

Vorbereitung: Gamma-Spektroskopie und Statistik

Christine Dörflinger und Frederik Mayer, Gruppe Do-9

26. April 2012

Inhaltsverzeichnis

0	Allgemeines	3
0.1	Strahlungsarten	3
0.2	Wechselwirkungen von γ -Strahlung mit Materie	3
0.2.1	Comptonstreuung	3
0.2.2	Fotoeffekt	3
0.2.3	Paarbildung	3
0.3	Aufbau und Wirkungsweise des Szintillationszählers	3
0.4	Spektren	4
1	Aufgabe 1: Aufnahme von Impulshöhenspektren	5
1.1	Impulshöhenspektrum der γ -Strahlung von Cs-137 im Einkanalbetrieb des Impulshöhenanalysators	5
1.2	Impulshöhenspektren von Cs-137, Na-22 und Co-60 sowie das Untergrundspektrum; Messung im 1024-Kanalbetrieb	5
1.3	Beschreibung der aufgenommenen Impulshöhenspektren	6
2	Aufgabe 2: Bestimmung der Aktivität des Cs-137-Präparats	6
3	Röntgenemission	6
3.1	Energiekalibration anhand der Ba und Pb- K_{α} -Röntgenlinie	7
3.2	Bestimmung des unbekanntes Elements	7
4	Statistik	7
4.1	Erfassung der Untergrundstrahlung	7
4.2	Mittelwert, Standardabweichung der Einzelmesswerte, Standardabweichung des Mittelwerts	7
4.3	Graphische Darstellung von Poisson- und Gaußverteilung	7
4.4	χ^2 -Test	8
5	Quellen	8

0 Allgemeines

0.1 Strahlungsarten

Bei radioaktivem Zerfall können drei Arten von Strahlungen entstehen: α -Strahlung (geladene Heliumkerne), β (Elektronen oder Positronen) und γ -Strahlung (hochenergetische elektromagnetische Strahlung). α -Strahlung weist geringe Eindringtiefen auf, während γ -Strahlung hohe Eindringtiefen aufweist. Da γ -Strahlen ungeladen sind, sind sie schwer abzuschirmen.

0.2 Wechselwirkungen von γ -Strahlung mit Materie

Trifft γ -Strahlung auf Materie, können unterschiedliche Wechselwirkungen auftreten:

0.2.1 Comptonstreuung

Comptonstreuung tritt meistens dann auf, wenn ein γ -Quant auf ein Elektron in einer äußeren Atomhülle trifft. Solche Elektronen sind quasifrei, sodass Energie- und Impulserhaltung verwendet werden können. Es findet zwischen γ -Quant und Elektron also ein elastischer Stoß statt, bei dem der γ -Quant einen Teil seiner Energie an das Elektron abgibt (das sich dann mit dieser kinetischen Energie, abzüglich der Austrittsarbeit, fortbewegt), dabei selbst gestreut wird und durch die abgegebene Energie eine Erhöhung der Wellenlänge erfährt. Dabei haben γ -Quant und Elektron nach dem Stoß einen solchen Winkel zur ursprünglichen Bewegungsrichtung, dass Impuls und Energie des Systems beibehalten werden.

Der γ -Quant hat nach dem Stoß die Energie:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos(\phi))} \quad (1)$$

Betrachtet man die vom γ -Quant abgegebene Energie in Abhängigkeit von seinem Streuwinkel θ , so wird diese bei $\theta = \pi$ (also Rückstreuung) maximal. Detektiert man die Energie der gestreuten Elektronen und trägt die Anzahl $N(E)$ (oder $\frac{dN}{dE}$) über ihrer Energie E auf, so ergibt sich im Schaubild bei einer bestimmten Energie ein charakteristischer Abfall in der Anzahl der detektierten Elektronen, die sogenannte Compton-Kante: Bei Rückstreuung des γ -Quants ist die maximale Energie erreicht, die per Compton-Effekt an ein Elektron abgegeben werden kann.

