Auswertung: Kreisel

Christine Dörflinger und Frederik Mayer, Gruppe Do-9

24. Mai 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Die Drehimpulserhaltung

Hier wurden die bereits in der Vorbereitung beschriebenen Versuche durchgeführt. Die darin beschriebenen Erwartungen konnten alle bestätigt werden.

2 Freie Achsen

In diesem Versuch wurde eine Zigarrenkiste, die jeweils im Mittelpunkt ihrer Seitenflächen eine Öse hat, an einem Elektromotor aufgehängt. Dieser wurde jeweils auf eine konstante Drehzahl eingestellt, sodass keine äußeren Drehmomente existieren.

Wir beobachteten, dass die Rotation um zwei der drei Achsen stabil war, während die Rotation um eine Achse instabil war. Die 'stabilen' Achsen, die man auch freie Achsen nennt, waren die, bei denen die Zigarrenkiste das größte (Aufhängung an größter Fläche) und das kleinste Trägheitsmoment besitzt.

Wie in der Vorbereitung beschrieben haben Lösungen der Eulerschen Gleichungen für $\dot{\omega}_i = 0$ die Form

$$\ddot{\omega}_i + K\omega_i = 0 \tag{1}$$

mit einem trägheitsmomentabhängigen Faktor K, der sich durch

$$K = \prod_n \frac{\Theta_i - \Theta_n}{\Theta_n} \cdot \omega_i^2 \tag{2}$$

ergibt.

In (1) ist schnell zu erkennen, dass sich für $K < 0$ Lösungen der Form $e^{\lambda t}$ ergeben. Für $K > 0$ ergeben sich harmonische Schwungen der Form $e^{i\omega t}$. In diesem Fall ist die Rotation stabil.

3 Kräftefreier Kreisel

In diesem Versuch sollte die Nutationsfrequenz in Abhängigkeit von der Drehfrequenz des Kreisels bestimmt werden.

Um Nutation zu erzeugen, wurde der Kreisel auf ungefähr 30 Hz beschleunigt und dann mit der Hand angeschlagen. Die Drehzahl des Kreisels und die Nutationsfrequenz wurden mithilfe einer Lichtschranke und am Kreisel angebrachten Reflektoren bestimmt: Die Lichtschranke gab Spannungsimpulse auf, die von einem Frequenzzähler registriert wurden.

Wir nahmen folgende Messdaten auf:

f_K [Hz]	f_{Nut} [Hz]	f_K [Hz]	f_{Nut} [Hz]
31,57	16,31	14,24	7,2
30,27	15,62	12,95	6,67
28,57	14,76	9,31	4,88
27,27	14,66	8,52	4,12
26,26	13,62	7,7	3,57
25,23	13,11	6,72	3,46
24,18	12,49	33,01	17,33
23,01	11,64	28,39	14,65
22,15	11,32	24,97	13,15
20,92	10,68	22,38	11,51
19,71	10,21	20,64	10,65
18,61	9,74	15,35	7,98
17,19	8,47	10,66	5,34
16,01	8,22	8,07	4,16
15,21	7,84		

Tabelle 1: Nutationsfrequenzen in Abhängigkeit von der Kreiselfrequenz ohne Zusatzgewichte

f_K [Hz]	f_{Nut} [Hz]	f_K [Hz]	f_{Nut} [Hz]	f_K [Hz]	f_{Nut} [Hz]
30,77	9,26	15,65	4,71	23,59	7,02
28,97	8,71	14,89	4,42	22,73	6,79
27,77	8,32	9,40	4,26	22,03	6,62
26,41	7,87	8,22	3,65	21,41	6,42
25,29	7,48	33,32	10,37	20,18	6,02
24,41	7,31	32,32	9,56	19,44	5,84
23,62	6,89	31,42	9,42	18,67	5,59
22,46	7,02	30,60	9,07	18,01	5,42
21,57	6,38	29,64	8,99	17,35	5,13
20,42	6,16	28,55	8,53	16,54	4,73
18,76	5,64	27,43	8,37	15,66	4,65
17,85	5,48	26,56	7,94	14,85	4,44
17,16	5,27	25,85	7,73	13,72	4,09
16,32	4,87	25,14	7,41	13,02	3,80

Tabelle 2: Nutationsfrequenzen in Abhängigkeit von der Kreiselfrequenz mit Zusatzgewichten

Daraus plotteten wir mit Origin zwei Schaubilder und führten jeweils lineare Fits durch:

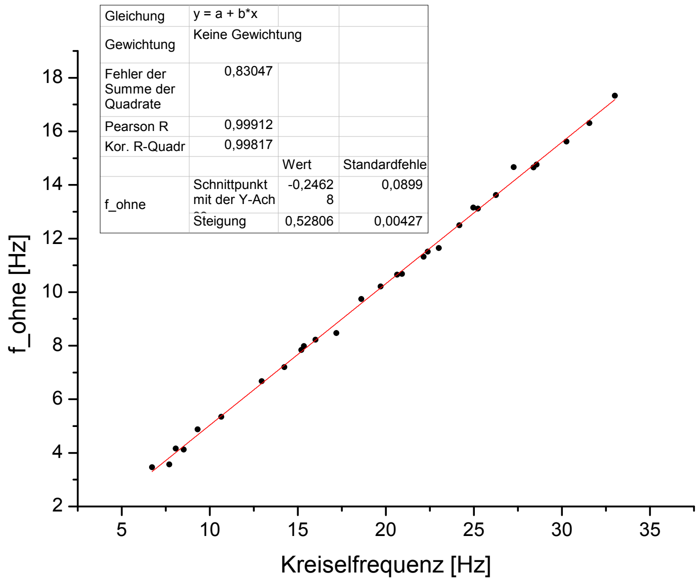

Abbildung 1: Nutationsfrequenz in Abhängigkeit von der Kreiselfrequenz, Messung ohne Zusatzgewichte

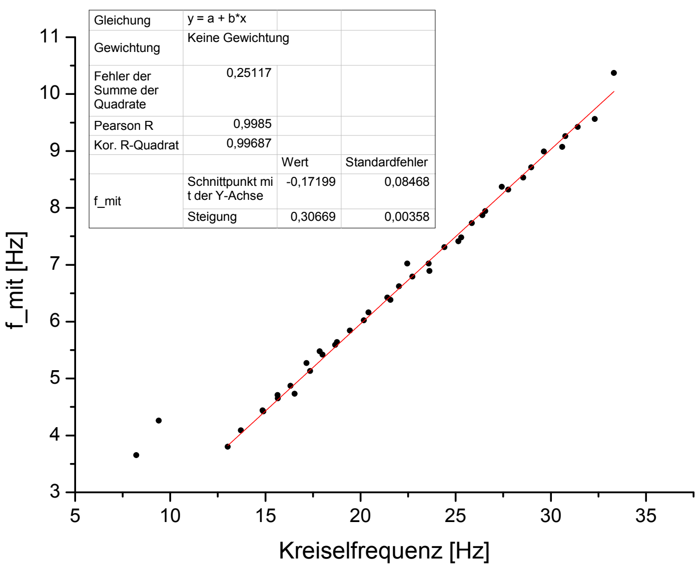

Abbildung 2: Nutationsfrequenz in Abhängigkeit von der Kreiselfrequenz, Messung mit Zusatzgewichten. Beim Fit wurden die ersten beiden Messwerte nicht beachtet.

Es ergibt sich also erwartungsgemäß ein linearer Zusammenhang zwischen Kreisel- und Nutationsfrequenz. Die in Aufgabe 6 benötigten Steigungen der linearen Anpassungen sind:

- $m_{N,mit} = (0.307 \pm 0.004)$
- $m_{N,ohne} = (0.528 \pm 0.004)$

4 Dämpfung des Kreisels

In diesem Versuch sollte die Dämpfung des Kreisels untersucht werden. Dazu wurde der Kreisel auf eine hohe Drehzahl beschleunigt (45 Hz) und dann alle 30 Sekunden seine Drehzahl abgelesen.

Bei der Versuchsdurchführung wurde die Drehzahl nicht so hoch gewählt wie in der Versuchsbeschreibung gefordert, da der Versuch ansonsten sehr lange gedauert hätte. Außerdem sind die Messdaten für folgende Versuche nicht relevant.

Es ergaben sich folgende Messwerte:

t in s	f in Hz	t in s	f in Hz	t in s	f in Hz
30	44,94	330	26,56	630	12,74
60	42,65	360	25,08	660	11,39
90	40,54	390	23,67	690	9,89
120	38,53	420	22,21	720	8,63
150	36,61	450	20,47	750	7,26
180	34,80	480	19,36	780	5,87
210	33,03	510	18,00	810	4,35
240	31,34	540	16,63	840	2,58
270	29,79	570	15,36		
300	28,11	600	14,07		

Tabelle 3: Messdaten: Drehzahl in Abhängigkeit von der Zeit

Wir trugen die Drehzahl über der Zeit auf und erhielten folgendes Schaubild:

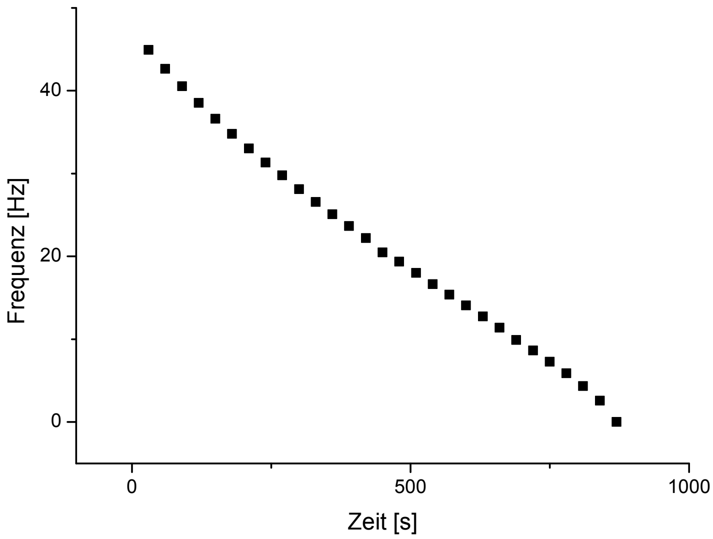

Abbildung 3: Drehzahl in Abhängigkeit von der Zeit

Im Schaubild sollte eigentlich ein exponentieller Abfall der Drehzahl mit der Zeit zu erkennen sein. Dieses Verhalten zeigt sich bei uns leider nur sehr undeutlich. Bei höheren Drehzahlen ist die Kurve zwar konkav; bei niedrigen Drehzahlen hat bei unserem Kreisel anscheinend aber die Dämpfung zugenommen, sodass sich die Kurve wieder nach unten biegt.

5 Kreisel unter Einfluss äußerer Drehmomente

In diesem Versuch sollte die Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit von der Drehzahl des Kreisels für unterschiedliche äußere Drehmomente untersucht werden. Die äußeren Drehmomente wurden durch einen an den Kreisel anschraubbaren Stab mit verschiebbarem Gewicht realisiert.

Um die Präzessionsfrequenz zu bestimmen, wurde die Dauer eines Umlaufs des Kreisels mit einer Stoppuhr gemessen. Da die Drehzahl während dieser Zeit natürlich abnimmt, wurde diese der Einfachheit halber nach einem halben Umlauf gemessen, um den daraus resultierenden Fehler grob auszugleichen.

Die Durchführung der Messung gestaltete sich als schwierig, da insbesondere bei großen Präzessionsfrequenzen nur sehr wenig Zeit vorhanden war, um die Messungen durchzuführen und zu protokollieren. Insbesondere die Messung der Drehzahl des Kreisels war problematisch, da hierfür der Photosensor bei jeder Messung richtig an den Kreisel gehalten werden musste. Die richtige Positionierung gelang jedoch nicht immer auf Anhieb.

Ein weiteres Problem war, dass die angeschraubte Metallstange nicht immer parallel zum Tisch stand, sondern immer langsam absackte und daher immer wieder neu positioniert werden musste. Steht die Stange nicht parallel zum Tisch, ist der Abstand der Gewichte zum Kreiselmittelpunkt und damit das resultierende äußere Drehmoment kleiner.

Es ergaben sich folgende Messwerte:

f_K [Hz]	T_P [s]	ω_P [Hz]	f_K [Hz]	T_P [s]	ω_P [Hz]
41,64	19,96	0,315	15,42	7,26	0,865
32,6	15,78	0,398	35,59	17	0,370
44,4	21,16	0,297	32,14	15,56	0,404
34,05	16,35	0,384	30,13	14,82	0,424
30,91	14,71	0,427	28,39	14,01	0,448
20,64	13,16	0,477	26,03	12,54	0,501
31,77	15,49	0,406	24,45	11,72	0,536
27,65	13,13	0,479	20,92	10,19	0,617
26,23	12,74	0,493	19,34	9,39	0,669
24,28	11,72	0,536	18,03	8,55	0,735
23,26	11,06	0,568	17,06	8,2	0,766
21,83	10,58	0,594	16,27	7,82	0,803
20,63	9,9	0,635	14,14	6,3	0,997
16,86	8,1	0,776	12,2	5,91	1,063

Tabelle 4: gemessene Kreiselfrequenzen und Periodendauern der Präzession mit Stange ohne Zusatzgewicht, berechnete Präzessionswinkelgeschwindigkeiten $\omega_P = \frac{2\cdot\pi}{T_P}$

f_K [Hz]	T_P [s]	ω_P [Hz]	f_K [Hz]	T_P [s]	ω_P [Hz]
36,46	9,89	0,635	19,89	5,38	1,168
33,88	9,3	0,676	19,21	5,19	1,211
32,64	9,02	0,697	18,46	4,92	1,277
31,51	8,84	0,711	17,68	4,82	1,304
30,44	8,41	0,747	16,96	4,7	1,337
29,44	8,22	0,764	16,31	4,5	1,396
28,04	7,64	0,822	15,6	4,27	1,471
27,11	7,55	0,832	15	4,11	1,529
26,38	7,17	0,876	13,47	3,73	1,685
25,56	7,04	0,892	12,76	3,52	1,785
23,62	6,52	0,964	12,11	3,34	1,881
22,97	6,34	0,991	11,47	3,3	1,904
22,34	6,16	1,020	9,91	2,94	2,137
21,35	6,01	1,045	8,69	2,4	2,618

