



SS/~~WS~~0.12./.....

Praktikum: (~~X~~/P2) (~~X~~o/Di/~~X~~/X) Gruppe-Nr: ..11..

Name: Fleig Vorname: Georg

Name: Krause Vorname: Marcel

Versuch: Kreisel (mit/~~o~~te) Fehlerrechnung

Betreuer: Florian Kassel Durchgeführt am: 08.05.12.

Abgabe am:

Rückgabe am:

Begründung:

2. Abgabe am:

Ergebnis: (+ / 0 / -)

Fehlerrechnung: ja / nein

Datum:

Handzeichen:

Bemerkungen:



Dieser Versuch soll Ihnen ein Verständnis für die Bewegungsformen rotierender starrer Körper vermitteln. Im ersten Teil des Versuchs haben Sie die Gelegenheit, sich eingehend mit dem Erhaltungssatz für den Drehimpuls auseinanderzusetzen. Im zweiten Teil beobachten Sie anhand eines kardanisch gelagerten Kreisels die unterschiedlichen Bewegungsformen des starren Körpers und deuten diese mit Hilfe der Theorie. Als wichtige technische Anwendung der Kreiselgesetze wird Ihnen der Kreiselkompaß im Modell vorgestellt.

Eine Zusammenfassung des notwendigen theoretischen Hintergrundes zu diesem Versuch sowie besondere Hinweise zur Durchführung der folgenden Aufgaben werden Ihnen in einer Vorbereitungshilfe zu diesem Versuch gegeben.

Beachten Sie die Gefährlichkeit des rotierenden Kreisels! Langes Haar muss gesichert werden (Kopftuch, Stirnband o.ä.)!

Hinweise:

Den Antriebsmotor für den Kreisel immer im Rechtslauf und im Drehzahlbereich $0-3500 \text{ min}^{-1}$ betreiben und vor jedem Kreiselanwurf die Drehzahl auf Null zurückstellen! Vergewissern Sie sich vor jedem Kreiselanwurf, daß die biegsame Welle am Motorflansch fest aufsitzt und daß sie möglichst wenig gebogen ist. Sorgen Sie durch geeignetes Andrücken für einen guten mechanischen Kontakt der Sägezahnkupplung. Wenn Sie die biegsame Welle nicht benötigen, lagern Sie diese bitte in gestreckter Haltung.

Beachten Sie:

Der Kreisel ist sehr teuer und empfindlich - behandeln Sie ihn mit Sorgfalt. Zum abbremsen des Kreisels niemals „grobe Hebel“ ansetzen, sondern nur mit den Handschuhen an der Welle zupacken. Der Kreiselkörper ist tabu.

Aufgaben:

- 1. Die Drehimpulserhaltung.** Überlegen Sie sich Versuche zur Demonstration der Drehimpulserhaltung anhand eines Drehschemels und eines Fahrradkreisels (Fahrradfelge mit Bleieinlage und Handgriffen an der Achse). Führen Sie diese Versuche durch.
- 2. Freie Achsen.** In den Mittelpunkten der Seitenflächen einer 'Zigarrenkiste' sind Ösen angebracht. Hängen Sie die Kiste an jeweils einer dieser Ösen mit einem Draht an die Achse eines Elektromotors. Beobachten Sie das Verhalten der Kiste, wenn sie in Rotation versetzt wird. Deuten Sie Ihre Beobachtungen.
- 3. Der kräftefreie Kreisel.** Messen Sie die Nutationsfrequenz des symmetrischen Kreisels in Abhängigkeit von der Drehfrequenz um die Figurenachse. Wiederholen Sie diese Messung nach Anbringen der zylindrischen Zusatzgewichte an den äußeren Kardanrahmen. Tragen Sie die gemessenen Werte in einem Diagramm auf.
- 4. Die Dämpfung des Kreisels.** Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels um die Figurenachse als Funktion der Zeit. Tragen Sie die gemessenen Werte in einem Diagramm auf.
- 5. Der Kreisel unter dem Einfluß äußerer Drehmomente.** Messen Sie beim nutationsfreien, symmetrischen Kreisel die Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit von der Drehfrequenz um die Figurenachse. Tragen Sie die gemessenen Werte in einem Diagramm auf.
- 6. Die Hauptträgheitsmomente.** Berechnen Sie aus den gemessenen Präzessions- und Nutationsfrequenzen die Hauptträgheitsmomente des symmetrischen Kreisels unter Berücksichtigung der zusätzlichen Trägheitsmomente der Kardanrahmen. Geben Sie eine Abschätzung für die Masse des Rotors an.

7. Der Kreisel im beschleunigten Bezugssystem. Fesseln Sie den inneren Kardanrahmen mittels der Arretiervorrichtungen an die Horizontalebene. Stellen Sie den Holzkeil auf den Drehtisch und plazieren Sie den Kreisel darauf. Weshalb der Holzkeil? Beobachten und deuten Sie die Bewegung der Figurenachse nach Handanwurf des Kreisels und anschließendem Einschalten der Drehtischrotation.

Angaben:

Massen:

m (zyl. Gewicht) = (1000 ± 1) g pro Stück

aufschraubbarer Stab (330 ± 1) g mit verschiebbarem Gewicht (375 ± 1) g

Strecken:

Kreiselschwerpunkt - aufgeschraubtes zylindrisches Gewicht: (14.9 ± 0.1) cm

Durchmesser des zylindrischen Gewichtes: (4.00 ± 0.01) cm

Kreiselschwerpunkt - äußerer Rand des inneren Kardanrahmens: (10.91 ± 0.03) cm

Durchmesser des Rotors: (13.50 ± 0.01) cm

Fehlerrechnung:

Zu Aufgabe 6 kann im Rahmen der obligatorischen Fehlerrechnungen im P2 und nach Absprache mit dem Betreuer eine ausführliche Fehlerrechnung durchgeführt werden.

Zubehör:

Drehstuhl und Fahrradkreisel,

Körper in Form einer Zigarrenkiste mit Ösen zum Aufhängen an den drei verschiedenen Seiten und Antriebsmotor dazu,

Kreisel in kardanischer Aufhängung mit diversen Zusatzteilen,

Antriebsmotor für den Kreisel mit biegsamer Welle und Motorsteuerung,

Drehtisch mit Antriebsmotor,

Holzkeil für den geeigneten Aufbau des Kreisels auf dem Drehtisch,

2 schwanenhalsgelagerte Photosensoren (mit integrierter Lichtquelle),

2 Frequenzzähler (Hameg HM8021-4),

Stoppuhr

Literatur:

Budo: *Theoretische Mechanik*, Par. 51, 58

Müller-Pouillet: *Mechanik punktförmiger Massen*, 1929, Bd. 1, Teil 1, Kap. 6, Par. 5--7, 9

Falk-Ruppel: *Mechanik Relativität Gravitation*, Par. 27

Bergmann-Schäfer: *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Bd. 1, Par. 39

Pohl: *Mechanik, Akustik und Wärmelehre*, Par. 51, 52, 55, 56

Magnus: *Kreisel, Theorie und Anwendungen*

Gammel: *Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen*, 1950, Bd. 1 & 2

Goldstein: *Klassische Mechanik*, Kap. 5

Physikalisches Anfängerpraktikum P2

**Versuch:
P2-71,74
Kreisel**

Schriftliche Vorbereitung

von

Georg Fleig (georg@leech.it)
Marcel Krause (mrrrc@leech.it)

Gruppe: Di-11

Datum der Versuchsdurchführung:
08.05.12

Theoretische Grundlagen

Wir schaffen zunächst alle theoretischen Grundlagen, die notwendig sind, um die Bewegungen eines Kreisels vollständig zu verstehen und beschreiben zu können. Dabei gehen wir nicht nur ausführlich auf die Trägheitsmomente eines Körpers ein, sondern auch auf grundlegende Begriffe, die im Zusammenhang mit Rotationsbewegungen stets vorkommen.

Trägheitsmoment und Trägheitstensor

Das Trägheitsmoment stellt für Rotationsbewegungen das Analogon der trägen Masse in Translationsbewegungen dar. Es beschreibt also den Widerstand eines beliebigen Körpers gegenüber Rotationsbewegungen. Im Gegensatz zur trägen Masse ist das Trägheitsmoment allerdings nicht nur von der Masse des Körpers selbst abhängig, sondern zusätzlich noch von der Masseverteilung sowie von der Drehachse.

Es hat sich daher als notwendig erwiesen, den Trägheitstensor $\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ für beliebige dreidimensionale Körper einzuführen, dessen Elemente Θ_{ij} mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$ die einzelnen Trägheitsmomente ausgezeichnete Richtungen sind. Durch die Verwendung des Tensors berücksichtigt man die Drehachsen, um die man die Rotation auf den Körper aufträgt.

Zur Berechnung einzelner Trägheitsmomente ist die Kenntnis der Massenverteilung $\rho(\vec{r})$, sprich die ortsabhängige Dichte, von Nöten. Man erhält das Trägheitsmoment dann über

$$\Theta_{ij} = \int_V r^2 \rho(\vec{r}) d^3x$$

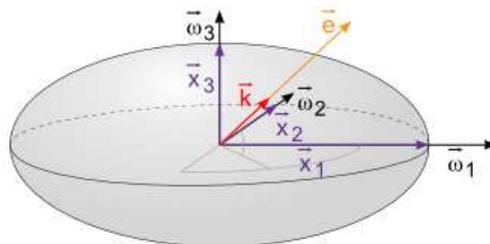
wobei r stets senkrecht zur betrachteten Achse stehe. Die Integration erfolgt über das ganze Volumen $dV = d^3x$. Als ein Beispiel sei hier das Trägheitsmoment eines Vollzylinders, der um seine Symmetrieachse rotiere, genannt.

Sei r der Radius sowie m die Masse des Vollzylinders, welcher um seine Symmetrieachse rotiere, dann ist dessen Trägheitsmoment Θ_{VZ} nach Ausführen des obigen Integrals gegeben durch:

$$\Theta_{VZ} = \frac{1}{2}mr^2$$

Trägheitsellipsoid und Hauptträgheitsachsen

Führt man obiges Integral für den allgemeinsten Fall eines unbekanntes Körpers aus, indem man drei verschiedene Winkel für die Raumrichtungen sowie drei beliebige Abstände einführt, so erhält man eine Gleichung für das Trägheitsmoment, die eine Fläche zweiter Ordnung im Raum beschreibt. Veranschaulichen kann man sich diese Fläche als den Trägheitsellipsoiden. Nachfolgend ist ein solcher Ellipsoid dargestellt.



Im allgemeinsten Fall besitzt der Ellipsoid drei verschiedene Hauptachsen. Die drei Figurenachsen \vec{x}_i werden auch als Hauptträgheitsachsen des Körpers bezeichnet. Führt man eine geeignete Hauptachsentransformation durch, legt man also die Achsen des verwendeten Koordinatensystems durch die Hauptträgheitsachsen, so vereinfacht sich der Trägheitstensor, da er als symmetrischer Tensor mit Rang 3 stets diagonalisiert werden kann. Die drei Elemente dieser Diagonalmatrix nennt man dann Hauptträgheitsmomente.

Man kann sich den Ellipsoiden als Hilfsmittel zur Beschreibung der Trägheitseigenschaften des Körpers vorstellen. Im Falle eines symmetrischen Kreisels sind zwei der drei Hauptträgheitsmomente identisch. Der Ellipsoid wird daher eine ausgezeichnete Symmetrieachse haben, anschaulich wird er „zigarrenförmig“.