Comptonstreuung tritt eher bei niedrigeren Energien der γ -Quanten und hohen Ordnungszahlen der Atome auf.

0.2.2 Fotoeffekt

Zum Fotoeffekt kommt es dann, wenn ein γ -Quant auf ein Atom trifft, seine gesamte Energie an das Atom abgibt und ein Elektron aus einer inneren Schale des Atoms löst. Die abgegebene abzüglich der Ablöseenergie ergibt die kinetische Energie des Elektrons. Das nun angeregte Atom relaxiert dann wieder, indem ein Elektron aus einer äußeren Schale in das 'Elektronenloch' fällt, wobei ein Photon emittiert wird.

0.2.3 Paarbildung

Bei hohen γ -Quanten-Energien (größer als die doppelte Ruheenergie des Elektrons von 0.51 MeV, also 1.02 MeV) kann es zur Paarbildung kommen. Hierbei entsteht aus dem γ -Quant ein Elektron-Positron-Paar. Es gilt die Beziehung

$$E_\gamma = hf_\gamma = 2m_0c^2 + E_{kin} \quad (2)$$

wobei E_{kin} die Bewegungsenergie und m_0 die Ruhemasse von Elektron und Positron ist. Anschließend zerstrahlt das Positron wieder in Quanten. Die in unseren Versuchen auftretenden Energien sind allerdings zu gering, als dass Paarbildung auftreten könnte.

0.3 Aufbau und Wirkungsweise des Szintillationszählers

Ein Szintillationszähler ist folgendermaßen aufgebaut:

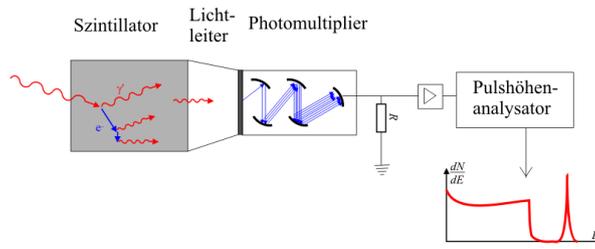


Abbildung 1: Aufbau eines Szintillationszählers

Er besteht also hauptsächlich aus einem Szintillationskristall, einer Photokathode und einem Photomultiplier.

Ein Szintillationskristall besteht aus einem Material, das unter γ -Bestrahlung Photonen emittiert, da die durch Photo- und Comptoneffekt freierwerdenden Elektronen andere Atome anregen (was wiederum zu Photonemission führt). Voraussetzungen für den Szintillationskristall sind also eine hohe Dichte und eine optische Transparenz für die emittierten Photonen.

Durch die dann auf die Photokathode (zwischen Lichtleiter und Photomultiplier) auftreffenden Photonen werden von der Photokathode wiederum Elektronen emittiert, die im Photomultiplier (oder Sekundärelektronenvervielfacher: SEV) unter Ausnutzung des Fotoeffekts vervielfacht werden: Wiederholtes Beschleunigen und anschließendes Auftreffen der Elektronen auf sogenannte Dynoden (Elektroden), aus denen wiederum Elektronen herausgeschlagen werden, führt zu einer starken Vervielfachung der Anzahl der Elektronen von bis zu einem Faktor von einer Milliarde, wodurch sich ein messbarer Strom ergibt.

0.4 Spektren

Der vom Szintillationszählers ausgegebene elektrische Spannungsimpuls ist proportional zur Energie der einfallenden γ -Quanten. Es kann also ein Spektrum aufgenommen werden, indem die relative Häufigkeit von γ -Quanten (d.h. die Anzahl der auftretenden Spannungsimpulse einer bestimmten Höhe) gegen ihre Energie (von der Höhe der Impulse abhängig; zur praktischen Durchführung werden Spannungsbereiche ΔU eingeteilt) aufgetragen wird.