Tabelle 5: gemessene Kreiselfrequenzen und Periodendauern der Präzession mit Stange und Zusatzgewicht im Abstand d=4.2cm, berechnete Präzessionswinkelgeschwindigkeiten $\omega_P = \frac{2\cdot\pi}{T_P}$

f_K [Hz]	T_P [s]	ω_P [Hz]	f_K [Hz]	T_P [s]	ω_P [Hz]	f_K [Hz]	T_P [s]	ω_P [Hz]
36,14	8,52	0,737	22,67	5,31	1,183	11,7	2,9	2,167
35,03	8,3	0,757	21,9	5,23	1,201	16,93	4,12	1,525
33,4	7,86	0,799	20,54	5,02	1,252	15,86	3,69	1,703
31,68	7,41	0,848	13,95	4,72	1,331	15,1	3,59	1,750
30,63	7,29	0,862	19,33	4,62	1,360	14,88	3,46	1,816
29,67	7,07	0,889	18,77	4,45	1,412	12,47	2,84	2,212
28,65	6,58	0,955	18,14	4,44	1,415	11,3	2,59	2,426
27,69	6,46	0,973	17,63	4,18	1,503	10,33	2,46	2,554
25,71	5,96	1,054	15,81	3,75	1,676	9,76	2,38	2,640
24,88	5,76	1,091	14,66	3,41	1,843	9,14	2,32	2,708
24,13	5,58	1,126	13,46	3,26	1,927	8,2	2,01	3,126
23,41	5,51	1,140	12,18	3,08	2,040			

Tabelle 6: gemessene Kreiselfrequenzen und Periodendauern der Präzession mit Stange und Zusatzgewicht im Abstand d=11.3cm, berechnete Präzessionswinkelgeschwindigkeiten $\omega_P = \frac{2\cdot\pi}{T_P}$

Um die erwartete $f_K \propto \frac{1}{\omega_P}$-Abhängigkeit zu überprüfen, trugen wir jeweils die Präzessionsfrequenz f_P über Periodendauer des Kreisels T_K auf und führten einen linearen Fit durch:

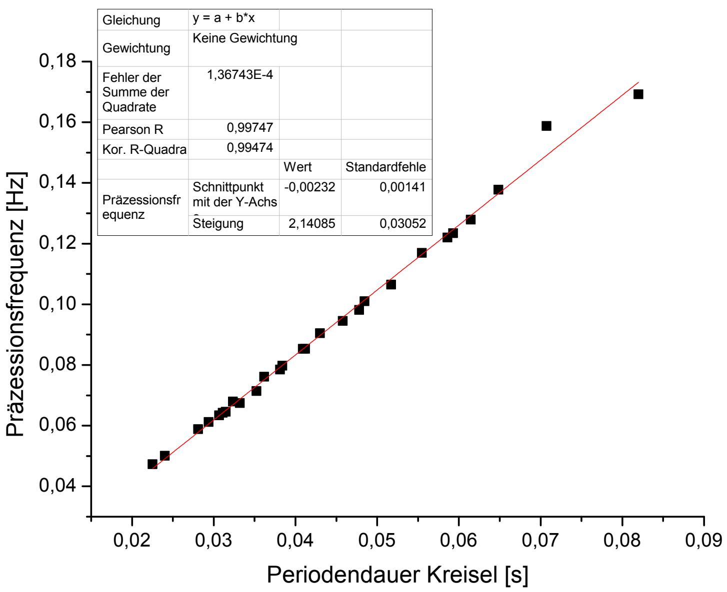

Abbildung 4: f_P über T_K, linearer Fit. Messung nur mit Stange ohne Zusatzgewicht.

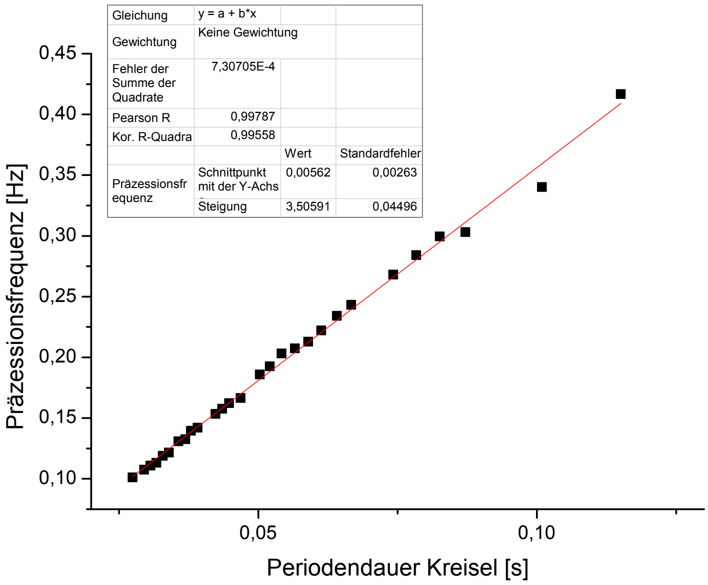

Abbildung 5: f_P über T_K, linearer Fit. Messung mit Stange und Zusatzgewicht im Abstand d = 4.2 cm.

