

Auswertung: Gammaspektroskopie

Christine Dörflinger und Frederik Mayer, Gruppe Do-9

7. Mai 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Impulshöhenspektren	3
1.1	Aufnahme eines Impulshöhenspektrums der γ -Strahlung von Cs-137 im Einkanalbetrieb	3
1.2	Aufnahme eines Impulshöhenspektrums der γ -Strahlung von Cs-137, Na-22, Co-60 und der Untergrundstrahlung im Mehrkanalbetrieb	3
1.3	Durchführung einer Energieskalierung, Beschreibung der Impulshöhenspektren	5
2	Bestimmung der Aktivität des Cs-137-Präparats	7
3	Aufgabe 3: Bestimmung unbekannter Elemente anhand ihrer Röntgenlinien	7
3.1	Energiekalibrierung	7
3.2	Bestimmung der unbekanntenen Elemente	7
4	Aufgabe 4: Statistik	8
4.1	Erfassen der Untergrundstrahlung: Stichprobenbildung	8
4.2	Mittelwert, Standardabweichung der Einzelmesswerte, Standardabweichung des Mittelwerts . .	8
4.3	Graphische Darstellung	9
4.3.1	Stichprobe A	11
4.3.2	Stichprobe B	11
4.4	χ^2 -Test	11
4.4.1	Stichprobe A	12
4.4.2	Stichprobe B	12
4.4.3	Anmerkung	14
5	Quellen	14

1 Impulshöhenspektren

1.1 Aufnahme eines Impulshöhenspektrums der γ -Strahlung von Cs-137 im Einkanalbetrieb

CASSY-LAB 2 unterstützt keine Messung im Einkanalbetrieb mehr (die technisch auch nicht mehr relevant ist, da es heutzutage kein Problem mehr ist, im Mehrkanalbetrieb zu messen) und daher wurde keine Messung im Einkanalbetrieb durchgeführt.

1.2 Aufnahme eines Impulshöhenspektrums der γ -Strahlung von Cs-137, Na-22, Co-60 und der Untergrundstrahlung im Mehrkanalbetrieb

Der Versuch wurde mit den unterschiedlichen Proben und ohne Probe (für die Untergrundstrahlung) wie in der Versuchsanleitung beschrieben durchgeführt.

In CASSY ergaben sich folgende Schaubilder:

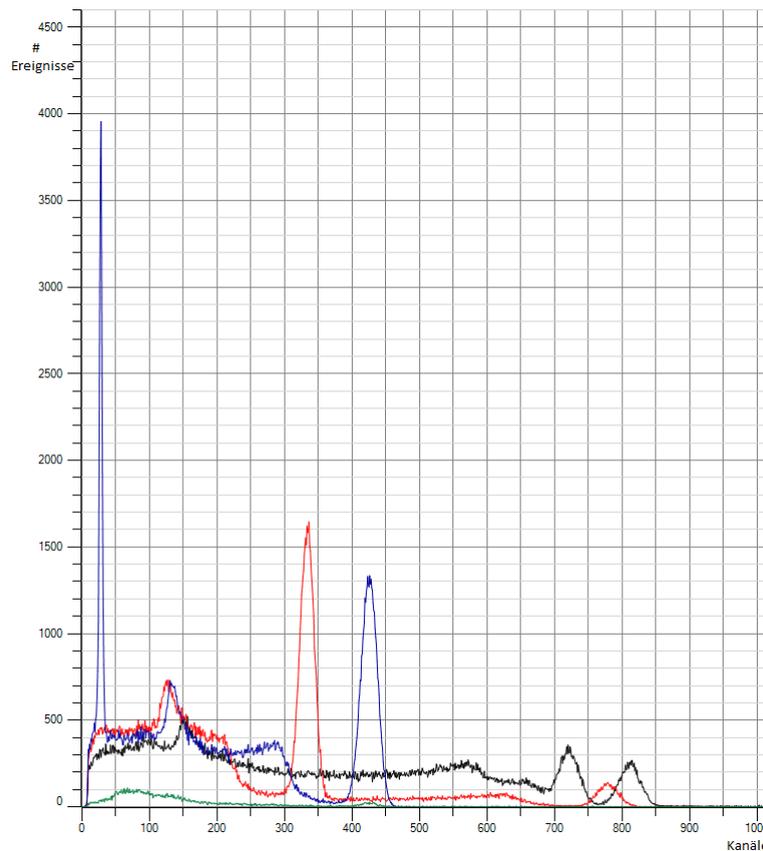


Abbildung 1: In diesem Schaubild sind alle gemessenen Kurven dargestellt: Co-60 (schwarz, Probe GN705), Na-22 (rot, Probe RS797), Cs-137 (blau, Probe 72), Untergrundspektrum (grün). In diesem Schaubild wurde noch keine Energieskalierung durchgeführt, so dass die Anzahl der Ereignisse über die Kanäle des Impulshöhenspektrometers aufgetragen ist.

