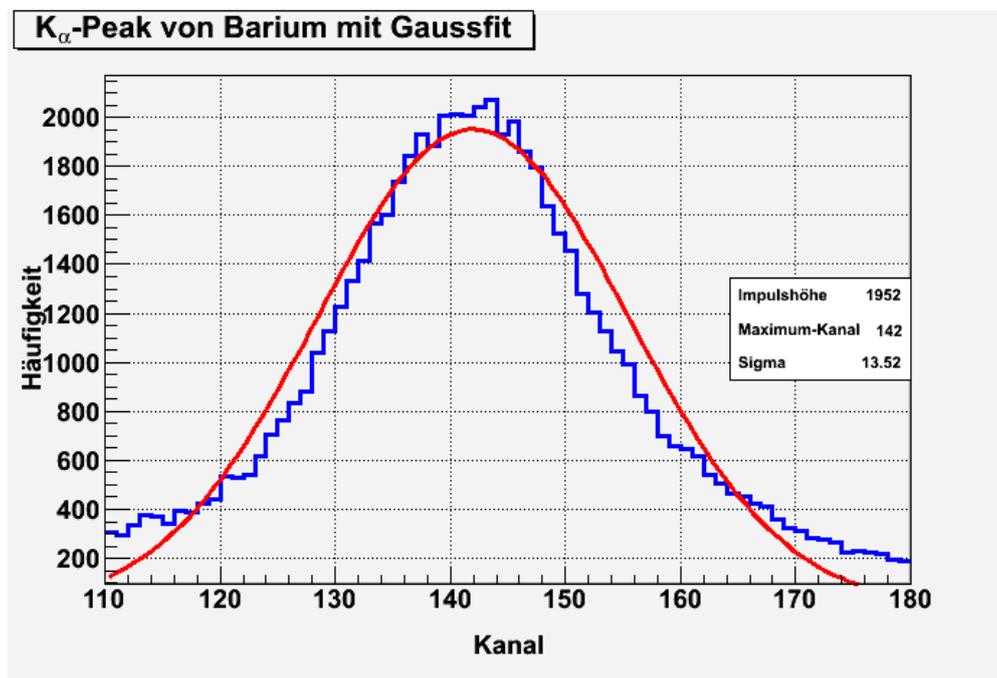


Abbildung 7: Darstellung des Gaussfits für den K_α-Peak von Barium

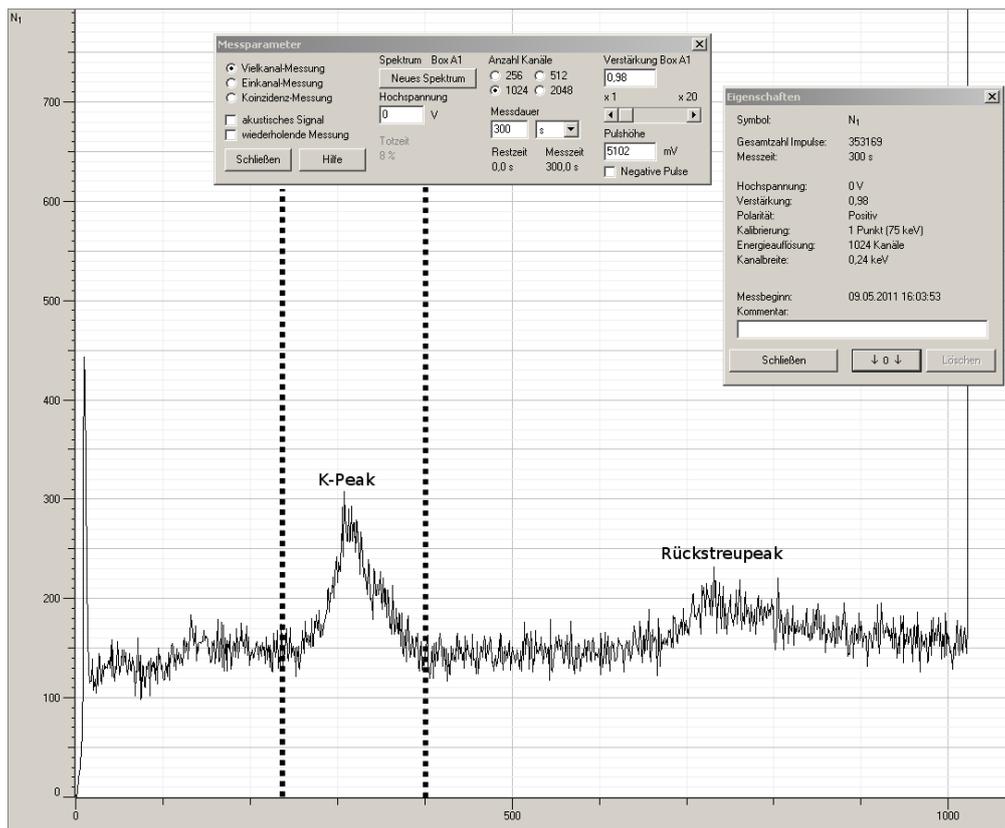


Abbildung 8: Darstellung des Impulshöhenspektrums mit dem K_{α} -Peak von Blei im CASSY-Lab