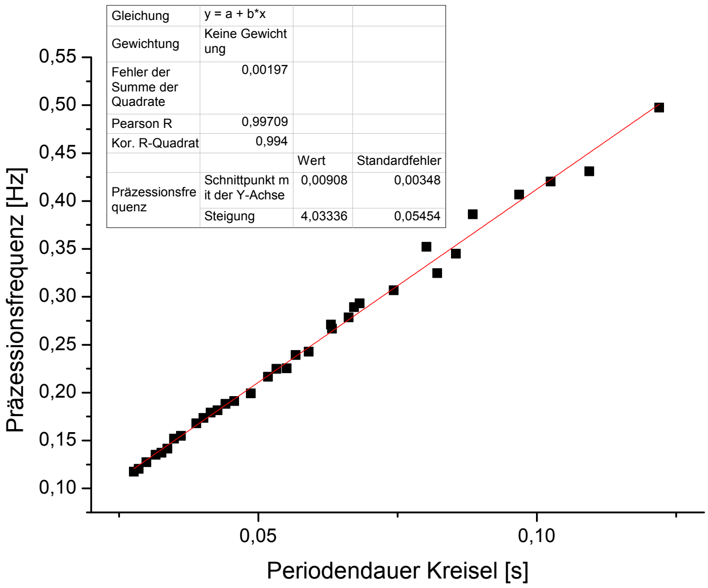

Abbildung 6: f_P über T_K, linearer Fit. Messung mit Stange und Zusatzgewicht im Abstand d = 11.3 cm.

Aus den Schaubildern lassen sich folgende Steigungen ablesen:

- $m_{P,1} = (2.14 \pm 0.03)\frac{1}{s^2}$
- $m_{P,2} = (3.51 \pm 0.04)\frac{1}{s^2}$
- $m_{P,3} = (4.03 \pm 0.05)\frac{1}{s^2}$

6 Die Hauptträgheitsmomente

In dieser Aufgabe sollen die Hauptträgheitsmomente des Kreisels mithilfe der Ergebnisse aus den vorherigen Aufgaben berechnet werden. Dazu werden die in Aufgabe 3 und 5 bestimmten Steigungen verwendet:

- $m_{N,mit} = (0.307 \pm 0.004)$ - Nutationsmessung mit Zusatzgewichten
- $m_{N,ohne} = (0.528 \pm 0.004)$ - Nutationsmessung ohne Zusatzgewichte
- $m_{P,1} = (2.14 \pm 0.03)\frac{1}{s^2}$ - Präzessionsmessung mit Stange ohne Gewicht
- $m_{P,2} = (3.51 \pm 0.04)\frac{1}{s^2}$ - Präzessionsmessung mit Stange und Gewicht im Abstand d=4.2cm
- $m_{P,3} = (4.03 \pm 0.05)\frac{1}{s^2}$ - Präzessionsmessung mit Stange und Gewicht im Abstand d=11.3cm

Außerdem werden folgende Werte verwendet:

- $m_{Zyl} = (1000 \pm 1)g$ - Masse der anschraubbaren Zylinder
- $r_{aG} = (14.9 \pm 0.1)cm$ - Abstand Kreiselschwerpunkt - aufgeschraubtes Gewicht
- $d_{Gew} = (4.00 \pm 0.01)cm$ - Masse des anschraubbaren Stabs
- $d_{Rotor} = (13.50 \pm 0.01)cm$ - Durchmesser des Rotors
- $m_{Gew} = (375 \pm 1)g$ - Masse des verschiebbaren Gewichts
- $r_{iR} = (10.91 \pm 0.03)cm$ - Strecke Kreiselschwerpunkt $\leftrightarrow$ Rand des inneren Kardanrahmens
- $r_{Schwpkt} = (17.4 \pm 0.5)cm$ - Lage des Schwerpunkts vom inneren Stabende
- $r_{M1} = (4.2 \pm 0,2)cm$ - 1. Abstand des verschiebbaren Gewichts vom Rahmen
- $r_{M2} = (11.3 \pm 0.02)cm$ 2. Abstand des verschiebbaren Gewichts vom Rahmen