Bei der Messung von Co-60 wurde die Beschleunigungsspannung so eingestellt, dass der letzte Peak (Photopeak) noch nicht in die Sättigung geht: $U_B = 778V$. Die Proben wurden so positioniert, dass die Zählrate jeweils ungefähr bei 640 1/s lag. Die in der Versuchsbeschreibung verlangten Zählraten von 1000 1/s bis 1500 1/s konnten wir im Versuch nicht mit allen Proben erreichen, weswegen wir eine niedrigere Zählrate wählten.

Ähnliche Zählraten sind anzustreben, damit bei der Messung von unterschiedlichen Proben ähnliche Totzeiten auftreten und damit die Messungen jeweils um einen ähnlichen prozentualen Wert verfälscht werden. Die Totzeit ist der Anteil an der Gesamtzeit, in der der Detektor keine Ereignisse aufnehmen kann (nach Aufnahme eines Ereignisses wird der Detektor kurz inaktiv, d.h. effektiv werden weniger Ereignisse registriert). Sie steigt mit zunehmenden Zählraten an.

Durch die Aufnahme der Untergrundstrahlung lassen sich die Spektren außerdem noch korrigieren. Dies führten wir exemplarisch an der Kurve von Co-60 durch. In CASSY konnte man das Untergrundspektrum direkt von der Co-60-Kurve subtrahieren:

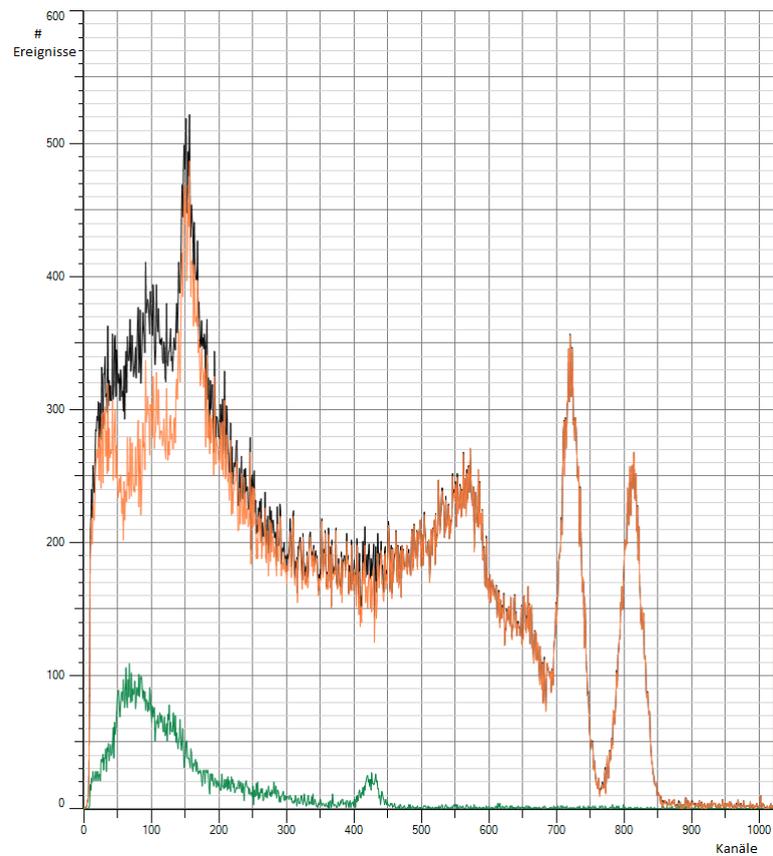


Abbildung 2: Impulshöhenspektrum von Co-60 (schwarz), Untergrundstrahlung (grün), korrigierte Co-60-Kurve (orange).

Es lässt sich allerdings erkennen, dass die sich die korrigierte Kurve von der aufgenommenen nicht signifikant unterscheidet: Die Peaks und die Compton-Kante ändern ihre Position nicht. Vor allem in höheren Kanälen liegen die korrigierte und die unkorrigierte Kurve fast direkt aufeinander. Deshalb werden im Folgenden keine Korrekturen mit der Untergrundstrahlung mehr vorgenommen.

1.3 Durchführung einer Energieskalierung, Beschreibung der Impulshöhenspektren

Zunächst sollte eine Energieskalierung durchgeführt werden: Die Kanalnummern sollten bestimmten Energien zugewiesen werden. Dazu wurde an den Photopeak von Cs-137 ein Gauß-Fit gelegt und die Position des Peaks abgelesen. Diese Kanalnummer wurde dann der Energie des Photopeaks $E_{PP,Cs-137} = 661.66\text{keV}$ zugewiesen. Die Kanalnummern wurden von Cassy dann linear mit der Energie skaliert; es wird eine Gerade durch 0 und den eingegebenen Punkt gelegt.