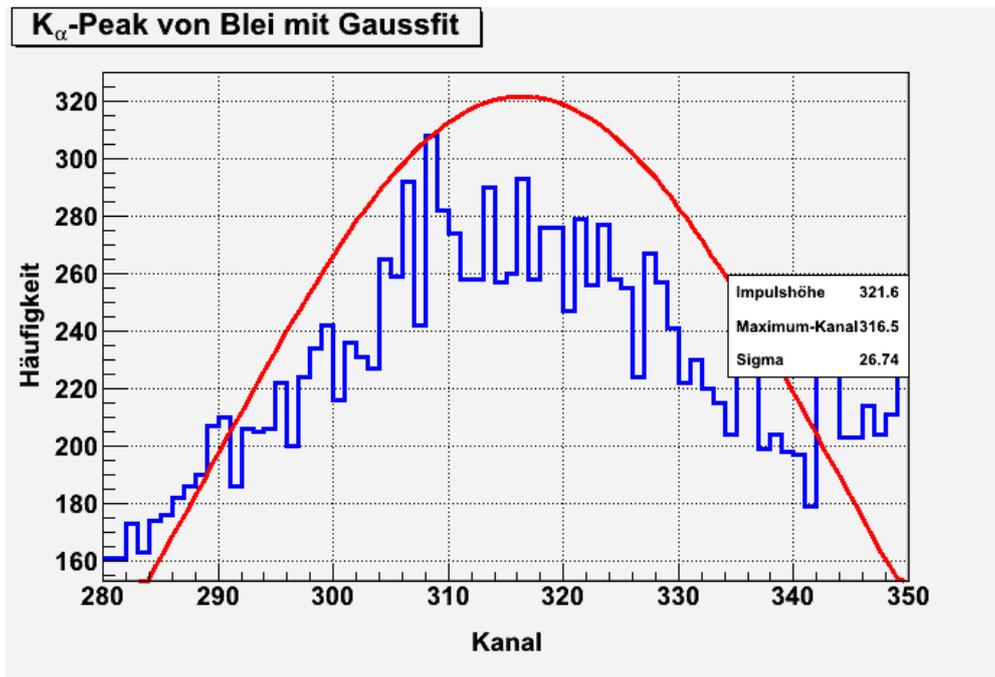


Abbildung 9: Darstellung des Gaussfits für den K_α-Peak von Blei

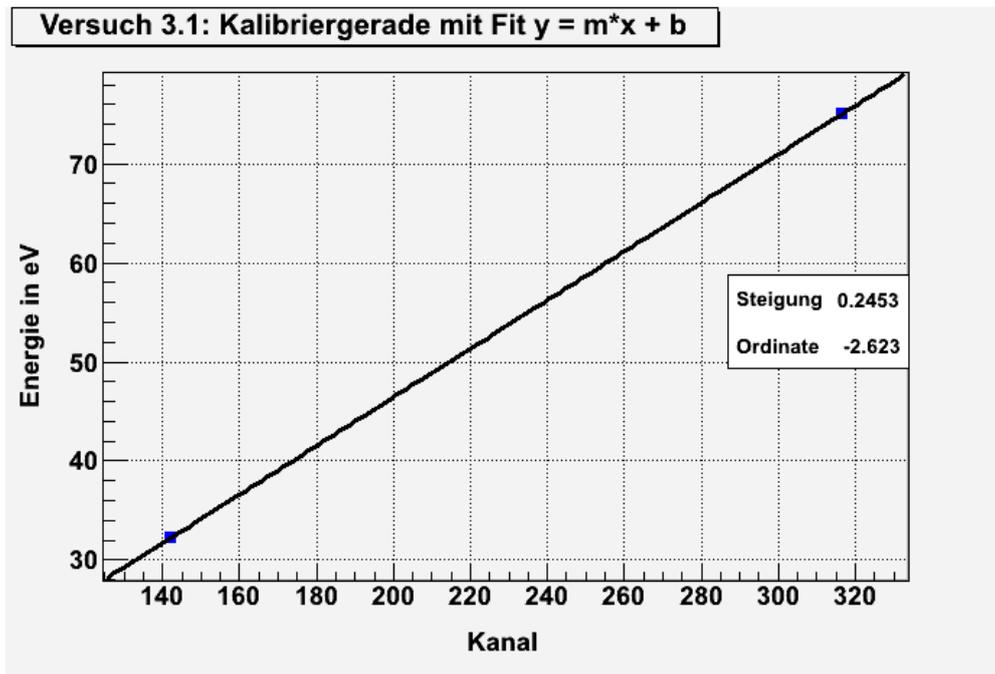


Abbildung 10: Darstellung der Kalibriergeraden

3.2. Versuch 3.2: Bestimmung des “unbekannten” Elements

3.2.1. Ziel des Versuchs

In diesem Versuchsteil sollten zwei unbekannte Materialproben an Hand ihrer charakteristischen K_{α} -Linien bestimmt werden, indem die im vorangegangenen Versuchsteil durchgeführte Energiekalibrierung ausgenutzt wird.

3.2.2. Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

Die Cs-137 Quelle war immer noch in einem Abstand von 2.75 Zentimeter oberhalb des Detektors angebracht.

Im Vielkanalbetrieb des Impulshöhenanalysators wurde jeweils mit einer Messzeit $t_{mess} = 300\text{ s}$ ein Impulshöhenspektrum mit 1024 Kanälen aufgenommen. Die Spannung am Photomultiplier entsprach hierbei mit $U = 870\text{ V}$ dem Wert des vorangegangenen Versuchs 3.2. Auch die manuelle Verstärkung und die Pulshöhe wurde gegenüber den vorangegangenen Versuchen nicht verändert und lag bei 0.98 bzw. 5102 mV.

Bei der ersten Messung befand sich zwischen Cs-137 Quelle und Detektor das Probematerial ”B”; das zugehörige, gemessene Impulshöhenspektrum wird zukünftig als „Impulshöhenspektrum B“ bezeichnet.

Bei der zweiten Messung wurde das Probeplättchen „C“ auf den Detektor gelegt und es wurde erneut ein Impulshöhenspektrum aufgenommen, dieses Impulshöhenspektrum wird zukünftig als „Impulshöhenspektrum C“ bezeichnet.

3.2.3. Auswertung

Zur Bestimmung der beiden unbekanntes Materialien „B“ und „C“ wurde zunächst die Position des charakteristischen K_{α} -Peaks im Impulshöhenspektrum und der zugehörige Kanal bestimmt. Anschließend konnte über die in Abschnitt 3.1.3 bestimmte Kalibriergerade die Energie des K_{α} -Peaks bestimmt werden und mit den Werten der Tabelle in [Aufgabenstellung] verglichen werden.

Bestimmung der Energie für den K_{α} -Peak für das Material B Das „Impulshöhenspektrum B“ wurde ausgewertet und an Hand der Darstellung des Impulshöhenspektrums in CASSY-Lab (siehe hierzu Abbildung 11) der Bereich identifiziert, in dem der K_{α} -Peak dieses Materials ungefähr liegt (\approx Kanal 200 bis 290).

Mit Hilfe des Datenanalyse-Pakets ROOT wurde dann unter Verwendung dieses eingegrenzten Kanalbereichs der Kanal exakt bestimmt, in welchem der K_{α} -Peak sein Maximum erreicht. Hierzu wurde eine Gaußkurve an den Peak gefittet.