Stimmt auch das dritte Hauptträgheitsmoment mit den anderen beiden überein, so wird der Ellipsoid zu einer Kugel. Es gibt dann keine ausgezeichnete Achse mehr, die Trägheitsachsen des Körpers sind alle gleichberechtigt. Beispiele für entsprechende Kreisel wären dann eine Kugel oder ein Würfel, den man um Achsen rotieren lässt, die durch dessen Flächenmittelpunkte gehen.

Satz von Steiner

Möchte man das Massenträgheitsmoment Θ_{ij} eines starren Körpers bezüglich einer Drehachse berechnen, die nicht durch dessen Schwerpunkt geht, so nutzt man den Satz von Steiner. Es bezeichne $\Theta_{\text{Körper}}$ das Trägheitsmoment des starren Körpers der Masse m bezüglich einer Drehachse durch dessen Schwerpunkt. Die eigentliche Drehachse sei l von der Schwerpunktsachse entfernt. Das Trägheitsmoment ergibt sich dann zu:

$$\Theta_{ij} = \Theta_{\text{Körper}} + ml^2$$

Grundbegriffe der Rotationsbewegungen

Im Laufe des Versuchs begegnen und zahlreiche Begriffe, die Rotationsbewegungen charakterisieren, daher soll ein kurzer Überblick über diese vorgenommen werden. Da Translations- und Rotationsbewegungen ähnliche Verhaltensweisen haben, soll in einem kurzen Überblick immer der Übergang zu Gesetzmäßigkeiten der Translation zu denen der Rotation geschaffen werden.

Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

In Translationsbewegungen beschreibt man die Geschwindigkeit eines Körpers über \vec{v} . Rotiert ein Körper in Entfernung \vec{r} mit dieser Geschwindigkeit um eine Achse, so ist es zweckmäßig, die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ als Pseudovektor einzuführen. Sie beschreibt die gerichtete zeitliche Änderung $\dot{\varphi}$ des Winkels φ zwischen einer festgelegten Achse und \vec{r} und ist definiert über

$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$$

mit $\omega = \dot{\varphi}$. Leitet man die Winkelgeschwindigkeit zeitlich ab, so erhält man die Winkelbeschleunigung:

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$$

Drehimpuls

Der Drehimpuls \vec{L} stellt das Analogon zum Impuls \vec{p} dar. Sei Θ der Trägheitstensor eines Körpers, so finden wir den Drehimpuls über:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \Theta \vec{\omega}$$

Ganz analog zum Impuls in der Translation ist der Drehimpuls in der Rotation eine Erhaltungsgröße. Mit der Rechte-Hand-Regel kann man die Drehrichtung des Körpers erkennen, wenn man den Daumen in Richtung \vec{L} zeigen lässt. Für die Änderung des Drehimpulses ist ein Drehmoment nötig.

Drehmoment

Um in der Translation eine Impulsänderung zu erzielen, muss auf den Körper eine Kraft \vec{F} wirken. In der Rotation entspricht dieser Kraft gerade dem Drehmoment \vec{M} mit:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \Theta \vec{\alpha}$$

Genauso, wie für die Translation $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ gilt, gilt in der Rotation auch:

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}}$$

Existieren keine äußeren Drehmomente, so ist $\vec{L} = \text{const.}$

Eulersche Kreiselgleichungen

Zur mathematischen Beschreibung der Rotation starrer Körper verwendet man üblicherweise die Eulerschen Kreiselgleichungen. Sie stellen ein System von Differentialgleichungen im Hauptachsensystem des starren Körpers dar. Bezeichnet man die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ mit ω_i , die des Drehmoments \vec{M} mit M_i und die Hauptträgheitsmomente mit Θ_i , so lauten die Gleichungen:

$$M_1 = \Theta_1 \dot{\omega}_1 - (\Theta_2 - \Theta_3) \omega_2 \omega_3$$

$$M_2 = \Theta_2 \dot{\omega}_2 - (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_3 \omega_1$$

$$M_3 = \Theta_3 \dot{\omega}_3 - (\Theta_1 - \Theta_2) \omega_1 \omega_2$$

Aufgabe 1: Drehimpulserhaltung

Es sollen von uns zunächst einige Versuche zur Drehimpulserhaltung durchgeführt werden. Dazu werden wir einen Fahrradkreisel sowie einen Drehschemel verwenden. Der Experimentator setzt sich zu Beginn eines jeden Teilversuchs stets auf den Drehschemel und bildet mit ihm zusammen ein geschlossenes System. Der Fahrradkreisel wird von uns entweder von Hand oder mit einer geeigneten Nylonschnur so schnell wie nötig aufgezogen und dadurch in Rotation versetzt. Es ist dabei von uns darauf zu achten, dass der Schemel ungefähr eben ausgerichtet wird, um äußere Drehmomente zu vermeiden.

Da der Drehschemel nur eine Rotationsachse erlaubt, die hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit in z -Richtung zeige, betrachten wir zur Drehimpulserhaltung auch nur die vertikale Komponente L_z des Drehimpulses, denn nur diese ist die wirksame Komponente.

Aufgabe 1.1: Experimentator hält zu Beginn den ruhenden Kreisel

Zunächst werden wir zwei verschiedene Versuche durchführen, bei denen der Experimentator bereits zu Beginn den ruhenden Fahrradkreisel in der Hand hält. Das Aufziehen des Kreisels geschieht also erst, nachdem der Experimentator zusammen mit dem Kreisel in Ruhe im System verharrt sind. Variiert wird dann der Winkel α zwischen der Achse des Fahrradkreisels und der Horizontalen.

Aufgabe 1.1.1: Horizontale Achse ($\alpha = 0^\circ$)

Der Experimentator hält zu Beginn die Achse so, dass sie ungefähr horizontal liegt. Dann wird der Kreisel angeworfen und die Achse wird kontinuierlich in vertikale Lage verkippt. Es ist dabei zu erwarten, dass der Experimentator zu Beginn in Ruhe verbleibt. Sobald er jedoch die Drehachse in vertikale Position bringt, wird der Drehschemel in eine Rotationsbewegung versetzt, deren Drehsinn dem Fahrradkreisel genau entgegengesetzt ist.

Grund für diese Bewegung ist die Drehimpulserhaltung. Zu Beginn ist der Gesamtdrehimpuls wie auch L_z gleich Null. Durch das Anwerfen von außen wird dem System auch von außen Drehimpuls zugeführt. Hält man den Kreisel mit der Achse in horizontaler Richtung, so zeigt auch der neu hinzugekommene Drehimpuls in diese Richtung. Da der Drehimpuls in dieser Richtung senkrecht zu L_z ist, trägt er nichts zum System bei.

Bringt der Experimentator dann aber die Kreiselachse parallel zu L_z an, so findet sich im System plötzlich eine Komponente $L_z \neq 0$ vor. Nach der Drehimpulserhaltung muss diese Komponente von einer gleich großen in $-L_z$ -Richtung kompensiert werden. Diese wirkt auf den Experimentator und lässt ihn auf dem Schemel in einer dem Kreisel entgegengesetzten Richtung rotieren.

Aufgabe 1.1.2: Vertikale Achse ($\alpha = 90^\circ$)

Die Aufgabe ist analog zu 1.1.1, allerdings hält der Experimentator hier die Achse zu Beginn vertikal und verkippt sie in horizontale Position. Wir werden hier bereits beim Anwerfen eine dem Fahrradkreisel entgegengesetzte Drehbewegung bemerken, die aufhört, sobald sich die Achse in horizontaler Position befindet.

Das Phänomen ist ganz analog zu Aufgabe 1.1.1, nur ist zum Zeitpunkt des Anwerfens des Kreisels wegen der vertikal angebrachten Kreiselachse sofort ein Drehimpuls von $L_z \neq 0$ vorhanden, weshalb die entgegengesetzte Rotation des Experimentators auf dem Schemel instantan einsetzt und erst dann aufhört, wenn er die Kreiselachse horizontal ausrichtet.

Aufgabe 1.2: Experimentator nimmt den rotierenden Kreisel in Empfang

Der zweite Versuchsteil basiert darauf, dass der Experimentator den Kreisel erst übergeben bekommt, wenn er sich bereits in Rotation befindet. Da so bereits von vornherein ein Drehimpuls im Kreisel vorhanden ist, muss man diesen in der Drehimpulserhaltung berücksichtigen.

Wir haben also in allen Fällen eine Komponente des Drehimpulses, die bereits zu Beginn des Versuchs ungleich Null ist, im Gegensatz zu Aufgabe 1.1, wo zu Beginn für alle Komponenten $L_i = 0$ galt.

Aufgabe 1.2.1: Horizontale Achse ($\alpha = 0^\circ$)

Der Experimentator nimmt den rotierenden Kreisel mit horizontal liegender Achse in Empfang und wird weiterhin in Ruhe verharren. Er soll dann die Achse um $\alpha = \pm 90^\circ$ verkippen. Es ist dabei zu erwarten, dass sich dieselben Beobachtungen wie in Aufgabe 1.1.1 ergeben werden.

Da der aufgezoogene Kreisel so übergeben wird, dass die Drehimpulsachse horizontal liegt, hat das Gesamtsystem aus Experimentator, Drehschemel und Drehkreisel zu Beginn $L_z = 0$. Sobald man den Kreisel in eine andere Position bringt, stellt sich $L_z \neq 0$ ein, daher muss analog zu Aufgabe 1.1.1 ein entgegengesetzter Drehimpuls aufgetragen werden, der den Schemel in entgegengerichtete Bewegung versetzt.

Aufgabe 1.2.2: Vertikale Achse ($\alpha = 90^\circ$)

Dem Experimentator wird schließlich der rotierende Kreisel mit vertikal liegender Achse übergeben. Es ist zu erwarten, dass er dabei zunächst in Ruhe verharrt. Verkippt er die Achse nun kontinuierlich über $\alpha = 0^\circ$ bis $\alpha = -90^\circ$, so wird der Drehschemel in eine immer stärker werdende Rotation versetzt, die denselben Drehsinn besitzen wird wie der Fahrradkreisel.

Dieser Fall unterscheidet sich nun von den vorigen. Der Kreisel wird mit vertikal liegender Achse übergeben, daher ist zu Beginn $L_z \neq 0$. Der Drehschemel bleibt dennoch in Ruhe, denn der gesamte Drehimpuls steckt in der Kreiselbewegung. Bringt der Experimentator die Kreiselachse nun in horizontale Lage, so liefert der Kreisel plötzlich keinen Beitrag mehr zur L_z -Komponente.

Da diese aber erhalten bleiben muss, wird ein gleichgerichteter Drehimpuls auf den Drehschemel übertragen. Daher rotiert der Experimentator nun in derselben Richtung wie der Kreisel zuvor.

Aufgabe 1.3: Pirouetteneffekt

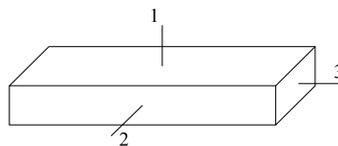
Der Experimentator sitzt mit zwei Gewichten in den ausgestreckten Händen auf dem Drehschemel und wird von außen in Rotation versetzt. Zieht er die Arme an sich heran, so ist zu erwarten, dass die Winkelgeschwindigkeit ω seiner Drehbewegung zunehmen wird. Dieser Effekt liegt an der Impulserhaltung. Der gesamte Drehimpuls L mit

$$L = \Theta \cdot \omega$$

bleibt erhalten. Durch das Anziehen der Arme verringert sich das Trägheitsmoment Θ des Experimentators. Da aber L erhalten ist, muss somit die Winkelgeschwindigkeit ω ansteigen, et vice versa.