Damit ergab sich folgendes Schaubild:

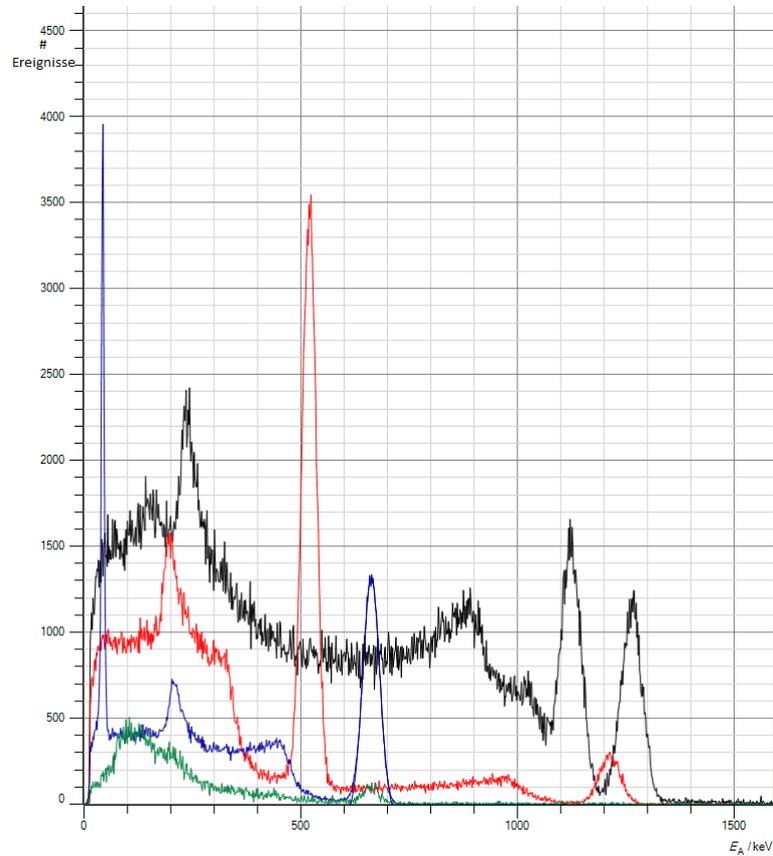


Abbildung 3: Impulshöhenspektrum von Co-60 (schwarz), Na-22 (rot), Cs-137 (blau), Untergrundspektrum (grün); direkt aus CASSY

Mithilfe von Excel lassen sich die Kurven auch schön einzeln darstellen. So kann man die einzelnen Peaks und Kanten leichter identifizieren:

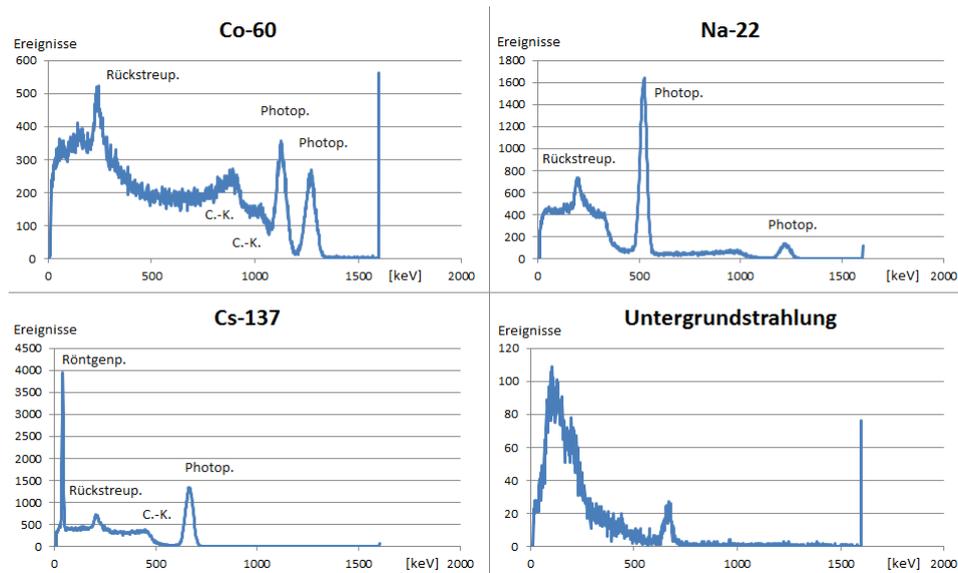


Abbildung 4: Impulshöhenspektren

Theoretisch sollten aus dem Schaubild folgende Werte abzulesen sein:

	Cs-137	Na-22	Co-60
Photopeak	662	511; 1275	1173; 1333
Comptonkante	478	341; 1062	963; 1119
Rückstreupeak	184	170; 213	210; 214
Röntgenlinie	32		

Tabelle 1: Theoretische Energien der Peaks und Comptonkanten in keV

Wir lasen folgende Werte ab:

	für Cs-137 [keV]	δE [%]	f. Na-22 [keV]	δE [%]	f. Co-60 [keV]	δE [%]
Photopeak	661	-0,2	521 und 1215	1,96 und -4,7	1130; 1271	-3,7 und -4,7
Comptonkante	475	-0,6	351, nicht ablesbar	2,9	926 und 1046	-3,8 und -6,5
Rückstreupeak	204	10,9	(*)		153	-28
Röntgenlinie	44	37,5	-		-	

Tabelle 2: Abgelesene Energien; relative Abweichungen von den theoretischen Werten. Bei Na-22(*) konnten die zwei theoretisch vorhandenen Rückstreupeaks nicht voneinander unterschieden werden, was an der begrenzten Energieauflösung des Detektors liegen könnte.