Laut dem Gaussfit in ROOT (siehe Abbildung 12) liegt das Peakmaximum von Material B im Kanal 247.514.

Unter Verwendung der Geradengleichung für die Energiekalibrierung ergibt sich also folgende Energie $E_{K_{\alpha},B}$ für den charakteristischen K_{α} -Peak des Materials B.

$$E_{K_{\alpha},B} = 58.09\text{ keV}$$

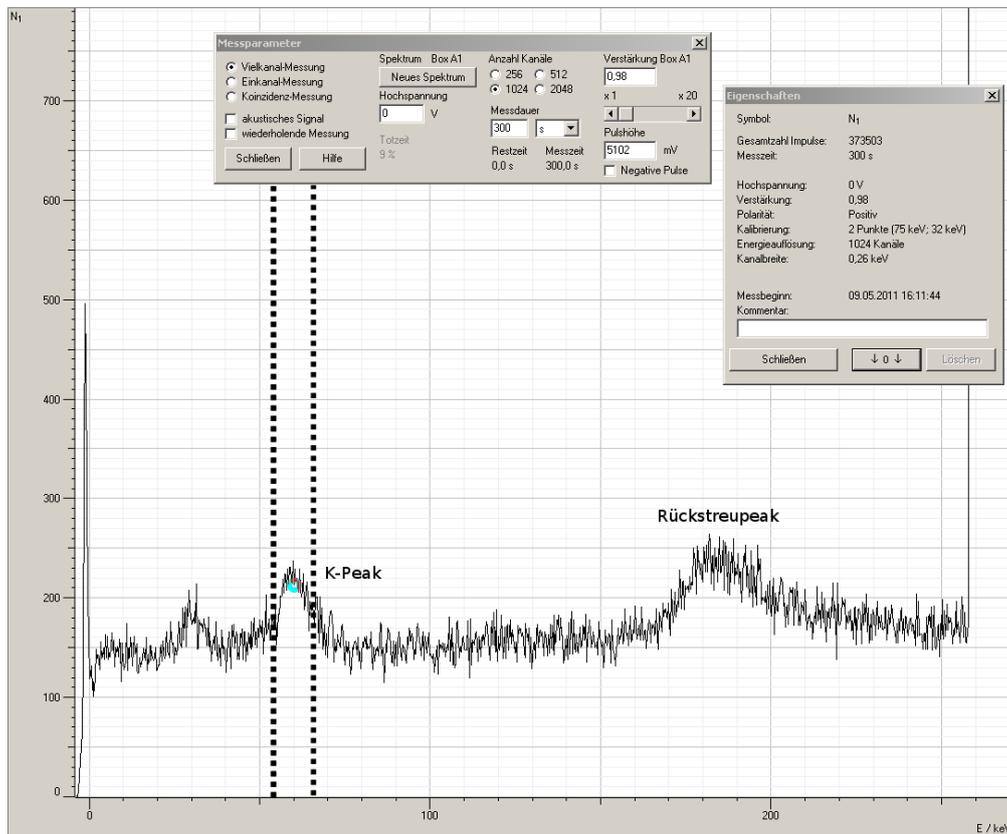


Abbildung 11: Darstellung des Impulshöhenspektrums mit dem K_{α} -Peak des Materials B im CASSY-Lab

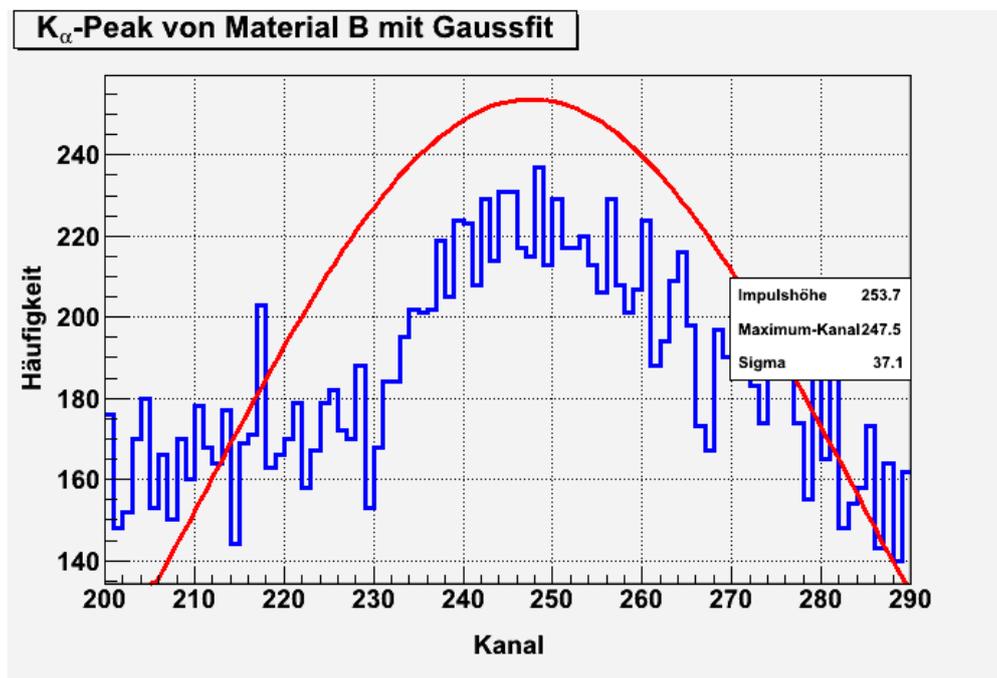


Abbildung 12: Darstellung des Gaussfits für den K_{α} -Peak des Materials B

Bestimmung der Energie für den K_{α} -Peak für das Material C Das „Impulshöhenspektrum C“ wurde ausgewertet und an Hand der Darstellung des Impulshöhenspektrums in CASSY-Lab (siehe hierzu Abbildung 13) der Bereich identifiziert, in dem der K_{α} -Peak dieses Materials ungefähr liegt (\approx Kanal 200 bis 290).

Mit Hilfe des Datenanalyse-Pakets ROOT wurde dann unter Verwendung dieses eingegrenzten Kanalbereichs der Kanal exakt bestimmt, in welchem der K_{α} -Peak sein Maximum erreicht. Hierzu wurde eine Gaußkurve an den Peak gefittet.

Laut dem Gaussfit in ROOT (siehe Abbildung 14) liegt das Peakmaximum von Material C im Kanal 252.797.