Aufgabe 2: Freie Achsen

Im zweiten Versuchsteil beschäftigen wir uns mit der Rotation einer quaderförmigen Zigarrenschnur um verschiedene Achsen. Die Schnur besitzt mehrere Ösen, an denen man sie mit Hilfe eines Drahts mit einem Elektromotor verbinden und so in Bewegung versetzen kann. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, mit verschiedenen Rotationsachsen zu experimentieren. Wir werden an der Zigarrenschnur insbesondere die Hauptträgheitsachsen sowie deren Rotationseigenschaften untersuchen.



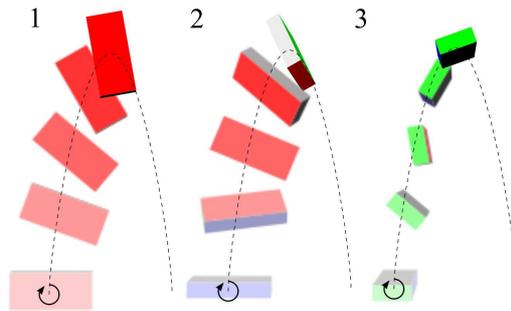
Es ist dabei zu erwarten, dass die Rotation um zwei der drei Achsen stabil bzw. metastabil und um die dritte labil ablaufen wird. Die (meta-)stabilen Achsen, auch freie Achsen genannt, sind dabei diejenigen Achsen des größten und kleinsten Trägheitsmoments. In obiger Skizze sind sie mit 1 und 3 gekennzeichnet. Zur labilen Achse 2 gehört das mittlere Trägheitsmoment.

Möchte man diesen Fall mit den eulerschen Kreiselgleichungen beschreiben, so setzt man dort für eine beliebige Komponente $\dot{\omega}_j = 0$. Für die übrigen Komponenten ergeben sich Differentialgleichungen der Form

$$\ddot{\omega}_i + c\omega_i = 0$$

wobei c eine Konstante ist, die diverse Trägheitsmomente enthält. Für $c > 0$ sind die Lösungen harmonische Schwingungen, für $c < 0$ exponentiell ansteigende Funktionen.

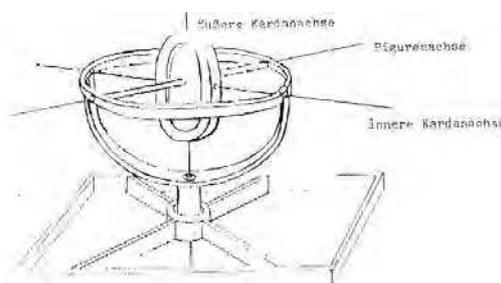
Wir werden beobachten, dass die Rotation um Achse 3 metastabil ablaufen wird. Bei vernachlässigbar kleinen Störungen schwingt der Körper in seiner Drehbewegung um seine Hauptträgheitsachse. Wird die Störung zu groß, so kippt der Körper in eine horizontale Lage und rotiert um die stabile Achse 1, also um die Achse des größten Trägheitsmoments. Diese beiden Fälle entsprechen $c > 0$. Wir werden außerdem feststellen, dass die Rotation um die Achse 2 des mittleren Trägheitsmoments instabil abläuft. Bereits bei kleinsten Störungen wird der Körper stark taumeln. Dies entspricht dem Fall $c < 0$.



Man kann diesen Zusammenhang im Übrigen auch beobachten, wenn man den Quader auf verschiedene Weisen angedreht in die Luft wirft. Es ergeben sich je nach Achse, um die gedreht wird, die obigen drei Wurffiguren. Auch hier sieht man, dass nur die Rotation um die Achsen 1 und 3 stabil verlaufen.

Aufgabe 3: Kräftefreier Kreisel

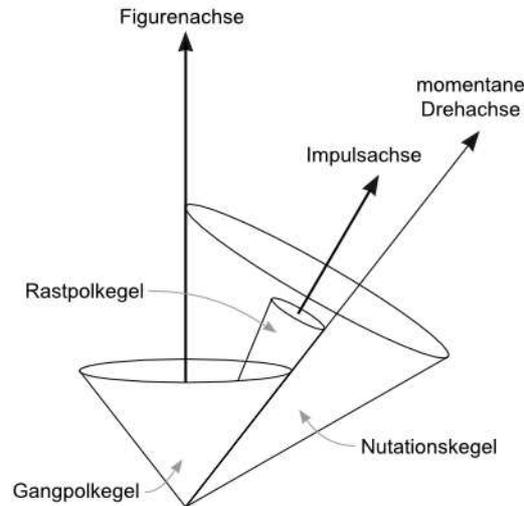
Nachdem wir uns nun mit den Grundlagen der Rotation starrer Körper beschäftigt haben, werden wir in dieser und allen nachfolgenden Aufgaben Versuche an einem Kardankreisel durchführen. Dieser besteht im Wesentlichen aus einem Kreiselkörper, welcher in einer kardanischen Aufhängung gelagert ist. Die nachfolgende Skizze soll dies verdeutlichen:



Zunächst wollen wir im Falle des symmetrischen Kreisels die Nutationsfrequenz in Abhängigkeit von der Drehfrequenz um die Figurenachse bestimmen. Dazu stellen wir den Versuchsaufbau so ein, dass sich die äußeren Kräfte auf den Kreisel gerade aufheben und keine weiteren Drehmomente auf ihn auswirken, sodass man ihn als kräftefrei bezeichnen kann.

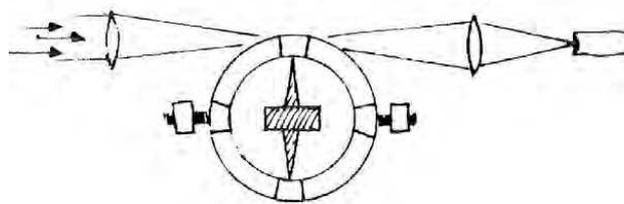
Stellt sich bei der Rotationsbewegung der Fall ein, dass die Drehachse nicht in eine der Hauptachsen des Körpers fällt, so bilden sich Nutationsbewegungen aus. Dies liegt darin begründet, dass die Dreh- sowie die Figurenachse (die ebenfalls nicht zusammenfallen müssen) Figuren um die Drehimpulsachse,

die im Raum erhalten bleibt, beschreiben. Experimentell ist es uns auf einfachen Mitteln nur möglich, die Bewegung der Figurenachse zu registrieren.



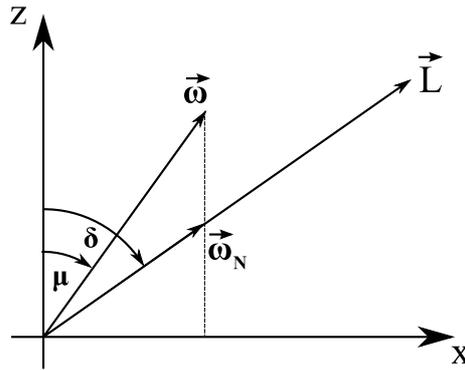
Die oben stehende Skizze illustriert die Poinso'sche Kegeltheorie, die die Bewegung der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ auf einem Rastpolkegel und die Rotation der Figurenachse auf einem Nutationskegel darstellt. Der Gangpolkegel ist körperfest und wird durch das Abrollen auf dem Rastpolkegel beschrieben.

Es soll von uns die Nutationsfrequenz in Abhängigkeit der Rotationsfrequenz bestimmt werden. Dazu stehen uns Fototransistoren mit geeigneten Schaltungen zur Verfügung. Der Kreiselkörper ist schwarz gefärbt und besitzt einen hellen Streifen, welcher bei Beleuchtung durch die Fototransistoren als Rechtecksignal registriert wird. Die Nutationsfrequenz können wir bestimmen, wenn wir den Kreisel wie folgt positionieren:



von oben: Kreisel im Strahlengang

Er unterbricht dann im nutationsfreien Fall stets den Lichtstrahl. Ergibt sich jedoch eine Nutation, so schwingt der innere Rahmen um die innere Kardanachse und gibt so den Weg des Lichtstrahls zum Fototransistor periodisch frei. Es soll nun kurz der Zusammenhang zwischen der Nutationsfrequenz ω_N und der Rotationsfrequenz ω hergeleitet werden. Dabei bezeichnen δ und μ die Öffnungswinkel des Nutations- respektive Gangpolkegels. Der verwendete Kreisel ist dergestalt symmetrisch, dass bei gewählter Richtung der Achsen $\Theta_x = \Theta_y$ gelte.



Man findet die Zusammenhänge

$$\sin \mu = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \tan \mu = \frac{\omega_x}{\omega_z}$$

sowie

$$\sin \delta = \frac{\omega_x}{\omega_N}, \quad \tan \delta = \frac{L_x}{L_z} = \frac{\Theta_x \cdot \omega_x}{\Theta_z \cdot \omega_z} = \frac{\Theta_x}{\Theta_z} \tan \mu$$

Die gesuchte Nutationsfrequenz ergibt sich somit zu:

$$\begin{aligned} \omega_N &= \frac{\omega_x}{\sin \delta} \\ &\approx \frac{\Theta_z}{\Theta_x} \cdot \omega = \frac{\Theta_z}{\Theta_y} \cdot \omega \end{aligned}$$

Die Umformung im letzten Schritt ergibt sich nach Bearbeitung durch trigonometrische Gesetzmäßigkeiten sowie Kleinwinkelnäherungen. Diese Gleichung gilt allerdings nur im idealisierten Fall, wenn die Kardanrahmen vernachlässigbares Gewicht besitzen. Dies ist hier sicherlich nicht der Fall, abgesehen davon wollen wir im zweiten Versuchsteil dieser Aufgabe die Rahmen zusätzlich beschweren. Wir finden daher, wie in der Vorbereitungshilfe angegeben, die korrigierte Formel

$$\omega_N = \frac{\Theta_z}{\sqrt{\Theta_{x,\text{korr}} \cdot \Theta_{y,\text{korr}}}} \cdot \omega \quad (1)$$

mit den korrigierten Trägheitsmomenten:

$$\Theta_{x,\text{korr}} = \Theta_{\text{Kreisel}} + \Theta_{\text{innen}} + \Theta_{\text{außen}}$$

$$\Theta_{y,\text{korr}} = \Theta_{\text{Kreisel}} + \Theta_{\text{innen}}$$

Die Kreisfrequenz des Kreisels wird während dieser Aufgabe auf $\omega = 1000 \text{ min}^{-1} \approx 17 \text{ Hz}$ eingestellt. Gemessen wird ω_N bei einer Messzeit des Drehfrequenzzählers von $\Delta t = 0,5 \text{ s}$ in einem Abstand von etwa $\Delta \omega = 0,5 \text{ Hz}$.

Als Variation werden wir anschließend zylindrische Zusatzgewichte auf den äußeren Kardanrahmen anbringen und die Messungen damit wiederholen.

Aufgabe 4: Dämpfung des Kreisels

In der vierten Aufgabe wollen wir die Dämpfung des Kreisels bestimmen. Dazu beschleunigen wir ihn zu Beginn auf eine Kreisfrequenz von $\omega = 2000 \text{ min}^{-1} \approx 33 \text{ Hz}$ und nehmen alle 30 Sekunden, analog zu

Aufgabe 3, die Drehfrequenz mit Hilfe der Lichtschranke auf, bis der Kreisel zum Stillstand gekommen ist. Die Messzeit sollte dabei auf $\Delta t = 0,5 \text{ s}$ gestellt werden.

Da es sich bei einem Kreisel im Grunde genommen um einen harmonischen Oszillator handelt, wie wir bereits in Aufgabe 2 festgestellt haben, ist bei einem zusätzlichen Dämpfungsterm durch die Reibung zu erwarten, dass die gemessene Kreisfrequenz exponentiell abfallen wird.