Die meisten Peaks konnten also einigermaßen genau (relativer Fehler meistens kleiner als $\pm 5\%$) abgelesen werden. Die stärksten Abweichungen findet man bei der Röntgenlinie von Cs-137 und beim Rückstreupeak von Co-60 (Verschmierung führt dazu, dass die zwei Rückstreupeaks sowieso nicht unterscheidbar sind). Um den zufälligen Fehler zu reduzieren, könnte man zunächst die Energieskalierung anhand mehrerer Peaks (und nicht nur anhand von einem Peak) durchführen. Sollten die Abweichungen dann immer noch so groß sein, müssen an diesen Stellen systematische Fehler vorliegen.

Da die verschiedenen Energien und Kanten durch eine lineare Energiekalibrierung relativ genau bestimmt wurden, konnte gezeigt werden, dass es sich um eine lineare Apparatur handelt.

Abschließend soll die Anzahl der Elektronen n_e , die bei einem Impuls, der zum Photopeak bei Cs-137 beiträgt, emittiert wurden, bestimmt werden. Hierfür verwendet man die Formel aus der Vorbereitung

$$n_e = \left(\frac{E}{\Delta E}\right)^2 \quad (1)$$

wobei ΔE die Halbwertsbreite und E die Energie, bei der der Impuls auftritt, bezeichnet. Beide Werte konnten mit CASSY durch einen Gauß-Fit bestimmt werden. Es ergibt sich:

$$n_e = \left(\frac{662.3 \text{ keV}}{19.4 \text{ keV}} \right)^2 \approx 1665 \quad (2)$$

2 Bestimmung der Aktivität des Cs-137-Präparats

Nun soll die Aktivität des Cs-137-Präparats bestimmt werden. Dazu bestimmten wir die Zählrate und die Totzeit in Abhängigkeit vom Abstand (15, 10, 6, 4, 3cm).

Damit ließen sich die zugehörigen Nachweiswahrscheinlichkeiten p des Detektors aus einem Schaubild aus der Vorbereitungshilfe des Versuchs ablesen. Die Aktivität ergibt sich dann durch

$$A = \frac{n}{p(d, E) \cdot (1 - t) \cdot \lambda} \quad (3)$$

wobei n die Zählrate, p die Nachweiswahrscheinlichkeit, t die Totzeit in % und λ die Zerfallswahrscheinlichkeit bezeichnet, mit der Cs-137 unter Aussendung von γ -Strahlung (bei 662keV) zerfällt. Es ergeben sich dann folgende Werte:

Abstand d	15	10	6	4	3
Zählrate in $\frac{1}{s}$	187	360	758	1263	1751
Totzeit in %	0,01	0,03	0,06	0,09	0,12
Nachweiswahrscheinlichkeit p	0,0008	0,0017	0,004	0,008	0,012
Zerfallswahrscheinlichkeit λ	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946
Aktivität in $\frac{1}{s}$	2,49E+05	2,31E+05	2,13E+05	1,83E+05	1,75E+05

Tabelle 3: Messwerte, berechnete Werte für die Aktivität für unterschiedliche Abstände

Daraus ergibt sich ein Mittelwert von $A = 2.1 \cdot 10^5 \frac{1}{s}$. Bei den für die Aktivität berechneten Werten lässt sich eine leichte Abhängigkeit der Aktivität vom Abstand erkennen, was physikalisch nicht sinnvoll ist. Hier muss ein systematischer Fehler vorhanden sein.

3 Aufgabe 3: Bestimmung unbekannter Elemente anhand ihrer Röntgenlinien

3.1 Energiekalibrierung

Wie in Aufgabe 1 wurde zunächst eine Energiekalibrierung durchgeführt. Dazu wurden die Barium- (32.19 keV, über Gauß-Näherung: CH73) und die $Pb - K_{\alpha}$ -Röntgenlinie (74.2keV, CH164) verwendet: Einmal wurde der γ -Strahler in 0.6cm Abstand vor die Sonde gehalten, einmal war ein 0.6cm dickes Bleiplättchen dazwischen.