Unter Verwendung der Geradengleichung für die Energiekalibrierung ergibt sich also folgende Energie $E_{K_{\alpha},C}$ für den charakteristischen K_{α} -Peak des Materials C.

$$E_{K_{\alpha},C} = 59.38 \text{ keV}$$

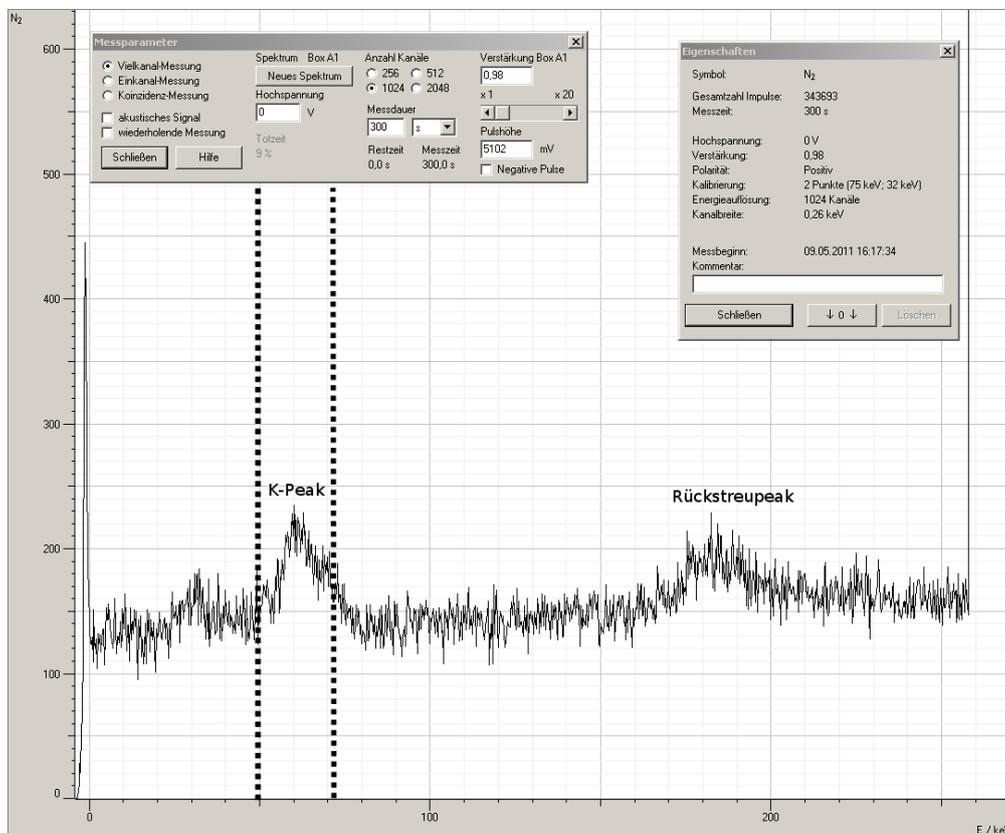


Abbildung 13: Darstellung des Impulshöhenspektrums mit dem K_{α} -Peak des Materials C im CASSY-Lab

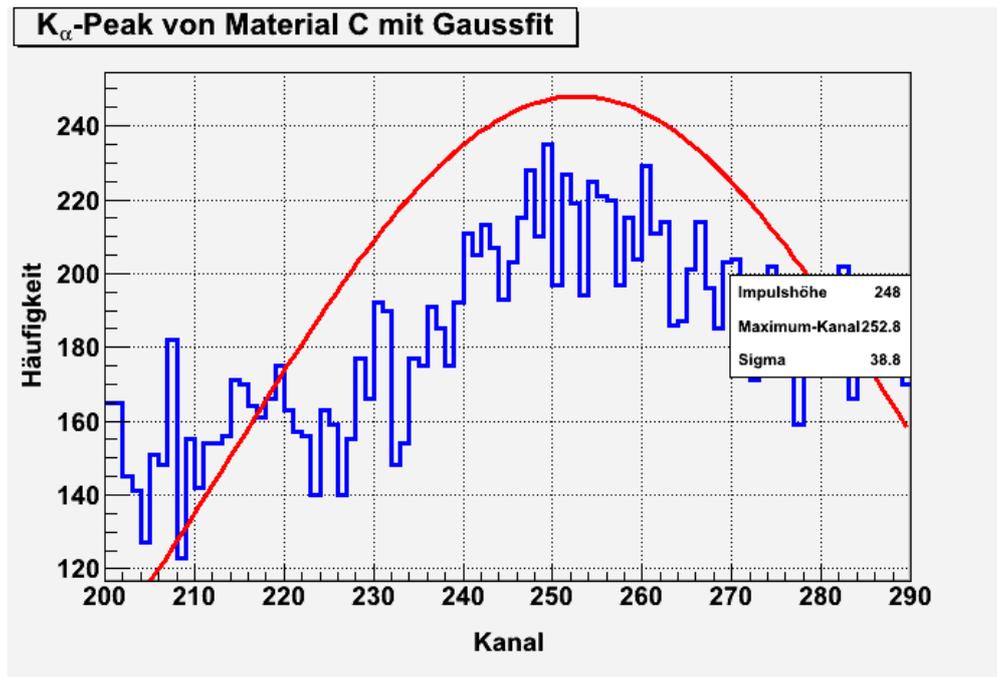


Abbildung 14: Darstellung des Gaussfits für den K_α-Peak des Materials C

Schlussfolgerung Die Materialien „B“ und „C“ liegen bezüglich der Energie ihres charakteristischen K_α-Peaks nahe beieinander. Allerdings lässt sich dennoch das Material mit großer Sicherheit bestimmen:

Beim Material „B“ handelt es sich um Tantal, dessen K_{α1}-Peak theoretisch bei ca. 57.5 keV liegt. Währenddessen handelt es sich beim Material „C“ um Wolfram, dessen K_{α1}-Peak theoretisch bei ca. 59.3 keV liegt.