Die Aufnahme eines Spektrums kann im Einkanal- und im Vielkanalmodus erfolgen. Bei der Einkanalanalyse werden die Spannungsbereiche nacheinander einzeln für einen bestimmten Zeitraum betrachtet und die Anzahl der Spannungsimpulse gezählt. Bei Vielkanalanalyse werden hingegen alle Spannungsbereiche gleichzeitig betrachtet (beispielsweise 1024 Stück). Ein Spektrum kann so in viel kürzerer Zeit aufgenommen werden. Die Zählrate (Mittelwert über alle Kanäle) bei der Aufnahme eines Spektrums lässt sich vor allem durch die Positionierung des Strahlers beeinflussen.

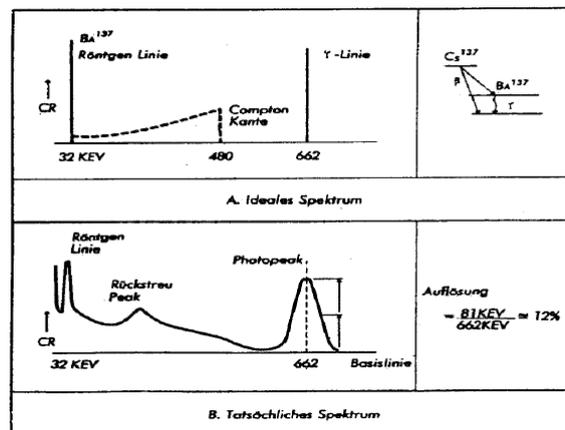


Abbildung 2: Ideales und tatsächliches Spektrum; aus Vorbereitungshilfe entnommen

In Abbildung 2 ist der theoretische Verlauf eines solchen Spektrums (erzeugt durch Compton- und Photoeffekt) dargestellt. Es fällt jedoch auf, dass das tatsächliche Spektrum vom idealen Spektrum erheblich abweicht. Der Verlauf des Spektrums lässt sich erklären durch:

- **Rückstreupeaks** entstehen, wenn Photonen mit anderen Materialien als dem Kristall wechselwirken und zurückgestreut werden.

- **Escape-Peak / Photopeak:** Ein solcher Peak entsteht, wenn γ -Quanten, die bei der Paarbildung entstanden sind, aus dem Kristall austreten. Der Peak befindet sich bei einer hohen Energie.
- Die **Comptonkante** entsteht, da Photonen bei Rückstreuung ($\theta = \pi$) einen maximalen Energiewert annehmen, der beim Comptoneffekt nicht überschritten werden kann. Über diesem Energiewert tragen durch den Comptoneffekt keine Photonen mehr zum Spektrum bei und es kommt zu einem Abfall der registrierten Photonen. Es entsteht daher eine charakteristische Kante.
- **Röntgenlinie:** Die Röntgenlinie tritt dadurch auf, dass durch γ -Quanten Elektronen aus der inneren Schale der Atome des Kristalls geschlagen werden. Das dabei entstehende Loch wird dann von einem Atom aus einer äußeren Schale aufgefüllt. Es gibt dabei Energie ab, die es als Photon abstrahlt. Diese abgestrahlte Energie ist für jedes Element spezifisch, daher entsteht eine charakteristische Linie im Spektrum. Die Frequenz der abgestrahlten Photonen lässt sich mit dem Mosleyeschen Gesetz berechnen:

$$f = f_{\mathbb{R}} \cdot (Z - K)^2 \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (3)$$

wobei $f_{\mathbb{R}}$ die Rydberg-Frequenz, Z die Ordnungszahl des Elements, K die Abschirmungskonstante und n_1 und n_2 die Hauptquantenzahlen der beiden Zustände des Elektrons sind. Für den K_{α} -Übergang (Übergang von der 2. in die 1. Schale) lautet es näherungsweise:

$$f_{K_{\alpha}} = f_{\mathbb{R}} \cdot (Z - 1)^2 \cdot \frac{3}{4} \quad (4)$$

- **Totzeit:** Da sich die γ -Quanten einige Zeit im Szintillator sind, und dort unterschiedlich oft wechselwirken können, kann es vorkommen, dass aus der Photokathode durch mehrere γ -Quanten gleichzeitig Elektronen gelöst werden. In der Messung erscheint dies dann als ein Peak höherer Energie (**Pile-Ups**).