3.2 Bestimmung der unbekanntenen Elemente

Nun wurden zwei Proben B und C wie das Bleiplättchen zwischen Cs-137-Probe und Sonde gebracht. Mittels CASSY konnten nun die zugehörigen Energien des Röntgenpeaks bestimmt werden:

	Z	Z^2	E in keV
Barium	56	3136	32,19
Blei	82	6724	74,2
Probe B	73,2	5361,5	58,2
Probe C	74,3	5515,2	60

Tabelle 4: Eichwerte, gemessene Werte für Probe B und C, abgelesene Z^2 für B und C, berechnete Z

Dies lässt sich in einem Schaubild folgendermaßen darstellen:

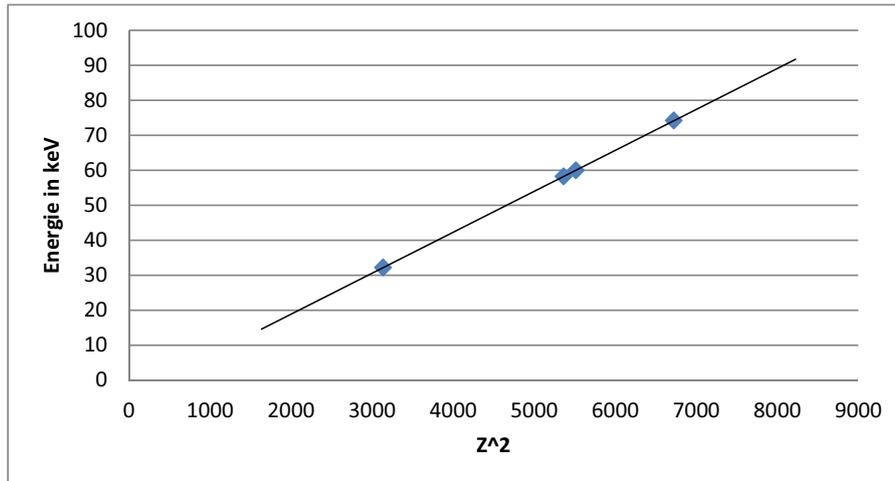


Abbildung 5: E-Z²-Schaubild, linearer Fit an Barium- und Blei-Punkte, Probe B und Probe C wurden so eingetragen, dass sie auf dem linearen Fit liegen

Daraus kann geschlossen werden, dass es sich bei Probe B um Tantal und bei Probe C um Wolfram handelt, denn Tantal besitzt die Ordnungszahl 73 und Wolfram die Ordnungszahl 74.

4 Aufgabe 4: Statistik

4.1 Erfassen der Untergrundstrahlung: Stichprobenbildung

Wir nahmen 154 verschiedene Spektren bei 256 Kanälen gemäß Versuchsbeschreibung auf. Mit Excel wurden nun zwei verschiedene Stichproben gebildet: Stichprobe A wurde von Kanal 5 bis Kanal 52 so gewählt, dass im Mittel 2,96 Ereignisse erfasst wurden. Für Stichprobe B wurden alle Messwerte verwendet.

4.2 Mittelwert, Standardabweichung der Einzelmesswerte, Standardabweichung des Mittelwerts

Zur Berechnung dieser Größen wurden folgende Formeln verwendet und mit Excel ausgewertet:

Mittelwert x_m :

$$x_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (4)$$

Standardabweichung der Einzelmesswerte s :

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - x_m)^2} \quad (5)$$

Standardabweichung des Mittelwerts s_m :

$$s_m = \frac{s}{\sqrt{N}} \quad (6)$$

Die Bedingung für eine Poissonverteilung wurde überprüft indem $\sqrt{x_m}$ mit s verglichen wurde.

Dabei ergab sich:

	Stichprobe B	Stichprobe A
x_m	24,688	2,961
s	5,257	2,240
s_m	0,423	0,180
$s = \sqrt{x_m} ?$	4,969	1,721

Tabelle 5: Mittelwert, Standardabweichung der Einzelmesswerte, Standardabweichung des Mittelwerts

Probe A:

$\sqrt{2,961} = 1,721$ weicht um ca. 23,6% von $s = 2,240$ ab. Daher kann man nicht mit Sicherheit sagen, ob hier eine Poissonverteilung vorliegt.

Probe B:

$\sqrt{24,688} = 4,969$ weicht um ca. 5,5% von $s = 5,257$ ab. Man kann also sagen, dass die Bedingung für die Poissonverteilung erfüllt ist.

4.3 Graphische Darstellung

Für die graphische Darstellung muss man beachten, dass sowohl die Gaußverteilung als auch die Poissonverteilung normiert sind. Daher wurden die unten genannten Formeln mit $n = 154$ multipliziert.