6.1 Hauptträgheitsmoment Θ_x

Zunächst sollte nun das Trägheitsmoment Θ_x berechnet werden. Dazu kann die Beziehung für die Nutationsfrequenz

$$f_N = \frac{\Theta_z}{\sqrt{\Theta_x \Theta_y}} f \tag{3}$$

und die Ergebnisse aus Aufgabe 3 verwendet werden. Unsere Messungen für die Nutationsfrequenz wurden einmal mit und einmal ohne Zusatzgewichte durchgeführt. Bei der Messung mit Gewichten muss das Trägheitsmoment Θ_x korrigiert werden:

$$f_N = \frac{\Theta_z}{\sqrt{(\Theta_x + \Theta_{Gew})\Theta_y}} f \tag{4}$$

Zunächst muss also das **Trägheitsmoment der Gewichte** Θ_{Gew} bestimmt werden. Dieses erhält man über das Trägheitsmoment eines Zylinders bei Rotation um die Symmetrieachse $\Theta = \frac{1}{2}MR^2$ und dem Steinerschen Satz:

$$\Theta_{Gew} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m_{Zyl} \cdot (\frac{d_{Gew}}{2})^2 + m_{Zyl} \cdot (r_{aG} + \frac{d_{Gew}}{2})^2 \right) = 2m_{Zyl} \cdot (r_{aG}^2 + r_{aG}d_{Gew} + \frac{3}{8}d_{Gew}^2) \tag{5}$$

Damit ließ sich Θ_{Gew} berechnen: $\Theta_{Gew} = 0.0575kgm^2$

Für Θ_{Gew} soll nun noch der systematische Fehler berechnet werden. Dieser ergibt sich mit dem arithmetischen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta\Theta_{Gew} = |\frac{\partial \Theta_{Gew}}{\partial m_{Zyl}}| \cdot \Delta m_{Zyl} + |\frac{\partial \Theta_{Gew}}{\partial d_{Gew}}| \cdot \Delta d_{Gew} + |\frac{\partial \Theta_{Gew}}{\partial r_{aR}}| \cdot \Delta r_{aR} \tag{6}$$

$$\Delta\Theta_{Gew} = 2\cdot(r_{aG}^2 + r_{aG}\cdot d + \frac{3}{8}d^2)\cdot\Delta m_{Zyl} + (2m_{Zyl}r_{aG} + \frac{3}{2}m_{Zyl}d)\cdot\Delta d + 2m_{Zyl}(2r_{aG}+d)\cdot\Delta r_{aG} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \Delta\Theta_{Gew} = 0.0008kgm^2 \quad (8)$$

Insgesamt ergibt sich also $\boxed{\Delta\Theta_{Gew} = (0.0575 \pm 0.0008)kgm^2}$.

Nun soll das **Trägheitsmoment** Θ_x berechnet werden. Dazu betrachtet man den Koeffizienten

$$\frac{m_{N,ohne}}{m_{N,mit}} = \frac{\sqrt{\Theta_x + \Theta_{Gew}}}{\sqrt{\Theta_x}} \Leftrightarrow \Theta_x = \frac{\Theta_{Gew}}{\frac{m_{N,ohne}^2}{m_{N,mit}^2} - 1} \quad (9)$$

Der zugehörige Systematische Fehler ergibt sich durch:

$$\Delta\Theta_x = \left|\frac{\partial\Theta_x}{\partial\Theta_{Gew}}\right|\cdot\Delta\Theta_{Gew} = \frac{\Delta\Theta_{Gew}}{\frac{m_{N,ohne}^2}{m_{N,mit}^2} - 1} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \Delta\Theta_x = 0.0004 \quad (11)$$

und der Statistische Fehler über:

$$\sigma_{\Theta_x} = \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_x}{\partial m_{N,ohne}}\right)^2\cdot\sigma_{m_{N,ohne}}^2 + \left(\frac{\partial\Theta_x}{\partial m_{N,mit}}\right)^2\sigma_{m_{N,mit}}^2} \quad (12)$$

$$\sigma_{\Theta_x} = \sqrt{\left(\frac{\Theta_{Gew}\sigma_{m_{N,ohne}}}{m_{N,mit}^2\cdot(\frac{m_{N,ohne}^2}{m_{N,mit}^2} - 1)^2}\right)^2 + \left(\frac{\Theta_{Gew}\cdot\sigma_{m_{N,mit}}\cdot\frac{2m_{N,ohne}^2}{m_{N,mit}^3}}{\frac{m_{N,ohne^2}}{m_{N,mit}^2} - 1}\right)^2} \quad (13)$$

$$\Rightarrow \sigma_{\Theta_x} = 0.0007 \quad (14)$$

Damit ergibt sich $\boxed{\Theta_x = (0.0294 \pm 0.0004 \pm 0.0007)kgm^2}$.