Dass es sich bei den beiden Materialproben um unterschiedliche Materialien handeln muss, wird zudem durch den Vergleich der beiden Impulshöhenspektren (mit gleicher Messzeit $t_{mess} = 300\text{ s}$) im CASSY-Lab (siehe Abbildung 15) offensichtlich. Zwar besitzen beide Materialien einen Rückstreupeak nahezu gleicher Intensität und Lage, wodurch davon ausgegangen werden kann, dass dieselben Messbedingungen herrschten. Allerdings unterscheiden sich die Spektren hinsichtlich ihres K_{alpha}-Peaks trotz der geringen Messzeit deutlich.

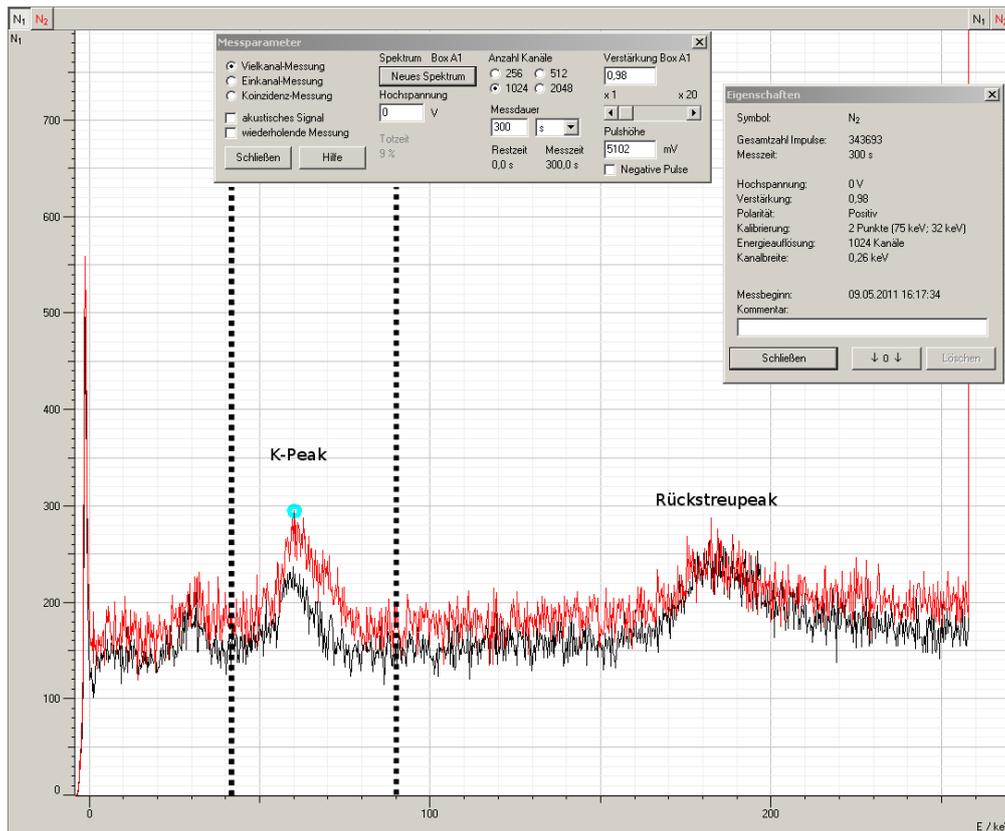


Abbildung 15: Gemeinsame Darstellung der Impulshöhenspektren für das Material B und C

4. Versuch 4: Statistische Verteilungen

Wie auf dem Aufgabenblatt verlangt, wurden in einer Messung mit 256 Kanälen 150 Spektren aufgenommen. Die statistische Auswertung der Verteilungen inklusive dem χ^2 -Test wurde in C++ unter Verwendung des Datenanalysepakets ROOT des CERN programmiert. Der Quellcode wurde angehängt.

Die Ergebnisse der Berechnung sind im folgenden Schaubild zusammengefasst, die nachfolgende Auswertung bezieht sich komplett auf dieses Schaubild:

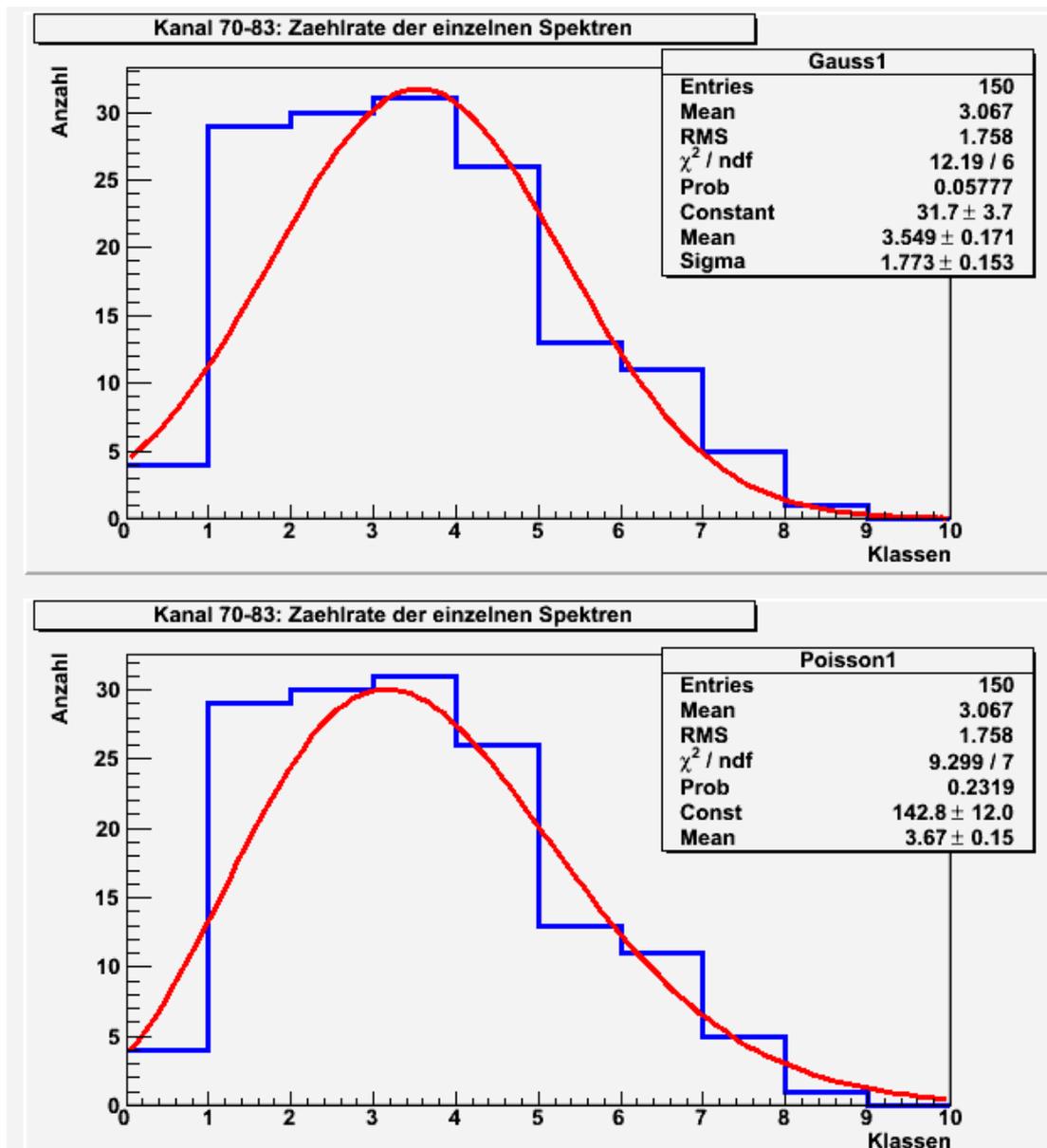


Abbildung 16: Stichprobe A mit verschiedenen Fits und χ^2 -Testwert

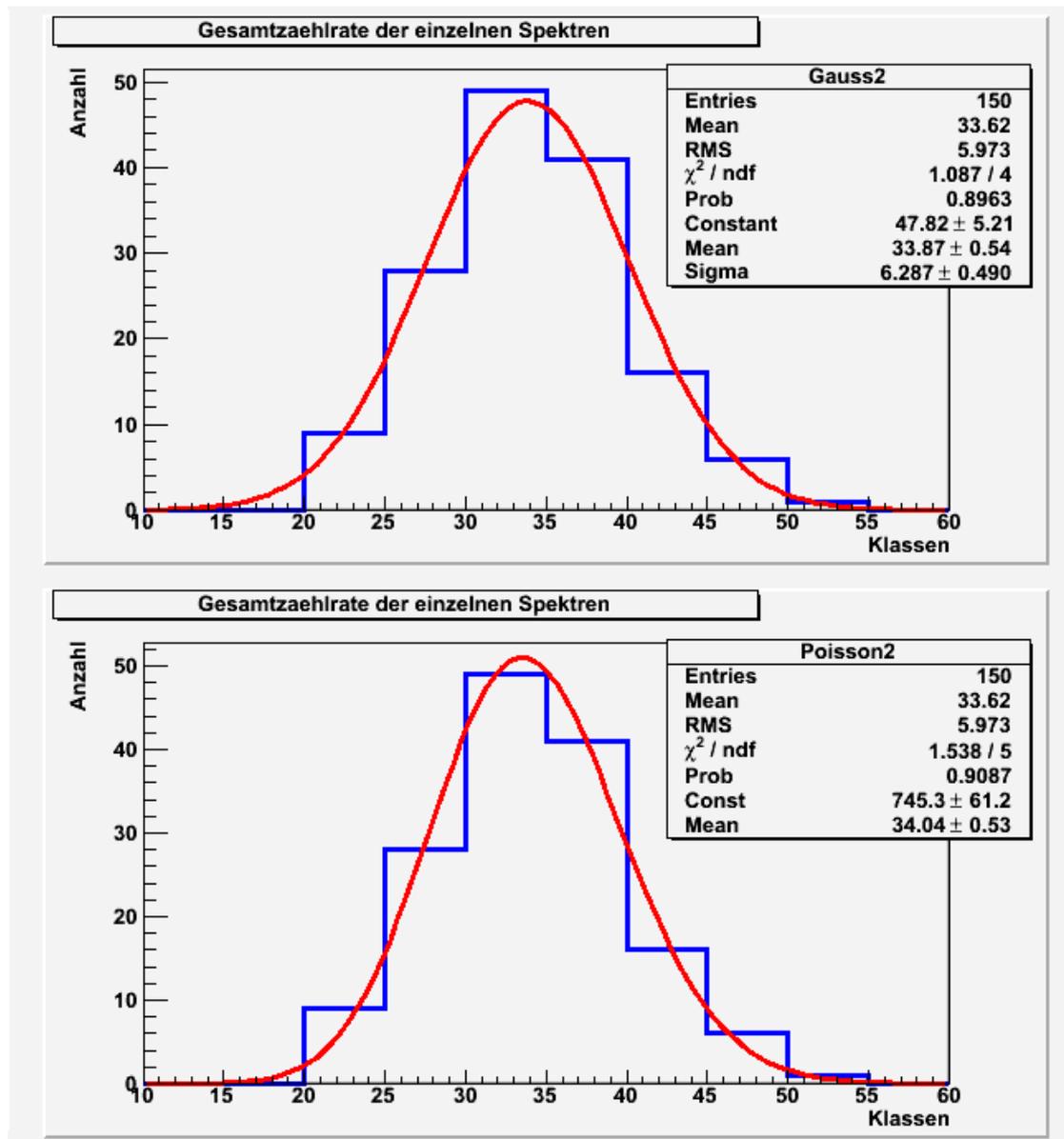


Abbildung 17: Stichprobe B mit verschiedenen Fits und χ^2 -Testwert

4.1. Versuch 4.1: Untersuchung der statistischen Verteilung von Ereigniszahlen für Untergrundstrahlung

Die Stichprobe A im Schaubild 16 wurde aus den aufsummierten Zählraten der Kanäle 70 bis 83 der einzelnen Spektren gewonnen. In der Stichprobe A befinden sich 9 Klassen mit den Werten 1 bis 9, auf diese 9 Klassen sind die 150 gewonnenen Werte verteilt. Ihr Mittelwert beträgt $\bar{x} = 3.067$, die Standardabweichung $\sigma_x = 1.758$.

Die Stichprobe B im Schaubild 17 wurde aus den Gesamtzählraten der einzelnen Spektren gewonnen. In der Stichprobe B befinden sich 7 Klassen mit den Werten 20 bis 55 in 5er Schritten, auf diese 9 Klassen sind die 150 gewonnenen Werte verteilt. Eine größere Anzahl von Klassen mit kleineren Binwerten erwies sich als sehr ungünstig, da durch die auftretenden Fließkommagrenzen bestimmte Bins benachteiligt waren. Der Mittelwert beträgt $\bar{x} = 33.62$, die Standardabweichung $\sigma_x = 5.973$.