Die Verteilungen wurden mit x_m und s aus Tabelle 5 folgendermaßen bestimmt:

Gauß:

$$P_g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot s} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k-x_m}{s}\right)^2} \quad (7)$$

Poisson:

$$P_p(k) = \frac{x_m^k \cdot e^{-x_m}}{k!} \quad (8)$$

Klassen	Stichprobe B	Stichprobe A	Gauß A	Poisson A	Gauß B	Poisson B
1	0	34	18,6965	23,6055	0,0005	0,0000
2	0	37	25,0159	34,9479	0,0011	0,0000
3	0	28	27,4231	34,4936	0,0024	0,0000
4	0	22	24,6300	25,5339	0,0051	0,0000
5	0	21	18,1241	15,1212	0,0105	0,0002
6	0	8	10,9269	7,4623	0,0211	0,0009
7	0	4	5,3974	3,1566	0,0407	0,0032
8	0	0	2,1843	1,1683	0,0758	0,0100
9	0	0	0,7242	0,3844	0,1362	0,0274
10	0	0	0,1967	0,1138	0,2359	0,0677
11	1	0	0,0438	0,0306	0,3942	0,1520
12	2	0	0,0080	0,0076	0,6352	0,3127
13	0	0	0,0012	0,0017	0,9872	0,5938
14	0	0	0,0001	0,0004	1,4797	1,0471
15	0	0	0,0000	0,0001	2,1392	1,7234
16	1	0	0,0000	0,0000	2,9828	2,6593
17	4	0	0,0000	0,0000	4,0113	3,8620
18	4	0	0,0000	0,0000	5,2027	5,2970
19	12	0	0,0000	0,0000	6,5082	6,8828
20	13	0	0,0000	0,0000	7,8520	8,4962
21	9	0	0,0000	0,0000	9,1366	9,9885
22	14	0	0,0000	0,0000	10,2537	11,2090
23	11	0	0,0000	0,0000	11,0985	12,0318
24	9	0	0,0000	0,0000	11,5860	12,3769
25	7	0	0,0000	0,0000	11,6652	12,2226
26	13	0	0,0000	0,0000	11,3276	11,6059
27	9	0	0,0000	0,0000	10,6090	10,6123
28	10	0	0,0000	0,0000	9,5829	9,3571
29	5	0	0,0000	0,0000	8,3485	7,9659
30	7	0	0,0000	0,0000	7,0146	6,5555
31	4	0	0,0000	0,0000	5,6845	5,2208
32	8	0	0,0000	0,0000	4,4429	4,0279
33	1	0	0,0000	0,0000	3,3491	3,0134
34	5	0	0,0000	0,0000	2,4349	2,1881
35	2	0	0,0000	0,0000	1,7073	1,5434
36	2	0	0,0000	0,0000	1,1546	1,0585
37	0	0	0,0000	0,0000	0,7531	0,7063
38	0	0	0,0000	0,0000	0,4738	0,4589
39	0	0	0,0000	0,0000	0,2874	0,2905
40	0	0	0,0000	0,0000	0,1682	0,1793
41	1	0	0,0000	0,0000	0,0949	0,1080

Tabelle 6: Übersicht Messung und theoretische Erwartungen

4.3.1 Stichprobe A

Hier ist erkennbar, dass sich die Gaußkurve deutlich von der Poissonverteilung unterscheidet. Man kann bereits annehmen, dass die Gaußverteilung keine gute Näherung für die Messung darstellt (für Klassen 1 und 2 ist die Kurve deutlich zu niedrig).