6.2 Hauptträgheitsmoment Θ_z

Anschließend soll das Trägheitsmoment Θ_z berechnet werden. Hierfür werden die Präzessionsmessungen aus Aufgabe 5 verwendet.

Aus der Vorbereitung ist die Formel

$$\omega_P = \frac{mgr}{\Theta_z\cdot\omega} \quad (15)$$

bekannt. Setzt man für die ω die zugehörigen Frequenzen $f = \frac{\omega}{2\pi}$ und die Steigungen m_P ein, erhält man

$$f_P = \frac{mgr}{4\pi^2\theta_z f_K} \Leftrightarrow \Theta_z = \frac{mgr}{4\pi^2 m_P} \quad (16)$$

wobei m_P die in Aufgabe 5 bestimmten Steigungen bezeichnet.

6.2.1 Messung nur mit Stab

Bei der Messung mit Stab, ohne Zusatzgewichte, ergibt sich für Θ_z:

$$\Theta_{z,Stab} = \frac{(r_{iR} + r_{Schwpkt.}) \cdot m_{Stab} \cdot g}{4\pi^2 \cdot m_{P,1}} = 0.0108kgm^2 \tag{17}$$

Der Systematische Fehler ergibt sich über

$$\Delta\Theta_{z,Stab} = |\frac{\partial\Theta_{z,Stab}}{\partial m_{Stab}}|\Delta m_{Stab} + |\frac{\partial\Delta_{z,Stab}}{\Delta r_{Schwpkt}}|\Delta r_{Schwpkt} + |\frac{\partial\Theta_{z,Stab}}{\partial r_{iR}}|\Delta r_{iR} \tag{18}$$

Es ergibt sich:

$$\Delta\Theta_{z,Stab} = 0.0002kgm^2 \tag{19}$$

Für den Statistischen Fehler ergibt sich

$$\sigma_{\Theta_{z,Stab}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_{z,Stab}}{\partial m_{P,1}}\right)^2 \sigma^2_{m_{P,1}}} = 0.0002kgm^2 \tag{20}$$

Insgesamt ergibt sich also $\boxed{\Theta_{z,Stab} = (0.0108 \pm 0.0002 \pm 0.0002)kgm^2}$

6.2.2 Messung mit Stab und Gewicht

Bei Messungen mit Stab und Gewicht muss zusätzlich noch das aus dem Gewicht resultierende Drehmoment berücksichtigt werden:

$$\Theta_{z,M} = \frac{(r_{iR} + r_{Schwpkt.}) \cdot m_{Stab} \cdot g + (r_{iR} + r_M) \cdot m_{Gew} \cdot g}{4\pi^2 \cdot m_P} \tag{21}$$

Der zugehörige statistische Fehler ergibt sich mit

$$\Delta\Theta_{z,M} = |\frac{\partial\Theta_{z,M}}{\partial m_{Stab}}| \cdot \Delta m_{Stab} + |\frac{\partial\Theta_{z,M}}{\partial r_{Schwpkt}}| \cdot \Delta r_{Schwpkt} + |\frac{\partial\Theta_{z,M}}{\partial r_{iR}}| \cdot \Delta r_{iR} + |\frac{\partial\Theta_{z,M}}{\partial r_M}| \cdot \Delta r_M + |\frac{\partial\Theta_{z,M}}{\partial m_{Gew}}| \cdot \Delta m_{Gew}$$

$$= \frac{g}{m_P \cdot 4\pi^2}\left((r_{iR} + r_{Schwpkt})\Delta m_{Stab} + m_{Stab}(\Delta r_{Schwpkt} + \Delta r_{iR}) + m_{Gew}(\Delta r_M + \Delta r_{iR}) + (r_{iR} + r_M)\Delta m_{Gew}\right) \tag{22}$$

und der systematische Fehler durch

$$\sigma_{\Theta_{z,M}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_{z,M}}{\partial m_P}\right)\sigma^2_{m_p}} = \frac{g \cdot \sigma_{m_P}}{4\pi^2 m_P}\left((r_{iR} + r_{Schwpkt}) + (r_{iR} + r_M) \cdot m_{Gew}\right) \tag{23}$$

1. Gewicht im Abstand $r_M = 4.2cm$
   - $\Theta_{z,M1} = 0.0106kgm^2$
   - $\Delta\Theta_{z,M1} = 0.0002kgm^2$
   - $\sigma_{\Theta_{z,M1}} = 0.0001kgm^2$

   $\Rightarrow \boxed{\Theta_{z,M1} = (0.0106 \pm 0.0002 \pm 0.0001)kgm^2}$
2. Gewicht im Abstand $r_M = 11.3cm$
   - $\Theta_{z,M2} = 0.0109kgm^2$
   - $\Delta\Theta_{z,M2} = 0.0002kgm^2$
   - $\sigma_{\Theta_{z,M2}} = 0.0001kgm^2$

   $\Rightarrow \boxed{\Theta_{z,M2} = (0.0109 \pm 0.0002 \pm 0.0001)kgm^2}$

6.2.3 Mitteln der Messwerte

Mittelt man die in den drei Messungen (nur mit Stab und mit Stab und Gewichten in 2 unterschiedlichen Abständen) bestimmten Hauptträgheitsmomente Θ_{zi}, so erhält man $\boxed{\Theta_z = 0.0108 \pm 0.0002 \pm 0.0001)kgm^2}$.