Aufgabe 5: Einfluss äußerer Drehmomente

Neben der Nutation gibt es noch eine weitere, für Kreisel typische Bewegungsform, die wir in dieser Aufgabe näher untersuchen wollen: die nutationsfreie Präzession. Diese tritt immer dann auf, wenn der Kreisel einer äußeren Kraft ausgesetzt ist, welche permanent ein Drehmoment auf ihn auswirkt. Im Versuch werden wir dies durch das Anbringen einer Stahlstange mit $m = m_1 + m_2$ ($m_1 = 330 \pm 1 \text{ g}$ für die Stange, $m_2 = 375 \pm 1 \text{ g}$ für ein zusätzliches Gewicht) an den Lagerrahmen erreichen. Dadurch ergibt sich über die Gewichtskraft \vec{F}_G ein Drehmoment \vec{M} auf den Hebelarm \vec{r} zu $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_G$.

Es soll nun eine Gleichung für die Präzessionsfrequenz ω_P hergeleitet werden. Wir legen o.B.d.A. die Richtung der Schwerkraft in negative x -Richtung. Das verursachte Drehmoment \vec{M} liegt stets senkrecht auf dem Drehimpuls \vec{L} des Kreisels. Daraus folgt, dass $\|\vec{L}\|$ und damit insbesondere L^2 erhalten sind. Da der Hebelarm \vec{r} in der yz -Ebene liegt und \vec{F}_G in negative x -Richtung zeigt ist außerdem klar, dass $M_x = 0$ gilt, woraus unmittelbar $L_x = \text{const}$ folgt.

Setzt man voraus, dass $\|\vec{M}\|$ konstant ist, so folgen aus obigen Überlegungen direkt die Gleichungen

$$L_y^2 + L_z^2 = \text{const} \quad , \quad \dot{L}_y^2 + \dot{L}_z^2 = \text{const}$$

Nutzt man die erste Gleichung nach einmaliger Differentiation nach der Zeit zur Elimination einer Impulskomponente in der zweiten Gleichung, so erhält man letztlich das Drehmoment

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \omega_P \begin{pmatrix} 0 \\ -L_z \\ L_y \end{pmatrix}$$

Dabei wurde die gesuchte, konstante Präzessionsfrequenz ω_P aus obigen Konstanten zusammengesetzt. Diese Gleichung beschreibt die Präzessionsbewegung des Kreisels, die einer Rotation um die x -Achse entspricht. Bildet man \vec{M}^2 sowohl von dieser Gleichung wie auch von $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_G$ und setzt diese gleich, so ergibt sich

$$mgr \cdot \sin \Phi = \omega_P \cdot \sqrt{L_y^2 + L_z^2}$$

wobei $r = \|\vec{r}\|$ sowie der Winkel Φ zwischen der Figuren- und der z -Achse eingeführt wurde. Für kleine Winkel gilt außerdem

$$\sqrt{L_y^2 + L_z^2} = \|\vec{L}\| \sin \Phi = \omega \cdot \Theta_z \cdot \sin \Phi$$

wenn ω die Kreisfrequenz des Kreisels und Θ_z das Hauptträgheitsmoment der Figurenachse ist. Diese Gleichungen liefern letztlich die gesuchte Präzessionsfrequenz:

$$\omega_P = \frac{mgr}{\omega \cdot \Theta_z} \quad (2)$$

Im Versuch wollen wir den Kreisel zu Beginn auf $\omega = 1000 \text{ min}^{-1} \approx 17 \text{ Hz}$ beschleunigen. Der Drehzahlmesser wird auf einen Zeitabschnitt von $\Delta t = 2 \text{ s}$ eingestellt und es werden Messungen bis zum Stillstand des Kreisels durchgeführt. Wir nehmen dabei die Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit von der Drehfrequenz um die Figurenachse auf. Die genaue Durchführung der Messung ist aufgrund der Größe der aufzubringenden Stange nicht ganz einfach. Es empfiehlt sich dabei das in der Vorbereitungshilfe angeführte Messverfahren, welches nachfolgend kurz erläutert wird.

Es wird zunächst der innere Kardanrahmen des rotierenden Kreisels in einer gegenüber der Horizontalen erhöhten Position festgehalten. Bevor man den Rahmen loslässt, versetzt man ihm einen geringen Stoß in die zu erwartende Präzessionsrichtung, um die Nutation so gering wie möglich zu halten. Letztere wird dann von uns zusätzlich gedämpft. Dann messen wir die Zeit, die der äußere Kardanrahmen für eine halbe Umdrehung benötigt. Daraus lässt sich die Präzessionsfrequenz bestimmen.

Es ist zusätzlich zu beachten, dass wir dadurch nur einen Mittelwert für ω_P erhalten. Damit ω im selben Zeitraum als Mittel genommen wird, messen wir die Kreisfrequenz des Kreisels zu Beginn und am Ende der Messung und nehmen daraus das arithmetische Mittel.

Aufgabe 6: Hauptträgheitsmomente

In dieser Aufgabe werden nun die Ergebnisse aus den Aufgaben 3 und 5 verwertet, um die Hauptträgheitsmomente zu bestimmen. Dazu werden wir mit Origin Ausgleichsgeraden durch die Messergebnisse legen. Mit der so gefundenen Steigung ζ_P wird Gleichung (2) zu

$$\omega_P = \frac{mgr}{\Theta_z} \cdot \frac{1}{\omega} = \zeta_P \cdot \omega^{-1}$$

oder nach dem Trägheitsmoment Θ_z der Hauptachse umgeformt:

$$\Theta_z = \frac{mrg}{\zeta_P}$$

Bei Benutzung zusätzlicher Gewichte zum Stab ist darauf zu achten, dass das Produkt mr am Schwerpunkt genommen wird. Dazu nutzen wir unter Umständen auch den Satz von Steiner.

Die Berechnung der anderen Hauptträgheitsmomente erfolgt zunächst über Gleichung (1), welche durch die Ausgleichsgeraden umgeschrieben werden kann als:

$$\omega_N = \frac{\Theta_z}{\sqrt{\Theta_{x,0} \cdot \Theta_y}} \omega = \zeta_{N,0} \cdot \omega, \quad \omega_N = \frac{\Theta_z}{\sqrt{\Theta_{x,1} \cdot \Theta_y}} \omega = \zeta_{N,1} \cdot \omega$$

Dabei nutzen wir nach der Bemerkung in Aufgabe 3 die Bezeichnung $\Theta_{x,1} = \Theta_{x,0} + \Theta_{\text{gew}}$, wenn Θ_{gew} das Trägheitsmoment der zusätzlich angebrachten Gewichte ist, die wir über den Satz von Steiner berechnen können. Dividieren wir obige Gleichungen durcheinander und formen nach dem gesuchten Trägheitsmoment $\Theta_{x,0}$ um, so erhalten wir

$$\Theta_{x,0} = \frac{\Theta_{\text{gew}}}{\left(\frac{\zeta_{N,0}}{\zeta_{N,1}}\right)^2 - 1}$$

womit sich das zweite Hauptträgheitsmoment berechnet lässt. Das dritte Hauptträgheitsmoment Θ_y ergibt sich dann aus den anderen beiden unmittelbar aus Gleichung (1) und der in Origin bestimmten Steigung der Ausgleichsgeraden.

Aufgabe 7: Beschleunigtes Bezugssystem

Nachdem wir uns in den vorigen Aufgaben ausgiebig mit den verschiedenen Bewegungsformen des Kreisels beschäftigt haben, lernen wir abschließend noch den Kreiselkompass kennen, welcher eine wichtige Anwendungsmöglichkeit der erlernten Gesetzmäßigkeiten darstellt. Ein Kreiselkompass stellt sich auf der Erde immer stets so ein, dass seine Figurenachse in Nord-Süd-Richtung zeigt. Damit ist er ein interessantes Werkzeug zur Navigation.

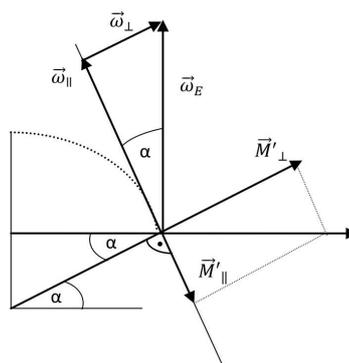
Es ist zunächst in unserem Versuchsaufbau notwendig, eine der Drehachsen, nämlich diejenige, welche durch den inneren Kardanrahmen gegeben ist, zu fesseln. Dadurch wird diese inelastisch an die Horizontale gebunden. Wir betrachten kurz die Theorie eines Kreiselkompasses. Dazu stellen wir ihn uns so ausgerichtet vor, dass dessen Achse anfangs parallel zur Erdoberfläche in Ost-West-Richtung stehe.

Einmal in Rotation versetzt, ist der Kreisel bestrebt, die Richtung seiner Drehimpulsachse \vec{L} im physikalischen Raum beizubehalten. Durch die Erdrotation mit $\vec{\omega}_E$ wird die Horizontale von der Erde aus gesehen relativ zum physikalischen Raum verschoben, da aber \vec{L} beibehalten wird, könnte man sich vorstellen, dass die Kreiselachse immer schräger zur Erdoberfläche ausgerichtet wird.

Durch das Schrägstellen des Kreisels relativ zur Erde bewirkt die im Kreiselzentrum angreifende Schwerkraft nun aber ein Drehmoment \vec{M} , welches die Kreiselachse auf eine Horizontale relativ zur Erde drücken will. Dieser neuen Rotationsbewegung ist ebenfalls ein Drehimpuls zugeordnet, welcher senkrecht auf dem Drehimpuls des Kreisels steht. Durch vektorielle Addition erhält man so einen Drehimpuls, der schräg in eine Richtung zeigt, die zwischen Süden und Westen respektive Norden und Osten zeigt.

Der Kreisel wird sich nun auf diese neue Drehimpulsachse einstellen, die Kreiselachse verschiebt sich also in oben genannte Richtung. Dies passiert so lange, bis die Kreiselachse genau in Nord-Süd-Richtung weist. Dann sorgt die Erdrotation nämlich nicht mehr für eine Veränderung des Drehimpulses \vec{L} des Kreisels im physikalischen Raum, sodass der Kreisel stets unter dem Einfluss der Schwerkraft in dieselbe Richtung zeigt.

Kreiselkompass sind so also nützliche Navigationsinstrumente, denn sie stellen sich stets in eine Nord-Süd-Richtung ein. Dieses Prinzip soll in nachfolgenden noch kurz mathematisch gefasst werden.



Wir wollen den Winkel zwischen $\vec{\omega}_E$ und \vec{L} mit Φ bezeichnen. In einer geographischen Breite $\alpha \neq 0^\circ$ ergeben sich so die Komponenten des wirksamen Drehmoments zu:

$$\|\vec{M}'_{\perp}\| = \Theta_z \cdot \omega \cdot \omega_E \cdot \sin \Phi \cdot \cos \alpha, \quad \|\vec{M}'_{\parallel}\| = \Theta_z \cdot \omega \cdot \omega_E \cdot \sin \Phi \cdot \sin \alpha$$

Das Drehmoment \vec{M} dreht den Kreisel also um die äußere Kardanachse, bis die Figurenachse in Nord-Süd-Richtung zeigt. Dann ist nämlich $\Phi = 0$, woraus sich ein Minimum für das resultierende Drehmo-

ment ergibt.

Im Experiment werden wir diesen Effekt durch die Erdrotation nicht sichtbar machen können, da diese zu gering ist, um den grob gelagerten Kardankreisel in Nord-Süd-Richtung auszulenken. Stattdessen verwenden wir einen Drehtisch, welcher eine wesentlich höhere Rotationsgeschwindigkeit ermöglicht. Mit einem Holzkeil simulieren wir außerdem eine geographische Breite von $\alpha = 30^\circ$. Dies ist unbedingt nötig, da sich sonst der Kreiselkompass am „Nordpol“ des Drehtisch-Systems befinden würde. Dort ist eine Ausrichtung in Nord-Süd-Richtung aus ersichtlichen Gründen unmöglich.

