Praktikumsvorbereitung
Kreisel

André Schendel, Silas Kraus
Gruppe DO-20

5. Mai 2012

Grundlagen

0.1 Trägheitsmoment

Wenn Rotationsbewegungen starrer Körper betrachtet werden sollen, ist es nicht mehr möglich, die Masse des Körpers als idealen Massepunkt im Schwerpunkt des Körpers anzunehmen. Stattdessen wird das Trägheitsmoment Θ eingeführt. Dieses ist im Allgemeinen verschieden, je nachdem um welche Achse der Körper rotiert. Es wird durch Integration über alle infinitesimalen Masseelemente dm im Abstand r von der Rotationsachse errechnet:

$$\Theta = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV$$

0.2 Kreisel, Hauptträgheitsachsen

Physikalisch versteht man unter einem Kreisel einen beliebig geformten starren Körper, der sich um einen Fixpunkt bewegt. Jeder Körper hat 3 Hauptträgheitsachsen, die zueinander orthogonal sind. Kreiselbewegungen können in Linearkombinationen von Drehungen um diese 3 Achsen zerlegt werden:

Die kardanische Aufhängung macht sich dies zu Nutze. Sie ermöglicht es, nur mit 3 zueinander orthogonalen Drehachsen Körper in beliebiger Position stabil zu halten, unabhängig von Drehbewegungen des Laborsystems.
Die drei Hauptträgheitsmomente Θ_i hängen über die Eulerschen Gleichungen zusammen:

$$\begin{aligned} M_1 &= \Theta_1\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\omega_2\omega_3 \\ M_2 &= \Theta_2\dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_1\omega_3 \\ M_3 &= \Theta_3\dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)\omega_1\omega_2 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen resultiert, dass der Körper um die Achsen mit dem größten und dem geringsten Trägheitsmoment stabil rotiert, während eine Rotation um die letzte Achse instabil wird und bestrebt ist, in eine Rotation um eine der beiden anderen Achsen überzugehen.

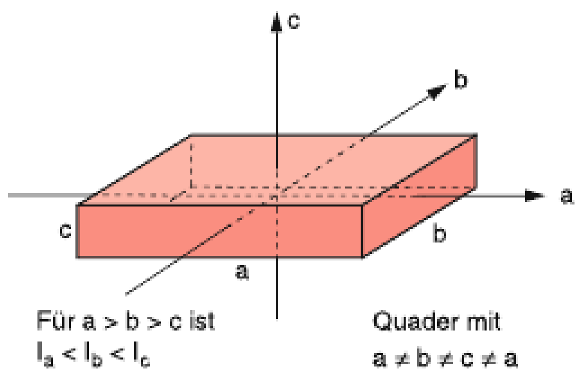

Abbildung 1: Rotationsachsen eines Quaders. *Quelle: Vorbereitungshilfe, Seite 4*

0.3 Drehimpulserhaltung

Ein Körper, der um eine Achse rotiert, hat einen Drehimpuls $\vec{L}$. Der Drehimpuls eines Systems ist erhalten. Wenn also Teile des Systems ihren Drehimpuls ändern, wird der Rest des Systems einen der Änderung entgegengesetzt wirkenden Drehimpuls erhalten.

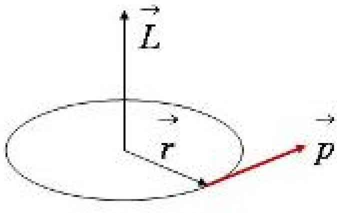

Abbildung 2: Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $\quad Quelle : univie.ac.at/phsikwiki/images/0/0a/SkizzenDrehimpuls.jpg$

0.4 Präzession und Nutation

Ein Kreisel, auf den keine äußeren Kräfte wirken, dreht sich nur dann ausschließlich um seine Figurenachse, wenn diese mit seinem Drehimpulsvektor übereinstimmt. Erhielt der Kreisel zu irgendeinem Zeitpunkt einen äußeren Impuls, sodass $\vec{L}$ und Figurenachse nicht mehr aufeinanderliegen, setzt die Nutation ein: Die Figurenachse des Kreisels rotiert um den Drehimpulsvektor auf dem Nutationskegel.
Wenn auf den Kreisel zusätzlich ein dauerhaftes Drehmoment $\vec{M}$ wirkt, stellt sich Präzession ein. Der Präzessionsvektor steht senkrecht auf Drehimpuls und äußerem Drehimpuls:

$$\omega_P = \vec{L} \times \vec{M}$$

Ein typischer Versuchsaufbau, an dem die Präzession gut gezeigt werden kann, ist das exzentrisch aufgehängte Rad, das durch die Gravitationskraft ein Drehmoment senkrecht zu Gravitations- und Drehimpulsvektor erfährt.