6.3 Berechnung von Θ_y

Mithilfe der oben bereits verwendeten Formel

$$f_N = \frac{\Theta_z}{\sqrt{\Theta_x \Theta_y}} f \tag{24}$$

lässt sich nach Einsetzen der Steigung m_N und Umformung Θ_y folgendermaßen berechnen:

$$\Theta_y = \frac{\Theta_z^2}{m_{N,ohne}^2 \cdot \Theta_x} = 0.0142 kgm^2 \tag{25}$$

Der Systematische Fehler $\Delta\Theta_y$ ergibt sich mit

$$\Delta\Theta_y = |\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_x}|\Delta\Theta_x + |\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_z}|\Delta\Theta_z = \frac{\Theta_z}{(m_{N,ohne}\Theta_x)^2}\left(\frac{\Theta_z \cdot \Delta\Theta_x}{\Theta_x} + 2\Delta\Theta_z\right) = 0.0001 kgm^2 \tag{26}$$

und der Statistische Fehler mit

$$\sigma\Theta_y = \sqrt{\left((\frac{\partial\Theta_y}{\partial m_{N,ohne}})^2(\sigma m_{N,ohne})^2\right) + \left((\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_x})^2(\sigma\Theta_x)^2\right) + \left((\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_z})^2(\sigma\Theta_z)^2\right)} = 0.0023 kgm^2 \tag{27}$$

$\Rightarrow \boxed{\Theta_y = (0.0142 \pm 0.0001 \pm 0.0023)kgm^2}$

6.4 Abschätzung der Masse des Rotors

Die Masse des Rotors lässt sich mithilfe der Formel für das Trägheitsmoment eines Zylinders um seine Symmetrieachse $\Theta_Z = \frac{mr^2}{2}$ und dem schon bestimmten Trägheitsmoment abschätzen:

$$m_{Rotor} = \frac{2 \cdot \theta_z}{r^2} = \frac{8\Theta_z}{d_{Rotor}^2} = 4.74 kg \tag{28}$$

Der Systematische Fehler ergibt sich mit

$$\Delta m_{Rotor} = |\frac{\partial m_{Rotor}}{\partial d_{Rotor}}|\Delta d_{Rotor} + |\frac{\partial m_{Rotor}}{\partial\Theta_z}|\Delta\Theta_z = 0.09 kg \tag{29}$$

und der statistische Fehler mit:

$$\sigma m_{Rotor} = \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial\Theta_z}\right)^2 \cdot (\sigma\Theta_z)^2} = 0.04 kg \tag{30}$$

Der Rotor hat also eine Masse von ungefähr $\boxed{m_{Rotor} = (4.74 \pm 0.09 \pm 0.04)kg}$.

6.5 Fazit

In dieser Aufgabe konnten die Hauptträgheitsmomente des Kreisels berechnet werden. Sie sind:

- $\Theta_x = (0.0294 \pm 0.0004 \pm 0.0007)kgm^2$
- $\Theta_y = (0.0142 \pm 0.0001 \pm 0.0023)kgm^2$
- $\Theta_z = (0.0108 \pm 0.0002 \pm 0.0001)kgm^2$

Systematische und statistische Fehler sind, mit Ausnahme von Θ_y, relativ klein (weniger als 5%). Allerdings fällt auf, dass Θ_x und Θ_y nicht überein stimmen, was eigentlich zu erwarten gewesen wäre. Da die Abweichung so groß ist, ist ein systematischer Fehler zu erwarten. Möglicherweise haben wir bei der Messung von Abständen Fehler begangen.

Die über das Trägheitsmoment eines Zylinders abgeschätzte Rotormasse von $m_{Rotor} = (4.74 \pm 0.09 \pm 0.04)kg$ erscheint hingegen realistisch zu sein. Auch hier sind systematischer und statistischer Fehler relativ klein (zusammen ungefähr $\pm 2.7\%$).

7 Kreisel im beschleunigten Bezugssystem / Kreiselkompass

In diesem Versuchsteil sollte die Funktionsweise eines Kreiselkompass demonstriert werden. Dazu wurde ein drehender Kreisel (genauer Aufbau siehe Vorbereitung) auf einem Drehteller (Analogon zur Erdrotation) beschleunigt. Wie erwartet richtete sich der Kreisel nach 'Norden' aus.