Quellenverzeichnis

Vorbereitungshilfen zum Versuch P2-71,74 Kreisel

Meschede, D.: Gerthsen Physik

Eichler, Kronfeldt, Sahn: Das neue physikalische Grundpraktikum

Demtröder, W.: Experimentalphysik Band 1 - Mechanik und Wärme

Skizze zu den Eulerwinkeln:

<http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Eulerangles.svg>

Skizze zur Rotation des Quaders:

<http://lp.uni-goettingen.de/get/text/1202>

Skizze zum Nutationskegel:

<https://lp.uni-goettingen.de/get/image/4209>

Skizze zum Kardankreisel und zum Kreiselkompass:

Vorbereitungshilfen zum Versuch P2-71,74 Kreisel

Physikalisches Anfängerpraktikum P2

**Versuch:
P2-71,74
Kreisel**

Auswertung inklusive
ausführlicher Fehlerrechnung

von

Georg Fleig (georg@leech.it)
Marcel Krause (mrrrc@leech.it)

Gruppe: Di-11

Datum der Versuchsdurchführung:
08.05.12

Aufgabe 1: Drehimpulserhaltung

Wir haben die in unserer Vorbereitung angeführten Demonstrationsversuche zur Drehimpulserhaltung durchgeführt. Dabei war es trotz sorgfältiger Überprüfung nicht ganz möglich, den Drehschemel exakt eben auszurichten, sodass auf den Experimentator stets durch die Schwerkraft ein zusätzliches Drehmoment wirkte.

In den einzelnen Versuchsteilen haben sich alle Voraussagen, die wir in der Vorbereitung ausgiebig diskutiert haben, bestätigt. Besonders deutlich zu sehen war dabei die sich einstellende Drehung in Aufgabe 1.2.2, als dem Experimentator der bereits rotierende Kreisel mit vertikal stehender Achse übergeben wurde. Auch der in Aufgabe 1.3 besprochene Pirouetteneffekt war sehr deutlich sichtbar.

Zur genaueren Erklärung sei auf die Diskussionen in der Vorbereitung verwiesen. Wir haben so in den Demonstrationsversuchen gezeigt, dass der Drehimpuls im System Experimentator - Kreisel - Drehschemel stets erhalten blieb.

Aufgabe 2: Freie Achsen

Der zweite Demonstrationsversuch diente uns dem Studium der Rotationsachsen einer quaderförmigen Schachtel, auf deren Seitenflächen jeweils eine Öse befestigt waren. Mit Hilfe eines Drahtes konnten wir je eine der Ösen mit einem Elektromotor verbinden und somit die Rotation um die entsprechenden Achsen simulieren.

Zunächst befestigten wir den Draht an der Achse des kleinsten Trägheitsmoments, also an der Öse, die an der kleinsten Quaderfläche befestigt war. Die Rotation des Quaders verlief bei kleinen Winkelgeschwindigkeiten stabil, bei einer größeren Motorleistung konnten wir durch eine Störung von außen erreichen, dass der Quader in der Luft umkippte und anschließend um die Achse des größten Trägheitsmoments rotierte.

Danach befestigten wir den Quader an der Öse, die an der größten Fläche befestigt war. Die sich dann einstellende Rotation um die Achse des größten Trägheitsmoments war stabil. Anschließend ließen wir den Quader noch um die Achse mittleren Trägheitsmoments rotieren. Bereits bei kleinen Drehgeschwindigkeiten fing der Körper stark an zu taumeln, sobald die Motorleistung höher geregelt wurde, kippte der Quader um und rotierte erneut um die Achse des größten Trägheitsmoments.

Damit ließen sich unsere Vermutungen aus der Vorbereitungen bestätigen. Rotationen um die Achse des kleinsten Trägheitsmoments verlaufen metastabil, die um die Achse des größten Trägheitsmoments stabil. Rotationen um die Achse mittleren Trägheitsmoments verlaufen stets höchst instabil und führen zu starken Taumelbewegungen.

Aufgabe 3: Kräftefreier Kreisel

Nachdem wir uns in den ersten beiden Aufgaben mit den Grundlagen von Rotationsbewegungen im Allgemeinen beschäftigt haben, wurde von uns nun in dieser und in den nachfolgenden Versuchen am Kardankreisel experimentiert. Zunächst haben wir uns mit der grundlegenden Bedienung des Kreisels vertraut gemacht.

Über einen Motor war es uns möglich, den Kreisel bis zu einer gewissen Frequenz zu beschleunigen. Die Frequenzmessung selbst erfolgte über einen Lichtsensor, der auf einen auf dem Kreisel befindlichen, dünnen Reflektorstreifen reagierte. Der Sensor selbst war über eine geeignete Schaltung mit einem Messverstärker verbunden, von dem wir direkt die gemessenen Frequenzen ablesen konnten.

Ziel dieser Versuchsreihe war nun die Bestimmung der Nutationsfrequenz ν_N des Kreisels in Abhängigkeit von seiner aktuellen Drehfrequenz ν . Am äußeren Kardanrahmen war eine rechteckige Reflektorfläche aufgeklebt. Wir nahmen einen zweiten Lichtsensor und richteten ihn so aus, dass er zunächst über diese Reflektorfläche hinausragte.

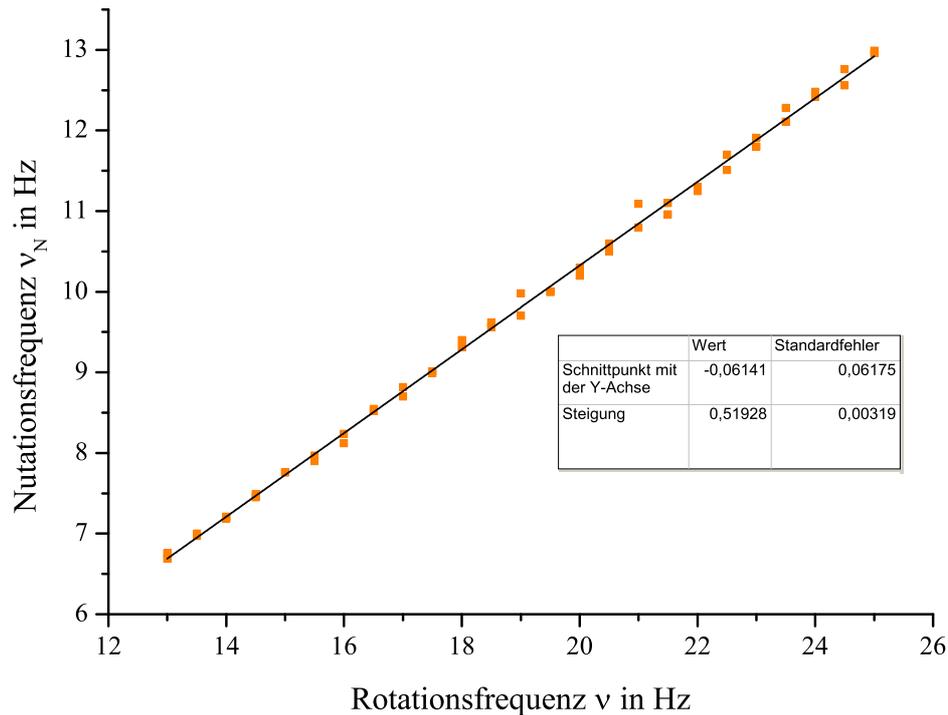
Wir beschleunigten den Kreisel dann, bis eine Frequenz von $\nu = 25,0 \text{ Hz}$ erreicht war. Immer nach einem Frequenzintervall von $\Delta\nu = 0,5 \text{ Hz}$ gaben wir dann dem Kardanrahmen einen kräftigen Stoß, sodass sich Nutationsfiguren einstellen. Dadurch taumelte der Rahmen stets auf und ab, was der zweite Lichtsensor registrieren konnte. So konnten wir direkt die Nutationsfrequenz bestimmen.

Nachfolgend sind unsere Messwerte dargestellt. Wir haben dabei zwei Messreihen durchgeführt, um den statistischen Fehler zu minimieren.

Messreihe 1:			
ν in Hz	ν_N in Hz	ν in Hz	ν_N in Hz
25,0	12,96	18,5	9,56
24,5	12,56	18,0	9,40
24,0	12,42	17,5	8,99
23,5	12,11	17,0	8,82
23,0	11,91	16,5	8,55
22,5	11,70	16,0	8,12
22,0	11,25	15,5	7,97
21,5	10,96	15,0	7,76
21,0	11,09	14,5	7,49
20,5	10,50	14,0	7,19
20,0	10,20	13,5	6,97
19,5	10,00	13,0	6,69
19,0	9,70		

Messreihe 2:			
ν in Hz	ν_N in Hz	ν in Hz	ν_N in Hz
25,0	12,99	18,5	9,62
24,5	12,76	18,0	9,31
24,0	12,48	17,5	9,01
23,5	12,28	17,0	8,70
23,0	11,80	16,5	8,52
22,5	11,51	16,0	8,24
22,0	11,30	15,5	7,90
21,5	11,10	15,0	7,76
21,0	10,80	14,5	7,45
20,5	10,60	14,0	7,21
20,0	10,30	13,5	7,00
19,5	10,00	13,0	6,76
19,0	9,98		

Anschließend haben wir für beide Messreihen gemeinsam die Nutationsfrequenz über der Kreiselfrequenz aufgetragen. Dabei ergab sich das nachfolgende Schaubild.



Es ergibt sich also ein linearer Zusammenhang zwischen ν_N und ν . In der Vorbereitung haben wir Gleichung (1) zur Herleitung dieses linearen Zusammenhangs betrachtet. Wälzt man die Gleichung von den Kreisfrequenzen auf die Frequenzen um, so ergibt sich:

$$\nu_N = \frac{\Theta_z}{\sqrt{\Theta_{x,\text{korr}} \cdot \Theta_{y,\text{korr}}}} \cdot \nu = \zeta_{N,0} \cdot \nu$$

Origin lieferte uns die Steigung der Regressionsgeraden zu:

$$\zeta_{N,0} = 0,519 \pm 0,003$$

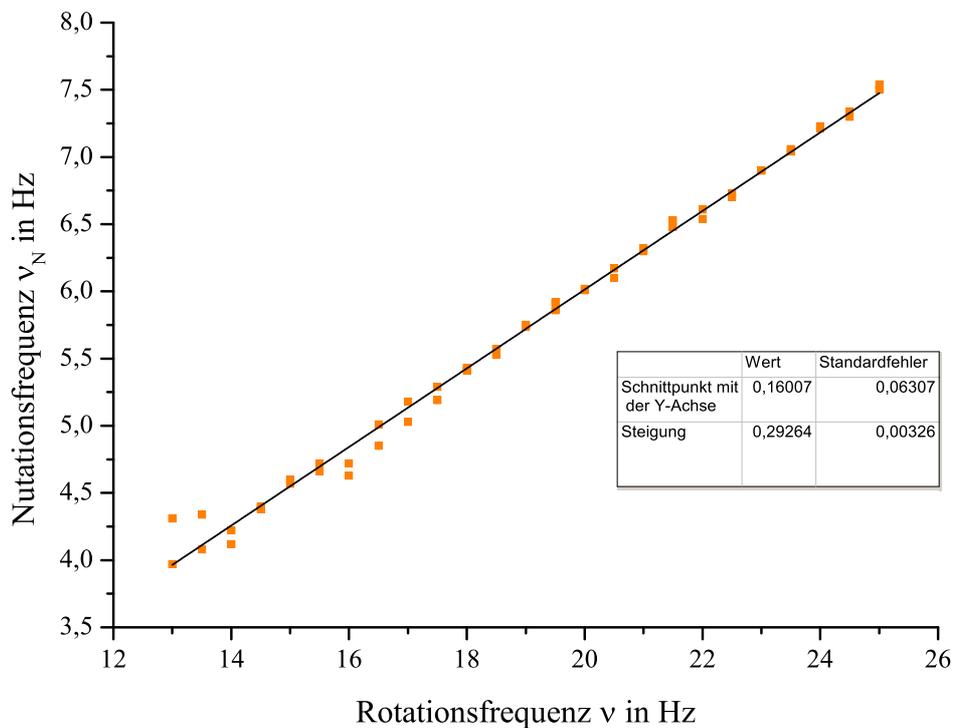
Wir haben anschließend an den äußeren Kardanrahmen zwei zusätzliche, zylindrische Gewichte angebracht, deren Massen laut Aufgabenblatt zu jeweils $m = (1000 \pm 1)$ g gegeben waren. Durch das Anbringen dieser Gewichte erhöht sich das Trägheitsmoment bei der für die Nutationsbewegung relevanten Rotationsachse.