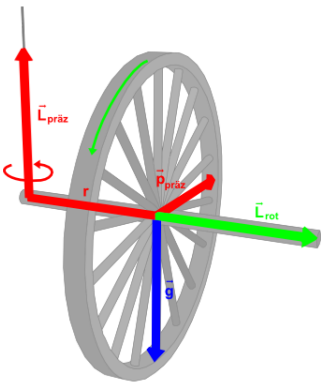

Abbildung 3: Präzedierendes Rad. *Quelle: lp.uni-goettingen.de/get/image/2200*

1 Drehimpulserhaltung

Mit dem Drehschemel, Gewichten und Fahrradkreisel können verblüffend einfach Experimente zur Drehimpulserhaltung gemacht werden. Wenn ein Experimentator mit Gewichten in den Händen auf dem Kreisel sitzt und sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω dreht und dann die Gewichte nach außen hält, wird seine Drehung verlangsamt, weil der Drehimpuls $L = \Theta \cdot \omega$ erhalten ist. Da das Trägheitsmoment Θ mit größerem Radius ebenfalls größer wird, muss die Winkelgeschwindigkeit ω geringer werden.
Auf dem Kreisel sind Drehungen nur um die z- Achse möglich. Wenn der Experimentator einen Fahrradkreisel hält, der in Drehung versetzt wurde, und diesen kippt, erhöht sich die z-Komponente dessen Drehimpulses. Damit der Gesamtdrehimpuls erhalten bleibt, muss der Experimentator einen Gegendrehimpuls wirken: Er beginnt sich in die andere Richtung zu drehen.

2 Freie Achsen

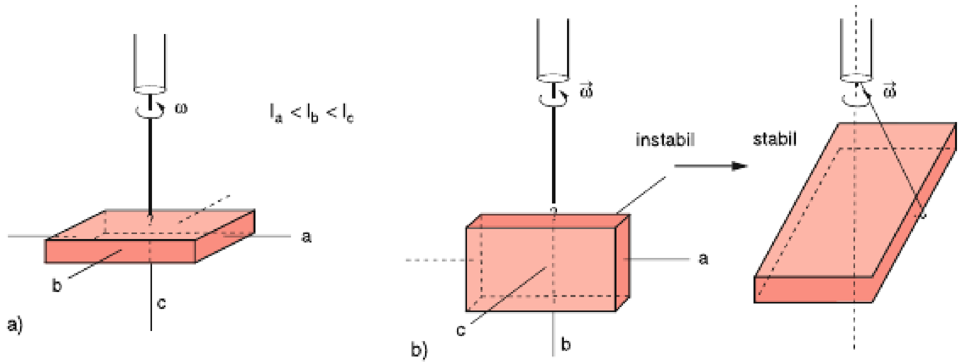

Abbildung 4: Rotation um stabile und instabile Achse. *Quelle: Vorbereitungshilfe, Seite 6*

Ein Quader mit 3 unterschiedlichen Rotationsachsen soll an einem Elektromotor aufgehängt werden und um ebendiese rotieren. Wie bereits in den Grundlagen erwähnt, sollte es zwei Achsen geben (die mit dem größten und dem niedrigsten Trägheitsmoment), um die der Quader stabil rotiert. Sie heißen freie Achsen. Um die dritte Achse wird der Quader nicht stabil rotieren, sondern zu schwingen beginnen und sich aufrichten, bis er um eine stabile Achse rotiert.

3 Kräftefreier Kreisel

Ein in eine kardanische Aufhängung eingebrachter Kreisel soll mit einem Elektromotor in Rotation versetzt werden. Der Kreisel wird sich dann zunächst stabil um seine Figurenachse drehen, da keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken. Dann sollen durch einen gezielten Stoß Figurenachse und Drehimpulsachse gestört werden. Der Kreisel beginnt, auf einem Nutationskegel um den Drehimpulsvektor zu kreisen.
Die Frequenzen der Rotation und der Nutation sollen mit Photodetektoren gemessen und gegeneinander aufgetragen werden. Außerdem können Zusatzgewichte an die äußeren Kardanrahmen angebracht werden, um das Trägheitsmoment des Kreisels auf bestimmten Achsen zu vergrößern.
Theoretisch sollte sich die Nutationsfrequenz ω_N eines kräftefreien, mit ω_r um die z-Achse rotierenden Kreisels nach der Formel aus der Vorbereitungshilfe folgendermaßen ergeben:

$$\omega_N = \frac{\Theta_z}{\Theta_x \cdot \Theta_y} \cdot \omega_r$$

Allerdings ist der vorhandene Kreisel kein idealer Kreisel, da die Kardanrahmen zusätzliche Trägheitsmomente für die x- und y-Achse liefern. Deshalb gilt:

$$\omega_N = \frac{\Theta_z}{\sqrt{\Theta_X \cdot \Theta_Y}} \cdot \omega_r$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \Theta_X &= \Theta_x^{Kreisel} + \Theta_x^{Innenrahmen} + \Theta_x^{Außenrahmen} \\ \Theta_Y &= \Theta_y^{Kreisel} + \Theta_y^{Innenrahmen} \end{aligned}$$

4 Dämpfung

Da der vorhandene Kreisel nicht ideal reibungsfrei gelagert werden kann, wird er gedämpft und irgendwann zum Stillstand kommen. Diese Dämpfung soll gemessen werden und in einem ω_r - t - Diagramm aufgetragen werden.

5 äußere Drehmomente

Im nächsten Schritt soll die Präzession des Kreisels in Abhängigkeit von der Drehfrequenz gemessen werden. Dazu können wieder die Photodetektoren verwendet werden. Damit Präzession auftritt, muss eine konstante

Kraft auf die Figurenachse einwirken. Dies kann beispielsweise erreicht werden, indem am inneren Kardanrahmen einseitig ein Gewicht befestigt wird. Dann wirkt die Erdanziehungskraft auf den Kreisel und er beginnt zu präzedieren.
Der theoretische Zusammenhang zwischen der Präzessionsfrequenz ω_P und der Rotationsfrequenz lautet:

$$\omega_P = \frac{M}{L} = \frac{\dot{L}}{L} = \frac{r \cdot m \cdot g}{\Theta_{gesamt} \cdot \omega_r}$$

mit r= Abstand Aufhängung - Schwerpunkt

Die Ergebnisse sollen wieder in einem Diagramm veranschaulicht werden.

6 Hauptträgheitsmomente

Anhand der zuvor gemessenen Daten können nun die Hauptträgheitsmomente $\Theta_z, \Theta_X und \Theta_Y$ berechnet werden. Mit der in Aufgabe 5 gemessenen Präzessionsfrequenz ω_P und der in der Vorbereitungshilfe gegebenen Formel

$$\Theta_z = \frac{M}{\omega_r \cdot \omega_P}$$

Kann das Trägheitsmoment um die Figurenachse berechnet werden.
Ist erst einmal Θ_z gefunden, können mit der bereits oben aufgeführten Formel

$$\omega_N = \frac{\Theta_z}{\sqrt{\Theta_X \cdot \Theta_Y}} \cdot \omega_r$$

die beiden anderen Trägheitsmomente berechnet werden.
Außerdem soll noch die Masse des Rotors abgeschätzt werden. Da das Trägheitsmoment in Rotationsrichtung gegeben ist, kann diese leicht mit der Formel für das Trägheitsmoment einer ausgedehnten Scheibe errechnet werden:

$$\begin{aligned} \Theta_z &= \frac{1}{2} M \cdot R^2 \\ &\Rightarrow \quad M = \frac{2\Theta_z}{R^2} \end{aligned}$$

7 Kreisel im beschleunigten Bezugssystem

Als praktisches Anwendungsbeispiel soll die Funktionsweise eines Kreiselkompasses demonstriert werden. Dieser sehr schnell rotierende Kreisel kann sich auf zwei Hauptträgheitsachsen frei bewegen, wird aber in der Horizontalen festgehalten. Durch die Erdrotation wirkt auf den Kreisel ein Drehmoment, das seine Figurenachse immer in Richtung Norden drängt.
Da der Kreisel mit dem vorhandenen Versuchsaufbau jedoch nicht schnell genug rotieren kann bzw. die Erdrotation zu langsam ist, um den Effekt einsetzen zu lassen, wird die Rotation mittels eines Drehtellers simuliert, auf dem der Kreisel befestigt wird. Zusätzlich wird der Drehteller schräg befestigt, um einen Breitengrad zu simulieren.