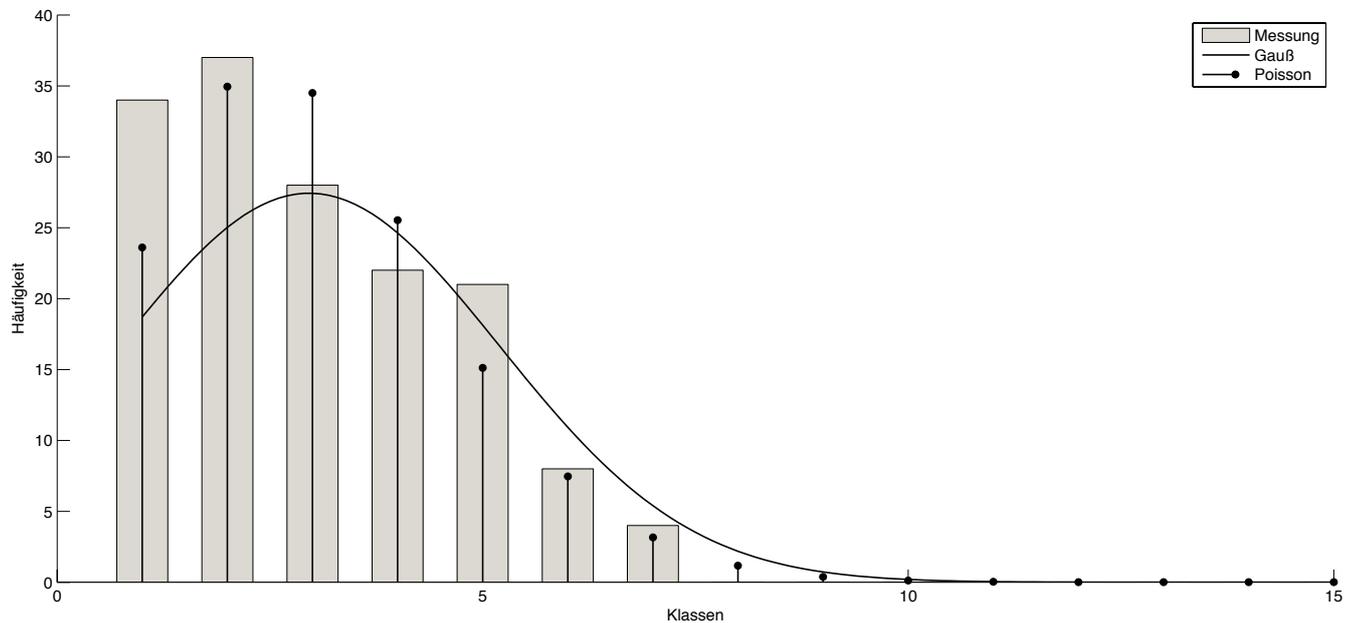


Abbildung 6: Poisson- und Gaußverteilung für Stichprobe A

4.3.2 Stichprobe B

Man sieht, dass sich im Vergleich zu Abbildung 6 die Poissonverteilung und die Gaußkurve sich deutlich ähnlicher sehen.

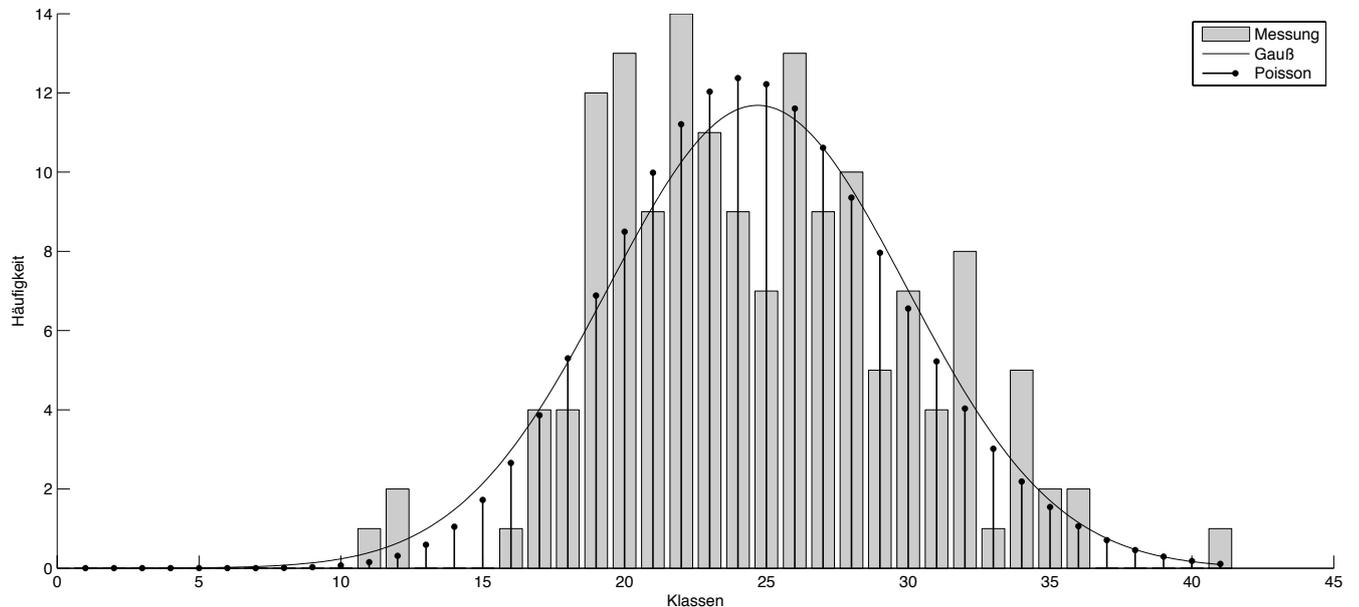


Abbildung 7: Poisson- und Gaußverteilung für Stichprobe B

4.4 χ^2 -Test

Für den χ^2 -Test wurde folgende Formel verwendet (siehe Vorbereitung):

$$\chi^2 = \sum_k \frac{(B_k - E_k)^2}{E_k} \quad (9)$$

Um den χ^2 -Test auszuwerten wurden die Freiheitsgrade mit $n = 1$ folgendermaßen berechnet:

$$FG = \text{Klassen} - 1 - n \quad (10)$$

4.4.1 Stichprobe A

Für den χ^2 -Test wurden bei Stichprobe A die Klassen 7 bis 41 zusammengelegt.