Die Messungen wurden von uns nun wiederholt. Erneut haben wir zwei Messreihen aufgenommen, um den statistischen Fehler so niedrig wie möglich zu halten. Unsere Messwerte sind nachfolgend dargestellt.

Messreihe 1:			
v in Hz	ν_N in Hz	v in Hz	ν_N in Hz
25,0	7,50	18,5	5,57
24,5	7,30	18,0	5,41
24,0	7,21	17,5	5,29
23,5	7,06	17,0	5,03
23,0	6,90	16,5	4,85
22,5	6,70	16,0	4,72
22,0	6,61	15,5	4,66
21,5	6,48	15,0	4,57
21,0	6,30	14,5	4,38
20,5	6,10	14,0	4,22
20,0	6,01	13,5	4,08
19,5	5,86	13,0	3,97
19,0	5,75		

Messreihe 2:			
v in Hz	ν_N in Hz	v in Hz	ν_N in Hz
25,0	7,54	18,5	5,53
24,5	7,34	18,0	5,43
24,0	7,23	17,5	5,19
23,5	7,04	17,0	5,18
23,0	6,90	16,5	5,01
22,5	6,73	16,0	4,63
22,0	6,54	15,5	4,72
21,5	6,53	15,0	4,60
21,0	6,32	14,5	4,40
20,5	6,17	14,0	4,12
20,0	6,02	13,5	4,34
19,5	5,92	13,0	4,31
19,0	5,74		

Eine Auftragung von ν_N über ν gemeinsam für beide Messreihen ergab das nachfolgende Schaubild.



Es ergab sich wieder ein linearer Zusammenhang, sodass erneut eine mit Origin durchgeführte Regression gerechtfertigt war. Die Steigung $\zeta_{N,1}$ war dann gegeben zu:

$$\zeta_{N,1} = 0,293 \pm 0,003$$

Im Vergleich zur Messung ohne zusätzliche Gewichte ist zu sagen, dass es uns vor allem im Bereich niedriger Kreiselfrequenzen sehr schwer fiel, noch vernünftige Messwerte aufzunehmen. Dies lag vor allem an der zunehmend schwächer ausgeprägten Nutationsbewegung. Außerdem wurde durch das größere Trägheitsmoment die Nutation stärker gedämpft, sodass wir stärker auf den Rahmen schlagen mussten,

um diese noch relativ ausgeprägt sichtbar machen zu können.

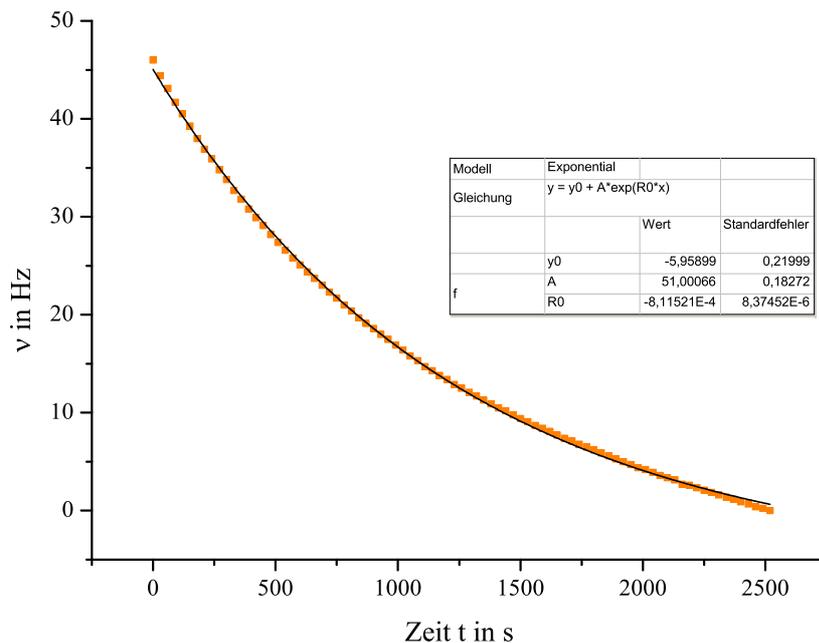
Wir werden die von uns hier bestimmten Steigungen abschließend in Aufgabe 6 benutzen, um die Hauptträgheitsmomente des von uns verwendeten Kreisels zu bestimmen.

Aufgabe 4: Dämpfung des Kreisels

Ziel der Aufgabe war es, die Dämpfungsform des Kreisels zu analysieren und zu beschreiben. Dazu beschleunigten wir den Kiesel auf die Maximalfrequenz von $\nu_{\max} = 47,0 \text{ Hz}$ und maßen dann, beginnend ab einer Frequenz von $\nu_{\max} = 46,0 \text{ Hz}$, in einem Zeitintervall von $\Delta t = 30 \text{ s}$ die aktuelle Drehfrequenz des Kreisels. Es ergaben sich dabei die nachfolgend dargestellten Messwerte.

t in s	ν in Hz	t in s	ν in Hz	t in s	ν in Hz
0	46,0	870	19,1	1740	6,8
30	44,4	900	18,6	1770	6,5
60	43,1	930	18,0	1800	6,2
90	41,7	960	17,5	1830	5,9
120	40,5	990	16,9	1860	5,6
150	39,3	1020	16,4	1890	5,3
180	38,0	1050	15,8	1920	5,0
210	36,9	1080	15,3	1950	4,7
240	35,9	1110	14,7	1980	4,4
270	34,8	1140	14,3	2010	4,2
300	33,8	1170	13,8	2040	3,9
330	32,7	1200	13,4	2070	3,6
360	31,8	1230	12,9	2100	3,4
390	30,8	1260	12,5	2130	3,2
420	29,9	1290	12,1	2160	2,7
450	29,1	1320	11,7	2190	2,6
480	28,2	1350	11,3	2220	2,4
510	27,4	1380	10,9	2250	2,1
540	26,6	1410	10,5	2280	1,9
570	25,8	1440	10,2	2310	1,6
600	25,1	1470	9,8	2340	1,4
630	24,4	1500	9,4	2370	1,2
660	23,7	1530	9,1	2400	0,9
690	23,0	1560	8,7	2430	0,7
720	22,3	1590	8,4	2460	0,4
750	21,7	1620	8,1	2490	0,2
780	21,0	1650	7,7	2520	0,0
810	20,4	1680	7,4		
840	19,7	1710	7,1		

Zur Veranschaulichung haben wir die Frequenz ν des Kreisels über der seit dem Messbeginn abgelaufenen Zeit t aufgetragen. Dabei ergab sich folgendes Schaubild.



Man erkennt sehr schön, dass die Kreiselfrequenz exponentiell mit der Zeit abfällt. Dies deckt sich auch gut mit unseren Vermutungen aus der Vorbereitung. Da wir den Kreisel als eine Form des harmonischen Oszillators betrachten können, ergibt sich aufgrund der auftretenden Reibungen eine exponentielle Dämpfung der Frequenz.

Aufgrund der Tatsache, dass der von uns verwendete Kreisel erst nach einer Zeit von $t = 42$ min zum Stillstand kam kann man davon ausgehen, dass die Kreiselachse hervorragend gelagert und der Kreisel selbst gut austariert waren.

Aufgabe 5: Einfluss äußerer Drehmomente

In der nachfolgenden Versuchsreihe war es unser Ziel, die Präzession des Kreisels näher zu untersuchen, die neben der Nutation eine weitere typische Bewegungsform aller Kreiselkörper darstellt. Damit der Kreisel Präzessionen ausführt, muss er einem permanenten äußeren Drehmoment unterliegen. Dies haben wir dadurch erreicht, dass wir, wie in der Vorbereitung angegeben, eine Stahlstange an den Rand des inneren Kardanrahmens geschraubt haben.

Das von uns durchgeführte Messverfahren wurde im Vergleich zu dem in der Vorbereitung diskutierten leicht variiert. Wir haben zunächst am Anfang einer jeden Messung die Stange, und damit die Kreiselachse, so fixiert, dass eine am äußeren Kardanrahmen angebrachte Markierung deckungsgleich war zur entsprechenden Markierung am Standfuß des Kreisels.

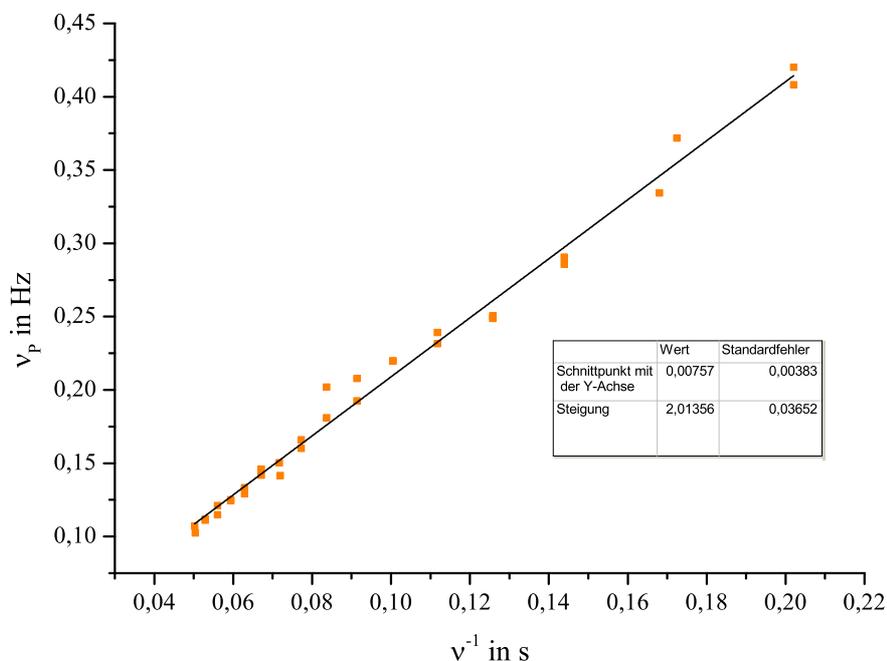
Dann wurde von uns die momentane Kreiselfrequenz ν gemessen. Direkt nach der Messung haben wir die Stange losgelassen und die Zeit t gestoppt, die der Kreisel für eine vollständige Präzession benötigte. Die Stange wurde von uns wieder festgehalten und erneut die Kreiselfrequenz gemessen.