Nach der Registrierung eines Ereignisses wird der Detektor kurz deswegen kurz 'inaktiv' und kann keine neuen Ereignisse registrieren (ohne dass ein Pile-Up auftreten würde). Die **Totzeit** ist der prozentuale Anteil an der Gesamtzeit, in der der Detektor inaktiv ist.

Die in unseren Versuchen aufgenommenen Spektren werden aufgrund statistischer Effekte und des begrenzten Auflösungsvermögens der Apparatur (begrenzte Energieauflösung \rightarrow Spannungsbereiche ΔU) verschmiert dargestellt sein.

1 Aufgabe 1: Aufnahme von Impulshöhenspektren

1.1 Impulshöhenspektrum der γ -Strahlung von Cs-137 im Einkanalbetrieb des Impulshöhenanalytors

Wie in der Versuchsanleitung beschrieben werden die Daten mithilfe des CASSY-LAB-Systems aufgenommen. Um eine Messung im Einkanalbetrieb durchzuführen, werden zweckmäßige Spannungs- und Zeitintervalle definiert. Außerdem wird die Probe so vor dem Detektor positioniert, dass sich eine passende Zählrate ergibt. Die Betriebsspannung des SEV wird so hoch eingestellt, dass die Impulse der Röntgenlinie gerade noch im Messbereich ist.

Der Unterschied zwischen Ein- und Mehrkanalbetrieb besteht darin, dass im Einkanalbetrieb jeder Spannungsbereich einzeln für eine bestimmte Zeit untersucht wird (also seriell), während im Mehrkanalbetrieb alle Kanäle gleichzeitig (parallel) untersucht werden. Vergleichbare Messungen im Einkanalbetrieb beanspruchen deshalb wesentlich mehr Zeit.

1.2 Impulshöhenspektren von Cs-137, Na-22 und Co-60 sowie das Untergrundspektrum; Messung im 1024-Kanalbetrieb

Die Aufnahme der Spektren erfolgt nun im Vielkanalbetrieb des Systems. Der SEV wird so eingestellt, dass das Impulshöhenspektrum von Co-60 den Messbereich voll ausnutzt, da dessen Strahlung höherenergetisch ist. Für die Messung von Cs-137 und Na-22 wird er nicht verändert. Außerdem wird bei der Messung darauf geachtet, dass die Zählraten der unterschiedlichen Proben ungefähr gleich sind und zwischen 1000/s und 1500/s liegen.

Außerdem wird ein Spektrum der Untergrundstrahlung aufgenommen.

1.3 Beschreibung der aufgenommenen Impulshöhenspektren

Die unterschiedlichen Wechselwirkungen von γ -Strahlung mit Materie wurden bereits beschrieben.

Zur Analyse der aufgenommenen Impulshöhenspektren soll anhand des Photopeaks / Escapepeaks von Cs-137 eine Energieskalierung vorgenommen werden, damit die unterschiedlichen Spektren verglichen werden können. Diese Energie lässt sich über $E = h \cdot f$ berechnen, wobei sich f mit dem Mosleyeschen Gesetz berechnen lässt.

Die Lage der Compton-Kante, liegt an der Stelle, wo der Gamma-Quant die maximal mögliche Energie an das Elektron abgibt. Mit $\theta = \pi$ ergibt sich also

$$E_{max} = E_{\gamma} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{E_{\gamma}}{m_0 c^2} (1 - \cos(\theta))} \right) = E_{\gamma} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{2E_{\gamma}}{m_0 c^2}} \right) \quad (5)$$

Dabei bezeichnet m_0 die Elektronenmasse und E_{γ} die Energie des Gamma-Quants. Damit lassen sich also die Energien der Comptonkanten ausrechnen.