Wie sich aus Tabelle 7 ablesen lässt, kamen wir für die Poissonverteilung auf ein $\chi_p^2 = 8,8868$ und für die Gaußverteilung auf $\chi_g^2 = 22,226$. Je kleiner der Wert für χ^2 , desto besser passt die theoretische Verteilung zur tatsächlich gemessenen. Da wir für beide theoretischen Verläufe die gleichen Freiheitsgrade betrachten, sieht man anhand des χ^2 -Tests, dass hier (kleine Stichprobe), die Poissonverteilung deutlich besser ist.

Für die Irrtumswahrscheinlichkeit α aus der ergibt sich:

- Gauß: $\chi_g^2 = 22,226 > 20,52 \implies \alpha < 0,1\% \implies$ Eine Gaußverteilung kann nahezu ausgeschlossen werden!
- Poisson: $\chi_p^2 = 8,8868 > 9,24 \implies \alpha = 10\% \implies$ Die Poissonverteilung liegt unter dem Grenzwert, ab dem man die Verteilung zu 90% hätte ausschließen können. Daher liegt hier mit einer deutlich höheren Wahrscheinlichkeit eine Poisson-, statt einer Gaußverteilung vor.

Klassen	Häufigkeit	Wert Poisson	Wert Gauß
1	34	23,6055	18,6965
2	37	34,9479	25,0159
3	28	34,4936	27,4231
4	22	25,5339	24,6300
5	21	15,1212	18,1241
6	8	7,4623	10,9269
7 bis 41	4	4,8634	8,5558
FG: 5	χ^2 :	8,8868	22,2266

Tabelle 7: Übersicht zum χ^2 -Test Stichprobe A

4.4.2 Stichprobe B

Für den χ^2 -Test wurden hier für die Poissonverteilung die Klassen 1 bis 16 sowie 34 bis 41 zusammengefasst. Um die Gaußverteilung auszuwerten wurden die Klassen 1 bis 14, 15 und 16, 33 und 34, sowie 35 bis 41 zusammengelegt (siehe Tabellen 8 und 9).

Es ergaben sich folgende Ergebnisse aus den χ^2 -Test :

- Gauß: $\chi_g^2 = 20,916$, was bei 18 Freiheitsgraden eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha > 10\%$ liefert.
- Poisson: $\chi_p^2 = 20,6985$ führt bei 17 Freiheitsgraden auf $\alpha > 10\%$

Somit können wir für Stichprobe B keine konkrete Aussage darüber treffen, ob nun die Poisson- oder die Gaußverteilung die Messung besser widerspiegeln. Beide Verteilungen liegen unter dem Grenzwert, ab dem man sie zu 90% hätte ausschließen können.

Klassen	Häufigkeit	Wert Poisson
1 bis 16	4	6,5978
17	4	3,8623
18	4	5,2974
19	12	6,8833
20	13	8,4967
21	9	9,9889
22	14	11,2094
23	11	12,0321
24	9	12,3770
25	7	12,2225
26	13	11,6057
27	9	10,6120
28	10	9,3567
29	5	7,9655
30	7	6,5550
31	4	5,2204
32	8	4,0275
33	1	3,0131
34 bis 41	10	6,4249
FG: 17	χ^2 :	20,6985

Tabelle 8: χ^2 -Test Poissonverteilung, Stichprobe B

Klassen	Häufigkeit	Wert Gauß
1 bis 14	3	4,0254
15 und 16	1	5,1221
17	4	4,0113
18	4	5,2027
19	12	6,5082
20	13	7,8520
21	9	9,1366
22	14	10,2537
23	11	11,0985
24	9	11,5860
25	7	11,6652
26	13	11,3276
27	9	10,6090
28	10	9,5829
29	5	8,3485
30	7	7,0146
31	4	5,6845
32	8	4,4429
33 und 34	6	5,7840
35 bis 41	5	4,6394
FG:18	χ^2 :	20,9160

Tabelle 9: χ^2 -Test Gaußverteilung, Stichprobe B

4.4.3 Anmerkung

Die in der Vorbereitungshilfe aufgeführte Liste (Freiheitsgrade über Irrtumswahrscheinlichkeit) hat uns zur Auswertung nicht ausgereicht. Die verwendete Tabelle wird in der Quellenangabe aufgeführt.

Unsere Erwartungen zu dem Versuch wurden sehr gut bestätigt. Für kleinere Mittelwerte und wenige Wiederholungen der Messung (Stichprobe A) passt die Poissonverteilung besser zur Messung. Für größere Mittelwerte und mehr Messwerte nähert sich die Gaußverteilung an die Poissonverteilung an (auch im Schaubild gut erkennbar). Die Qualität der Näherungen ist mit dem χ^2 -Test kaum zu unterscheiden.

5 Quellen

- Die Irrtumswahrscheinlichkeit α wurde entnommen aus: http://de.wikipedia.org/wiki/Chi-Quadrat-Test#Tabelle_der_Quantile_der_Chi-Quadrat-Verteilung