Damit ergaben sich bei uns pro Messdurchgang drei Messwerte. Da wir die Präzessionsfrequenz direkt

aus der Umlaufzeit t bestimmen, diese aber in Abhängigkeit von der momentanen Kreisfrequenz angeben wollen, müssen wir letztere aus den beiden gemessenen Werten der Kreisfrequenz mitteln. Dann erhalten wir also die Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit von der mittleren Kreisfrequenz je Umlauf. In der nachfolgenden Tabelle sind die von uns aufgenommenen Messwerte abgebildet. Die Kreisfrequenz ν ist hierbei direkt die nach obigem Verfahren gemittelte Frequenz der beiden gemessenen Werte je Durchgang. Auch hier haben wir zwei Messreihen durchgeführt, um die Genauigkeit zu erhöhen.

Messreihe 1:				Messreihe 2:			
ν in Hz	t in s	ν_p in Hz	ν^{-1} in s	ν in Hz	t in s	ν_p in Hz	ν^{-1} in s
19,9	9,77	0,10	0,05	19,9	9,35	0,11	0,05
18,9	9,00	0,11	0,05	18,9	8,95	0,11	0,05
17,9	8,70	0,11	0,06	17,9	8,25	0,12	0,06
16,9	8,04	0,12	0,06	16,9	8,00	0,13	0,06
15,9	7,74	0,13	0,06	15,9	7,50	0,13	0,06
14,9	7,05	0,14	0,07	14,9	6,85	0,15	0,07
13,9	7,06	0,14	0,07	14,0	6,65	0,15	0,07
13,0	6,24	0,16	0,08	13,0	6,02	0,17	0,08
12,0	5,52	0,18	0,08	12,0	4,95	0,20	0,08
11,0	5,19	0,19	0,09	11,0	4,81	0,21	0,09
10,0	4,55	0,22	0,10	10,0	4,55	0,22	0,10
9,0	4,32	0,23	0,11	9,0	4,18	0,24	0,11
8,0	3,99	0,25	0,13	8,0	4,02	0,25	0,13
7,0	3,44	0,29	0,14	7,0	3,50	0,29	0,14
6,0	2,99	0,33	0,17	5,8	2,69	0,37	0,17
5,0	2,45	0,41	0,20	5,0	2,38	0,42	0,20

Tragen wir die Präzessionsfrequenz über die reziproke Kreisfrequenz für beide Messreihen gemeinsam auf, so erhalten wir das nachfolgende Schaubild.



Es ergibt sich dabei, wie wir es in der Vorbereitung hergeleitet haben, ein linearer Zusammenhang. Auch hier wollen wir die von uns aufgestellte Gleichung (2) noch auf die Frequenzen umwälzen:

$$\nu_P = \frac{mgr}{4\pi^2\Theta_z} \cdot \nu^{-1} = \zeta_{P,0} \cdot \nu^{-1}$$

Origin lieferte uns durch lineare Regression die Steigung:

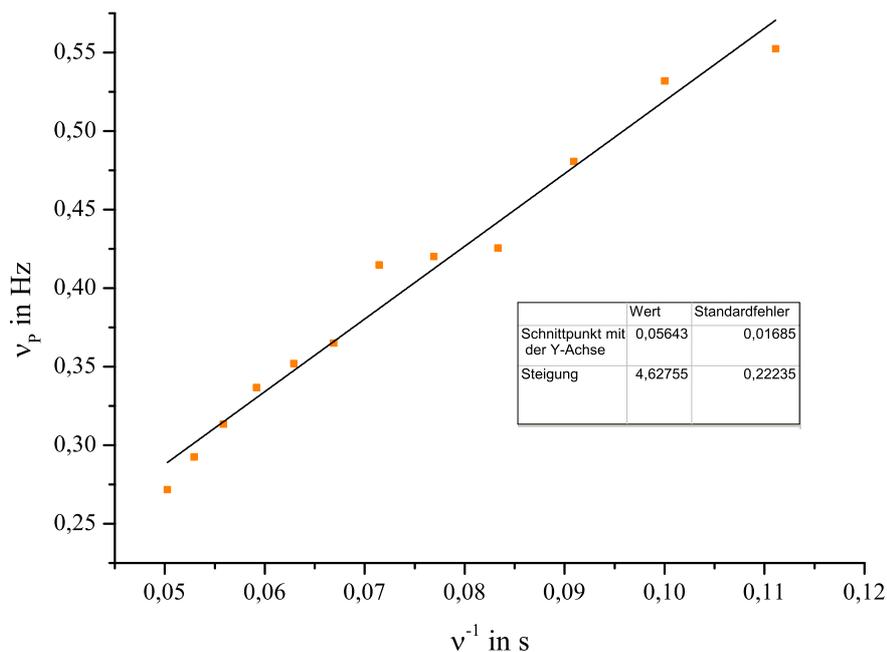
$$\zeta_{P,0} = 2,014 \pm 0,037$$

Wir variierten den Versuch noch dergestalt, dass wir auf die Stange ein zusätzliches zylindrisches Gewicht aufgebracht haben, sodass sich das auf den Kreisel wirkende, äußere Drehmoment erhöhte. Nach Absprache mit unserem Betreuer haben wir den Abstand d des Kreiselzentrums zum Zentrum des zylindrischen Gewichts von Hand gemessen und kamen auf $d = (38,5 \pm 0,1)$ cm.

Wir haben die Messungen wie zuvor durchgeführt, dieses Mal aber nach Absprache mit unserem Betreuer auf eine zweite Messreihe verzichtet. Nachfolgend sind wieder unsere Messwerte abgedruckt.

Messreihe 1:			
v in Hz	t in s	ν_P in Hz	ν^{-1} in s
19,9	3,68	0,27	0,05
18,9	3,42	0,29	0,05
17,9	3,19	0,31	0,06
16,9	2,97	0,34	0,06
15,9	2,84	0,35	0,06
15,0	2,74	0,36	0,07
14,0	2,41	0,41	0,07
13,0	2,38	0,42	0,08
12,0	2,35	0,43	0,08
11,0	2,08	0,48	0,09
10,0	1,88	0,53	0,10
9,0	1,81	0,55	0,11

Auch hier haben wir wieder die Präzessionsfrequenz über der reziproken Kreiselfrequenz aufgetragen.



Die lineare Regression in Origin lieferte uns die Steigung:

$$\zeta_{P,1} = 4,678 \pm 0,222$$

Man erkennt im Vergleich zur ersten Versuchsreihe ohne zusätzliches Gewicht, dass sich eine größere Streuung der Messwerte ergab. Dies führen wir auf die erhöhte Präzessionsfrequenz zurück, die ein genaues Stoppen der Periodendauer erschwerte.

Es ergaben sich außerdem bei allen Messungen Fehler durch zusätzliche Nutationen, die sich von uns trotz größter Sorgfalt nicht verhindern ließen. Diese waren im zweiten Versuchsteil bei aufgestecktem Zusatzgewicht so erheblich ausgeprägt, dass eine genaue Messung der Zeit nicht mehr möglich war.

In der nachfolgenden Aufgabe werden wir die von uns bestimmten Steigungen nun zur Bestimmung der Hauptträgheitsmomente verwenden.

Aufgabe 6: Hauptträgheitsmomente

Mit den Ergebnissen aus Aufgabe 3 und 5 können wir nun die Hauptträgheitsmomente des Kreisels bestimmen. Verwenden lassen sich davon die Steigungen der Regressionsgeraden. Diese sind hier nochmals mit ihren statistischen Fehlern aufgelistet.

Steigungen	
$\zeta_{N,0}$	$0,519 \pm 0,003$
$\zeta_{N,1}$	$0,293 \pm 0,003$
$\zeta_{P,0}$	$2,014 \pm 0,037$
$\zeta_{P,1}$	$4,628 \pm 0,222$

Weiterhin werden noch einige Abstände und Massen benötigt. Diese wurden bis auf r_S und l_G alle aus der Vorbereitungsmappe entnommen.

Massen in g	
Zylindergewichte (m_Z)	1000 ± 1
Stab (m_S)	330 ± 1
verschiebbares Gewicht (m_G)	375 ± 1

Abstände in mm	
Durchmesser Zylindergewicht (d_Z)	$40 \pm 0,1$
Kreiselschwerpunkt - aufgeschraubtes Zylindergewicht (l_Z)	149 ± 1
Kreiselschwerpunkt - äußerer Rand des inneren Kardanrahmens (r_{iR})	$109,1 \pm 0,3$
Schwerpunkt Stab - Rahmen (r_S)	175 ± 1
Durchmesser der Kreiselscheibe (d_R)	$135 \pm 0,1$
verschiebbares Gewicht - Kreiselschwerpunkt (l_G)	385 ± 1

Mit all diesen Angaben ist es uns nun möglich die Hauptträgheitsmomente des Kreisels zu bestimmen.

Berechnung von Θ_x

Bevor wir Θ_x berechnen können, müssen wir zunächst noch das Trägheitsmoment Θ_{Gew} der Zylindergewichte bestimmen. Dazu wenden wir den Satz von Steiner auf das Trägheitsmoment der beiden einzelnen

Gewichte an und nehmen dieses mal zwei:

$$\Theta_{\text{Gew}} = 2 \left(\frac{1}{2} m_Z \left(\frac{d_Z}{2} \right)^2 + m_Z \left(l_Z + \frac{d_Z}{2} \right)^2 \right) = 0,0575 \text{ kg m}^2$$

Den zugehörigen systematischen Fehler $\Delta\Theta_{\text{Gew}}$ erhalten wir mit der arithmetischen Fehlerfortpflanzung und den Fehlern bereits angegebenen Strecken und Massen:

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_{\text{Gew}} &= \left| \frac{\partial\Theta_{\text{Gew}}}{\partial m_Z} \right| \Delta m_Z + \left| \frac{\partial\Theta_{\text{Gew}}}{\partial d_Z} \right| \Delta d_Z + \left| \frac{\partial\Theta_{\text{Gew}}}{\partial l_Z} \right| \Delta l_Z \\ &= 2 \left(\frac{3}{8} d_Z^2 + d_Z l_Z + l_Z^2 \right) \Delta m_Z + \left(\frac{3}{2} d_Z m_Z + 2 l_Z m_Z \right) \Delta d_Z + 2(d_Z + 2l_Z) m_Z \Delta l_Z \\ &= 0,00077 \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

Das äußere Trägheitsmoment der beiden Zylindergewichte ergibt sich so also zu

$$\Theta_{\text{Gew}} = (0,0575 \pm 0,0008) \text{ kg m}^2$$

In der Vorbereitung wurden bereits Gleichungen hergeleitet, über welche wir mit den Steigungen $\zeta_{N,i}$ aus den Graphen von Aufgabe 3 das Trägheitsmoment Θ_x bestimmen können:

$$\Theta_x = \frac{\Theta_{\text{Gew}}}{\left(\frac{\zeta_{N,0}}{\zeta_{N,1}} \right)^2 - 1} = 0,0269 \text{ kg m}^2$$

Hierzu kann ein systematischer sowie ein statistischer Fehler angegeben werden.