4.2. Versuch 4.2: Berechnung weiterer statistischer Größen

Von beiden Stichproben sollte die Standardabweichung des Mittelwerts berechnet werden, welche ein Maß für die Abweichung des Mittelwerts vom wahren Wert bei $\lim_{N \rightarrow \infty} N$ Messungen ist. Die Anzahl der Messungen entsprach in diesem Szenario den 150 Einträgen im Histogramm.

$$\text{Stichprobe A: } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0.1435$$

$$\text{Stichprobe B: } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0.4876$$

Aus der Statistik ist bekannt das für eine Poissonverteilung $\sqrt{\bar{x}} = \sigma_x$ erfüllt ist.

Stichprobe A: $\sqrt{\bar{x}} = 1.751$, dies passt sehr gut zu $\sigma_x = 1.758$. Die Stichprobe ist also sehr wahrscheinlich poissonverteilt!

Stichprobe B: $\sqrt{\bar{x}} = 5.798$, dies passt wiederum sehr gut zu $\sigma_x = 5.973$. Auch diese Stichprobe ist also sehr wahrscheinlich poissonverteilt!

4.3. Versuch 4.3: Darstellung der Stichproben als Häufigkeitsverteilung

In den Schaubildern 16 und 17 sind die beiden Stichproben dargestellt.

Das jeweils obere Schaubild wurde mit einer Gaußkurve von ROOT gefittet. Als Parameter wurden standardmäßig ein konstanter Vorfaktor „Constant“, der Mittelwert der Verteilung „Mean“ und die Standardabweichung „Sigma“ gewählt.

Es ist zu beachten das auf alle 3 Parameter gefittet wurde und für die im Schaubild angezeigten Werte (die unteren 3) die maximale Übereinstimmung mit der Datenbasis vorlag. Der Mittelwert der Datenbasis und deren Standardabweichung (die oberen 2 Werte) stimmen dabei nicht

zwangsläufig mit den Parametern des Fits überein. Für alle Parameter wurde von ROOT weiterhin ein Vertrauensintervall berechnet, welches hinter dem jeweiligen Parameter angegeben ist. Ein einfacher Fit auf den Peak der Verteilung wäre einfacher, jedoch ungenauer gewesen.

Die unteren Schaubilder wurden mit einer Poissonkurve gefittet. Es handelt sich bei der Poissonfunktion eigentlich um eine diskrete Funktion für natürliche Zahlen, die Zwischenwerte wurden deshalb mithilfe der Gamma-Funktion interpoliert. Zum Einsatz kamen 2 Fitparameter. Ein konstanter Vorfaktor „Const“ sowie der Mittelwert „Mean“. Die Standardabweichung ist hier kein Freiheitsgrad, da die bereits oben erwähnte Beziehung $\sqrt{\bar{x}} = \sigma_x$ zum Mittelwert besteht.

Bereits mit bloßem Auge ist in den Schaubilder erkennbar, dass zwischen der Gauß- und der Poissonkurve in den rechten Schaubilder bei einem hohen Mittelwert kaum ein Unterschied besteht. Dies ist nicht verwunderlich, da die Poissonverteilung für große Mittelwerte gegen die Normalverteilung konvergiert. In den linken Schaubildern, bei ca. zehnmal kleinerem Mittelwert ergibt sich ein anderes Bild. Die Poissonverteilung scheint sich der Datenbasis besser anzupassen, da der langsame Abfall nach rechts und der schnelle nach links besser erfasst wird, während die Gaußverteilung hier symmetrisch um den Mittelwert herum verlaufen muss.

4.4. Versuch 4.4: Anwendung des χ^2 -Tests

Der χ^2 -Test dient unter anderem zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass eine Grundgesamtheit oder Datenbasis, ein bestimmtes statistisches Merkmal besitzt. Für jedes Histogramm und der dazugehörigen Fitfunktion ist der χ^2 -Testwert angegeben. Daneben steht die Anzahl der Freiheitsgrade (ndf = number of degrees of freedom). Diese ergibt sich aus der Anzahl der Klassen (A: 9 und B: 7) minus 1, minus der Anzahl der abgeschätzten Parameter der erwarteten Verteilung (diese entsprechen den Fitparametern: oben 3, unten 2). Allgemein formuliert, ist die Anzahl der Freiheitsgrade von χ^2 gegeben durch die Anzahl unabhängiger Einzelinformationen (die Klassen) minus der Anzahl der in die Berechnung eingehenden zusätzlichen Parameter (der konstante Vorfaktor zählt hier dazu!) minus 1, da die gewonnene Größe wieder einem Parameter entspricht.

Die Tabelle in der Vorbereitungshilfe ist bei der Auswertung irreführend, angegeben sind die Signifikanzniveaus. Ein Signifikanzniveau von α entspricht der maximalen Wahrscheinlichkeit für irrtümliches Ablehnen einer eigentlich richtigen Verteilung, die $(\alpha \cdot 100)\%$ beträgt, umgekehrt ist $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Verteilung als korrekt erkannt wird. Ein sehr kleines α erreichen deshalb nur sehr exakte Verteilungen. Interessant sind deshalb vor allem die Unterschiede der Verteilungen in α , die Verteilung mit dem kleineren α ist wahrscheinlicher. Die Wahrscheinlichkeit α steht ebenfalls direkt im jeweiligen Diagramm unter dem zugehörigen χ^2 -Wert.

Stichprobe A: Für die Gaußverteilung ergibt sich $\chi^2 = 12.19$ bei 6 Freiheitsgraden, dies entspricht $\alpha = 0.05777$. Für die Poissonverteilung ergibt sich $\chi^2 = 9.299$ bei 7 Freiheitsgraden, dies entspricht $\alpha = 0.2319$. Es handelt sich also wahrscheinlich um eine Poissonverteilung, wie bereits oben vermutet.