Comptonkanten, Photopeaks, Rückstreupeaks und Röntgenlinie (Cs-137) treten bei folgenden Energien auf:

	Cs-137	Na-22	Co-60
Photopeak	662	511; 1275	1173; 1333
Comptonkante	478	341; 1062	963; 1119
Rückstreupeak	184	170; 213	210; 214
Röntgenlinie	32		

Tabelle 1: Theoretische Energien der Peaks und Comptonkanten in keV

Um die Anzahl der von der Photokathode bei einem Impuls, der zu einem Photopeak (Escapepeak) beiträgt, emittierten Elektronen abzuschätzen, verwendet man die Beziehung

$$n_e = \left(\frac{E}{\Delta E} \right)^2 \quad (6)$$

wobei ΔE die Halbwertsbreite des Peaks und E die Energie, bei der der Peak auftritt, bezeichnet.

2 Aufgabe 2: Bestimmung der Aktivität des Cs-137-Präparats

Die Aktivität oder Zerfallsrate A ist definiert über $A = -\frac{dN}{dt}$ und beschreibt die negative zeitliche Änderung der Anzahl der noch nicht zerfallenen Atome.

Beim im Versuch verwendeten Detektor hängt die Zählrate allerdings von der Energie E des Quants und vom Abstand der Probe d vom Detektor ab. Die dazu gehörige Nachweiswahrscheinlichkeit eines emittierten Quants lässt sich aus Abbildung 4 der Vorbereitungshilfe ablesen.

Die Aktivität ergibt sich dann folgendermaßen aus Zählrate n und Nachweiswahrscheinlichkeit $p(d,E)$ des Detektors, der Totzeit t in % und der Zerfallswahrscheinlichkeit λ , mit der Cs-137 unter Aussendung von γ -Strahlung (bei 662keV) zerfällt:

$$A = \frac{n}{p(d, E) \cdot (1 - t) \cdot \lambda} \quad (7)$$

Die Aktivität soll für unterschiedliche d gemessen werden. Daraus kann geschlossen werden, ob bei hohen Zählraten eine Totzeitkorrektur notwendig ist.

3 Röntgenemission

Wie bereits oben beschrieben, können Materialien mit höheren Ordnungszahlen Röntgenstrahlung emittieren. Die Frequenz dieser Strahlung berechnet sich mit dem Mosleyeschen Gesetz, im Spezialfall für den K_{α} -Übergang lautet es

$$f_{K_{\alpha}} = f_{\mathbb{R}} \cdot (Z - 1)^2 \cdot \frac{3}{4}. \quad (8)$$

3.1 Energiekalibration anhand der Ba und Pb- K_α -Röntgenlinie

Zunächst wird ein E_{K_α} -Kanal-Schaubild erstellt (vgl. letzte Seite der Vorbereitungshilfe), indem Messungen wie in der Versuchsanleitung beschrieben mit unterschiedlichen Elementen durchgeführt werden. Da nach dem Moseleyschen Gesetz die Energie der Röntgenlinie linear proportional zum Quadrat der Ordnungszahl Z^2 ist, kann eine Eichung durchgeführt werden: Anhand der Ba und Pb- K_α -Röntgenlinien werden den Kanälen des Schaubilds mithilfe einer linearen Skalierung Z^2 -Werte zugewiesen. Im Schaubild ergeben Röntgenpeaks beliebiger Elemente eine Gerade, sodass man einfach einen linearen Fit durch die Punkte von Ba und Pb- K_α legen kann. Führt man nun weitere Messungen mit anderen Elementen durch, so müssen die Werte auch auf der Gerade liegen, sodass man durch Bestimmung der Energie des Röntgenpeaks auf Z^2 schließen kann.

3.2 Bestimmung des unbekanntes Elements

Misst man nun die Energie eines emittierten Quants eines beliebigen Elements, lässt sich aus dem in der letzten Aufgabe erstellten Diagramm das zugehörige Z^2 ablesen. Damit kann das Element bestimmt werden.