Systematischer Fehler

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_x &= \left| \frac{\partial\Theta_x}{\partial\Theta_{\text{Gew}}} \right| \Delta\Theta_{\text{Gew}} \\ &= \frac{\Delta\Theta_{\text{Gew}}}{\left(\frac{\zeta_{N,0}}{\zeta_{N,1}} \right)^2 - 1} \\ &= 0,00037 \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

Statistischer Fehler

$$\begin{aligned} \sigma_{\Theta_x} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_x}{\partial\zeta_{N,0}} \sigma_{\zeta_{N,0}} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta_x}{\partial\zeta_{N,1}} \sigma_{\zeta_{N,1}} \right)^2} \\ &= \left| \frac{2\Theta_{\text{Gew}} \cdot \frac{\zeta_{N,0}}{\zeta_{N,1}^2}}{\left(\left(\frac{\zeta_{N,0}}{\zeta_{N,1}} \right)^2 - 1 \right)^2} \right| \sqrt{(\sigma_{\zeta_{N,0}})^2 + \left(\frac{\zeta_{N,0}}{\zeta_{N,1}} \sigma_{\zeta_{N,1}} \right)^2} \\ &= 0,0004 \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich unser Θ_x zu

$$\Theta_x = (0,0269 \pm 0,0004 \pm 0,0004) \text{ kg m}^2$$

Berechnung von Θ_z

Mit den Ergebnissen aus Aufgabe 5 können wir das Trägheitsmoment Θ_z um die Figurenachse des Kreisels bestimmen. Dies erfolgt ein mal für den Fall mit dem zusätzlichen Gewicht am Stab und ein mal nur mit dem Stab. Die Formel hierzu wurde bereits in der Vorbereitung hergeleitet. Wieder benutzen wir die Steigungen $\zeta_{P,i}$ der Regressionsgeraden aus den Graphen.

$$\Theta_z = \frac{mrg}{4\pi^2\zeta_{P,i}}$$

Wir müssen die beiden Fälle mit und ohne Zusatzgewicht am Stab hierbei einzeln betrachten.

Stab ohne Zusatzgewicht

Zunächst haben wir die Messung nur mit dem Stab, ohne ein zusätzliches Gewicht durchgeführt. So erhalten wir für das Trägheitsmoment $\Theta_{z,0}$:

$$\Theta_{z,0} = \frac{m_S g (r_S + r_{iR})}{4\pi^2 \zeta_{P,0}} = 0,0116 \text{ kg m}^2$$

Systematischer Fehler

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_{z,0} &= \left| \frac{\partial\Theta_{z,0}}{\partial m_S} \right| \Delta m_S + \left| \frac{\partial\Theta_{z,0}}{\partial r_S} \right| \Delta r_S + \left| \frac{\partial\Theta_{z,0}}{\partial r_{iR}} \right| \Delta r_{iR} \\ &= \left| \frac{\Theta_{z,0}}{m_S} \right| \Delta m_S + \left| \frac{m_S g}{4\pi^2 \zeta_{P,0}} \right| (\Delta r_S + \Delta r_{iR}) \\ &= 0,0001 \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

Statistischer Fehler

$$\begin{aligned} \sigma_{\Theta_{z,0}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_{z,0}}{\partial \zeta_{P,0}} \sigma_{\zeta_{P,0}} \right)^2} \\ &= \frac{\Theta_{z,0}}{\zeta_{P,0}} \sigma_{\zeta_{P,0}} \\ &= 0,0002 \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich das Trägheitsmoment $\Theta_{z,0}$ ohne Gewicht am Stab zu

$$\Theta_{z,0} = (0,0116 \pm 0,0001 \pm 0,0002) \text{ kg m}^2$$

Stab mit Zusatzgewicht

Als Variation der Messung haben wir im Abstand $l_G = (38,5 \pm 0,1) \text{ cm}$ vom Kreiselschwerpunkt ein zusätzliches Gewicht der Masse $m_G = (375 \pm 1) \text{ g}$ angebracht. Dieses muss nun in der Berechnung des Trägheitsmomentes berücksichtigt werden.

$$\Theta_{z,1} = \frac{m_S g (r_S + r_{iR}) + m_G g l_G}{4\pi^2 \zeta_{P,1}} = 0,0128 \text{ kg m}^2$$

Systematischer Fehler

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_{z,1} &= \left| \frac{\partial\Theta_{z,1}}{\partial m_S} \right| \Delta m_S + \left| \frac{\partial\Theta_{z,1}}{\partial r_S} \right| \Delta r_S + \left| \frac{\partial\Theta_{z,1}}{\partial r_{iR}} \right| \Delta r_{iR} + \left| \frac{\partial\Theta_{z,1}}{\partial m_G} \right| \Delta m_G + \left| \frac{\partial\Theta_{z,1}}{\partial l_G} \right| \Delta l_G \\ &= \frac{g}{4\pi^2\zeta_{P,1}} [(r_S + r_{iR})\Delta m_S + m_S(\Delta r_S + \Delta r_{iR}) + l_G\Delta m_G + m_G\Delta l_G] \\ &= 0,0012 \text{ kg m}^2\end{aligned}$$

Statistischer Fehler

$$\begin{aligned}\sigma_{\Theta_{z,1}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_{z,1}}{\partial \zeta_{P,0}} \sigma_{\zeta_{P,0}} \right)^2} \\ &= \frac{\Theta_{z,1}}{\zeta_{P,1}} \sigma_{\zeta_{P,1}} \\ &= 0,0006 \text{ kg m}^2\end{aligned}$$

So erhalten wir für das Trägheitsmoment $\Theta_{z,1}$ mit Gewicht am Stab

$$\Theta_{z,1} = (0,0128 \pm 0,0012 \pm 0,0006) \text{ kg m}^2$$

Bildet man den Mittelwert der beiden Ergebnisse, ergibt sich das Trägheitsmoment Θ_z der Figurenachse des Kreisels, welches wir für weitere Berechnungen verwenden werden.

$$\Theta_z = (0,0122 \pm 0,0007 \pm 0,0004) \text{ kg m}^2$$

Berechnung von Θ_y

Das letzte verbliebene Trägheitsmoment können wir schließlich über die beiden anderen Trägheitsmomente mit folgender Beziehung aus der Vorbereitung berechnen:

$$\begin{aligned}\nu_N &= \frac{\Theta_z}{\sqrt{\Theta_x\Theta_y}} \nu = \zeta_{N,0} \nu \\ \Rightarrow \Theta_y &= \frac{\Theta_z^2}{\zeta_{N,0}^2 \Theta_x} \\ &= 0,0205 \text{ kg m}^2\end{aligned}$$

Systematischer Fehler

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_y &= \left| \frac{\partial\Theta_y}{\partial \Theta_x} \right| \Delta\Theta_x + \left| \frac{\partial\Theta_y}{\partial \Theta_z} \right| \Delta\Theta_z \\ &= \Theta_y \left(\frac{1}{\Theta_x} \Delta\Theta_x + \frac{2}{\Theta_z} \Delta\Theta_z \right) \\ &= 0,0033 \text{ kg m}^2\end{aligned}$$

Statistischer Fehler

$$\begin{aligned}\sigma_{\Theta_y} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_y}{\partial\zeta_{N,0}} \sigma_{\zeta_{N,0}}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_x} \sigma_{\Theta_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_z} \sigma_{\Theta_z}\right)^2} \\ &= \Theta_y \sqrt{\left(\frac{2}{\zeta_{N,0}} \sigma_{\zeta_{N,0}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Theta_x} \sigma_{\Theta_x}\right)^2 + \left(\frac{2}{\Theta_z} \sigma_{\Theta_z}\right)^2} \\ &= 0,0003 \text{ kg m}^2\end{aligned}$$

Somit ergibt sich das Trägheitsmoment Θ_y zu

$$\Theta_y = (0,0205 \pm 0,0033 \pm 0,0003) \text{ kg m}^2$$

Im Vergleich dazu das Trägheitsmoment Θ_x

$$\Theta_x = (0,0269 \pm 0,0003 \pm 0,0004) \text{ kg m}^2$$

Eigentlich sollten diese beiden Werte recht nahe bei einander liegen, da es sich um einen ziemlich symmetrischen Kreisel handelte. Θ_y hat bereits einen sehr großen systematischen Fehler, der auf die ungenaue Messung von Θ_z zurückzuführen ist, jedoch reicht dieser Fehlerbereich nicht aus um Θ_x abzudecken. Da Θ_y von Θ_z abhängt, welches wir zuvor ebenfalls experimentell bestimmt haben, kommt hier eine gewisse Ungenauigkeit zustande, welche bereits zuvor diskutiert wurde. Die beiden Werte $\Theta_{z,0}$ und $\Theta_{z,1}$, aus welchen der Mittelwert gebildet wurde, weichen ziemlich voneinander ab. Wir vermuten, dass wir mit einer weiteren Messreihe von Θ_z bei einem anderen Abstand des Gewichtes einen noch höheren Wert erzielt hätten, welcher wiederum Θ_y näher an Θ_x heranbringen würde.

Ein weiterer Grund könnte die leichte Beschädigung des Kugellagers sein, die auf nicht korrekte Montage des Kreisels zurückzuführen ist. Der Kreisel war zu Beginn des Versuchs falsch montiert, wurde dann aber von den Technikern repariert. Es ist nicht auszuschließen, dass er dabei teilweise seine Symmetrie verloren hat.

Masse m_R des Rotors

Abschließend können wir nun die Masse des Rotors aus dem Trägheitsmoment der Zylinderscheibe berechnen.

$$\begin{aligned}\Theta_z &= \frac{1}{2} m_R \left(\frac{d_R}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow m_R &= \frac{8 \Theta_z}{d_R^2} = 5,36 \text{ kg}\end{aligned}$$

Auch hier lassen sich wieder ein statistischer und ein systematischer Fehler angeben:

Systematischer Fehler

$$\begin{aligned}\Delta m_R &= \left|\frac{\partial m_R}{\partial d_R}\right| \Delta d_R + \left|\frac{\partial m_R}{\partial \Theta_z}\right| \Delta \Theta_z \\ &= m_R \left(\frac{2}{d_R} \Delta d_R + \frac{1}{\Theta_z} \Delta \Theta_z\right) \\ &= 0,40 \text{ kg}\end{aligned}$$

Statistischer Fehler

$$\begin{aligned}\sigma_{m_R} &= \sqrt{\left(\frac{\partial m_R}{\partial \Theta_z} \sigma_{\Theta_z}\right)^2} \\ &= \frac{m_R}{\Theta_z} \sigma_{\Theta_z} \\ &= 0,26 \text{ kg}\end{aligned}$$

Die Masse des Rotors ergibt sich zu

$$m_R = (5,36 \pm 0,40 \pm 0,26) \text{ kg}$$

Aufgrund der Ungenauigkeit von Θ_z haben wir auch hier einen recht großen systematischen sowie statistischen Fehler. Die Abschätzung der Rotormasse halten wir daher nicht für sonderlich genau.

Aufgabe 7: Beschleunigtes Bezugssystem

Wir betrachteten als abschließenden Demonstrationsversuch noch einen Kreiselkompass, um dessen Funktionsweise zu studieren. Entgegen den Angaben in der Vorbereitung haben wir dazu nicht den von uns verwendeten Versuchskreisel benutzt, denn es stand bereits ein voll funktionstüchtiges Modell eines Kreiselkompasses zur Verfügung.

Dieses bestand aus einem Kardankreisel mit gefesseltem horizontalem Rahmen, welches über ein Gestänge schräg auf einem Drehteller platziert wurde. Wir haben den Kreisel von Hand beschleunigt und den Motor des Drehtellers angestellt. Durch die Schräglage des Kreisels simulierten wir die geographische Breite in Karlsruhe und durch die Rotation auf dem Drehteller eine um ein Vielfaches beschleunigte Erdrotation.

Wir konnten dann beobachten, wie sich die Achse des Kardankreisels nach längerem Auspendeln in Nord-Süd-Richtung ausrichtete, genau so, wie wir es in der Vorbereitung vorhergesagt und erläutert haben. Die schnelle Rotation des Drehtellers ist aufgrund der relativ niedrigen Kreiselfrequenz von Nöten. Wollte man mit demselben Kompass tatsächlich eine Nord-Süd-Ausrichtung nur aufgrund der Erdrotation durchführen, so hätten wir ihn auf sehr viel höhere Frequenzen beschleunigen müssen, als dies uns möglich gewesen wäre.