Stichprobe B: Für die Gaußverteilung ergibt sich $\chi^2 = 1.087$ bei 4 Freiheitsgraden, dies entspricht $\alpha = 0.8963$. Für die Poissonverteilung ergibt sich $\chi^2 = 1.538$ bei 5 Freiheitsgraden, dies entspricht $\alpha = 0.9087$. Es handelt sich also mit höherer Wahrscheinlichkeit um eine Poissonverteilung, jedoch sind beide Signifikanzniveaus sehr hoch, was die Annäherung der Poissonverteilung an die Gaußverteilung für große Mittelwerte widerspiegelt.

A. Quellcode zu Versuch 4

```
/* compile.C
 * Thomas Keck 04/2011
 */

#ifdef __CINT__

#include <iostream>
#include <sstream>
#include <fstream>
#include "TCanvas.h"
#include "TROOT.h"
#include "TGraphErrors.h"
#include "TF1.h"
#include "TLatex.h"
#include "TApplication.h"
#include "TH1F.h"
#include "TRandom.h"
#include "TStyle.h"
using namespace std;

void compile();

bool standaloneApplication(int argc, char*argv[]) {

    compile();
    return true;
}

int main(int argc, char *argv[]) {

    cout << "Enter_standalone_ROOT_Application" << endl;
    cout << "Hello_loved_user!" << endl;

    gROOT->Reset();
    TApplication app("Root_Application", &argc, argv);

    if( standaloneApplication(app.Argc(), app.Argv()) )
        app.Run();
}
```

```
    cout << "Leave_standalone_ROOT_Application" << endl;
    cout << "Have_a_nice_day!" << endl;

    return 0;

}
#endif

void compile() {

    int **matrix = new int*[256];
    for(int i = 0; i < 256; i++)
        matrix[i] = new int[150];

    ofstream file("statistik.txt");
    for(int i = 0; i < 256; i++)
        for(int j = 0; j < 150; j++)
            file >> matrix[i][j];

    int *summe1 = new int[150];
    for(int j = 0; j < 150; j++) {
        summe1[j] = 0;
        for(int i = 70; i < 83; i++)
            summe1[j] += matrix[i][j];
    }

    double mittelwert1 = 0;
    for( int j = 0; j < 150; j++)
        mittelwert1 += summe1[j];
    mittelwert1 /= 150.0;

    int *summe2 = new int[150];
    for(int j = 0; j < 150; j++) {
        summe2[j] = 0;
        for(int i = 0; i < 256; i++)
            summe2[j] += matrix[i][j];
    }

    double mittelwert2 = 0;
    for( int j = 0; j < 150; j++)
        mittelwert2 += summe2[j];
    mittelwert2 /= 150.0;
}
```

```

TCanvas *canvas = new TCanvas("canvas", "Aufgabe_4",
                               100, 10, 700, 1000);

canvas->Divide(2,2);
TH1F *histogram1 = new TH1F("Gauss1",
"Kanal_70-83:Zaehrate_der_einzelnen_Spektren",10,0,10);
TH1F *histogram2 = new TH1F("Gauss2",
"Gesamtzaehrate_der_einzelnen_Spektren",10,10,60);
TH1F *histogram3 = new TH1F("Poisson1",
"Kanal_70-83:Zaehrate_der_einzelnen_Spektren",10,0,10);
TH1F *histogram4 = new TH1F("Poisson2",
"Gesamtzaehrate_der_einzelnen_Spektren",10,10,60);

for(int j = 0; j < 150; j++) {
    histogram1->Fill( summe1[j] );
    histogram3->Fill( summe1[j] );
    histogram2->Fill( summe2[j] );
    histogram4->Fill( summe2[j] );
}

TF1 *fit_function1_g = new TF1("fit_function1_g",
                               "gaus");
TF1 *fit_function1_p = new TF1("fit_function1_p",
                               "[0]*TMath::Poisson(x,[1])");
TF1 *fit_function2_g = new TF1("fit_function2_g",
                               "gaus");
TF1 *fit_function2_p = new TF1("fit_function2_p",
                               "[0]*TMath::Poisson(x,[1])");

fit_function1_g->SetLineColor(2);
fit_function2_g->SetLineColor(2);
fit_function1_p->SetLineColor(2);
fit_function1_p->SetParName(0,"Const");
fit_function1_p->SetParName(1,"Mean");
fit_function1_p->SetParameter(0,2);
fit_function1_p->SetParameter(1,mittelwert1);
fit_function2_p->SetParName(0,"Const");
fit_function2_p->SetParName(1,"Mean");
fit_function2_p->SetLineColor(2);
fit_function2_p->SetParameter(1,mittelwert2);

canvas->cd(1);
gStyle->SetOptFit(1111);
histogram1->SetLineColor(4);

```

```
    histogram1 ->SetLineWidth(3);
    histogram1 ->Fit(fit_function1_g);
    histogram1 ->GetXaxis()->SetTitle("Klassen");
    histogram1 ->GetYaxis()->SetTitle("Anzahl");
    histogram1 ->Draw();

    canvas ->cd(2);
    gStyle ->SetOptFit(1111);
    histogram2 ->SetLineColor(4);
    histogram2 ->SetLineWidth(3);
    histogram2 ->Fit(fit_function2_g);
    histogram2 ->GetXaxis()->SetTitle("Klassen");
    histogram2 ->GetYaxis()->SetTitle("Anzahl");
    histogram2 ->Draw();

    canvas ->cd(3);
    gStyle ->SetOptFit(1111);
    histogram3 ->SetLineColor(4);
    histogram3 ->SetLineWidth(3);
    histogram3 ->Fit(fit_function1_p);
    histogram3 ->GetXaxis()->SetTitle("Klassen");
    histogram3 ->GetYaxis()->SetTitle("Anzahl");
    histogram3 ->Draw();

    canvas ->cd(4);
    gStyle ->SetOptFit(1111);
    histogram4 ->SetLineColor(4);
    histogram4 ->SetLineWidth(3);
    histogram4 ->Fit(fit_function2_p);
    histogram4 ->GetXaxis()->SetTitle("Klassen");
    histogram4 ->GetYaxis()->SetTitle("Anzahl");
    histogram4 ->Draw();

    canvas ->Update();
```

}

Literatur

[Aufgabenstellung] Aufgabenstellung zu den Versuchen P2-72,73,83

[Vorbereitungshilfe] Vorbereitungshilfe zu den Versuchen P2-72,73,83

[Knoll] G.F. Knoll, Radiation Detection and Measurement

[Vogt] H.-G. Vogt, Grundzüge des praktischen Strahlenschutzes