4 Statistik

4.1 Erfassung der Untergrundstrahlung

Bei einer Messzeit von 1s werden mit 256 Kanälen mindestens 150 Spektren aufgenommen. Dabei ist das Ergebnis nicht vorhersehbar (Zufall bei radioaktivem Zerfall) und kann nur statistisch erfasst werden.

Es werden zwei Stichproben gebildet:

- Die Zählrate aus einem Teil des Spektrums wird so aufintegriert, dass der Mittelwert der 150 Summen ungefähr 3 beträgt.
- Für die zweite Stichprobe wird die Gesamtzählrate der einzelnen Spektren verwendet.

Mit Excel wird nun die Häufigkeitsverteilung für verschiedene Klassen (Häufigkeitsgruppen) analysiert.

4.2 Mittelwert, Standardabweichung der Einzelmesswerte, Standardabweichung des Mittelwerts

Mittelwert x_m :

$$x_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (9)$$

Standardabweichung der Einzelmesswerte s :

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - x_m)^2} \quad (10)$$

Standardabweichung des Mittelwerts s_m :

$$s_m = \frac{s}{\sqrt{N}} \quad (11)$$

In der Auswertung soll außerdem überprüft werden ob es sich hierbei um eine Poissonverteilung handelt. Dazu wird überprüft ob die wie oben berechneten Werte für die Standardabweichung der Einzelmesswerte $s = \sqrt{x_m}$ entsprechen.

4.3 Graphische Darstellung von Poisson- und Gaußverteilung

Die Poissonverteilung wird mit folgender Funktion dargestellt:

$$P_p(k) = \frac{x_m^k \cdot e^{-x_m}}{k!} \quad (12)$$

Die Gaußverteilung, bzw. Normalverteilung wird beschrieben durch:

$$P_g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot s} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k-x_m}{s}\right)^2} \quad (13)$$

Je größer der Mittelwert, desto mehr ähnelt die Poissonverteilung der Gaußkurve. Im Umkehrschluss bedeutet das, dass man den Unterschied der beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen nur bei kleinen Zählraten erkennen kann.

4.4 χ^2 -Test

Mit dem χ^2 -Test wird nun überprüft wie gut die gemessene Häufigkeit mit den theoretischen Werten übereinstimmt. Im folgenden seien B die beobachteten Werte mit den dazugehörigen erwarteten Werten E (siehe Verteilungskurven) für die einzelnen Klassen k :

$$\chi^2 = \sum_k \frac{(B_k - E_k)^2}{E_k} \quad (14)$$

Zur Bewertung der Kurven werden außerdem die Freiheitsgrade v benötigt (n : Anzahl der abgeschätzten Parameter; k : Anzahl der verwendeten Klassen). Außerdem sollte die hypothetische Häufigkeit nicht unter 4 liegen (gegebenenfalls können Klassen zusammengelegt werden, bis $E \sim 4$ erreicht ist).

$$v = k - 1 - n \quad (15)$$

Geprüft werden soll die sogenannte Nullhypothese. Diese besagt, dass die vermutete theoretische Verteilung dann zur Stichprobe passt, wenn der berechnete χ^2 -Wert kleiner ist als der Tabellenwert (aus der Vorbereitungshilfe). Das Beurteilungskriterium hierfür nennt sich Irrtumswahrscheinlichkeit α , die für verschiedene Freiheitsgrade vorgegeben ist. Weiterhin gilt: Je kleiner χ^2 , desto besser passt die vermutete Verteilung zu den Messergebnissen.

5 Quellen

- Vorbereitungsmappe
- Abbildung 1: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/34/Szintillationsz%C3%A4hler.png>
- Mosleyesches Gesetz: http://de.wikipedia.org/wiki/Moseleysches_Gesetz
- Compton-Effekt: <http://de.wikipedia.org/wiki/Compton-Effekt>