Vorbereitung: Kreisel

Christine Dörflinger und Frederik Mayer, Gruppe Do-9

10. Mai 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Drehimpulserhaltung

Bei diesem Teilversuch soll experimentell die Drehimpulserhaltung gezeigt werden. Zur Verfügung stehen hierfür ein Drehschemel und ein Fahrradkreisel.
Für ein sich selbst überlassenes System (keine Drehmomente) gilt:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{L} = const. \tag{1}$$

Der Drehimpuls steht senkrecht zur Drehrichtung $\vec{r}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{2}$$

Die Richtung des Drehimpulses lässt sich mit der Rechtenhandregel bestimmen: Finger in Drehrichtung $\vec{r}$, dann zeigt der Daumen in Drehimpulsrichtung. Im Versuch hat der Drehschemel allerdings nur eine vertikale Achse, in die er sich drehen kann (nur z-Komponente wichtig), $L_z = const.$

Durchführung:
Man setzt sich auf den Drehschemel und nimmt Fahrradkreisel in die Hände. Je nach Ausrichtung (horizontal,vertikal), Kippen des sich bereits drehenden Kreisels oder Andrehen des Kreisels, ändert sich die Bewegung des Drehschemels.
Dabei ist zu untersuchen, ob für folgende Vorgehensweisen die Erwartungen stimmen:

(i) Rad horizontal, Andrehen erfolgt auf dem Schemel: Der Drehschemel sollte sich in die andere Richtung wie das Rad drehen (Drehimpuls für das System Schemel und Rad soll gleich bleiben).

(ii) Rad wird der Person auf dem Kreisel bereits drehend in die Hand gegeben: Der Drehschemel sollte sich nicht bewegen.

(iii) Wie (ii) nur wird nun die Drehachse des Kreisels geändert: Der Drehschemel sollte sich ändern, sodass der Drehimpuls erhalten bleibt. Die Richtung in der sich der Schemel (im Vergleich zur Drehrichtung des Rades), sollte sich folgendermaßen ändern:

   (a) Ursprünglich Drehachse vertikal ausgerichtet: Kippen verringert $L_{z_{Rad}}$, daher sollte sich der Drehschemel in die gleiche Richtung wie das Rad drehen.

   (b) Ursprünglich Drehachse horizontal ausgerichtet ($L_{z_{Rad}} = 0$): Kippen 'erhöht' die z-Komponente des Drehimpulses des Kreisels, zum Ausgleich bewegt sich der Drehschemel in die entgegengesetzte Richtung.

2 Freie Achsen

Zum Aufbau:
eine Zigarrenkiste, ist so mit Ösen versehen, dass sie am Mittelpunkt ihrer Seitenflächen an der Achse eines Elektromotors aufgehängt werden kann (lässt sich in Rotation versetzen).

Erwartungen:
Es gelten die Eulerschen Gleichungen, mit Trägheitsmoment Θ_i um Achse i:

$$M_1 = \Theta_1\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\omega_2\omega_3 \tag{3}$$

$$M_2 = \Theta_2\dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_1\omega_3 \tag{4}$$

$$M_3 = \Theta_3\dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)\omega_2\omega_1 \tag{5}$$

Im Versuch wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit gedreht, sodass keine Drehmomente existieren. Aus $\omega_i = const.$ ergibt sich $\dot{\omega}_i = 0$ und damit für die anderen Winkelgeschwindigkeiten ω_j Differentialgleichungen der Form:

$$\ddot{\omega}_j + \ddot{\omega}_j K = 0 \tag{6}$$

mit dem anderen Trägheitsmoment Θ_k und n ist k oder j:

$$K = \frac{\Theta_i - \Theta_k}{\Theta_k} \cdot \frac{\Theta_i - \Theta_j}{\Theta_j}\omega_i^2 = \prod_n \frac{\Theta_i - \Theta_n}{\Theta_n} \cdot \omega_i^2 \tag{7}$$

Aus dieser Differentialgleichung lassen sich folgende Dinge erwarten:

(i) $K > 0$: Harmonische Bewegung um die Gleichgewichtslage, stabil.

(ii) $K < 0$: instabile Rotation

3 Kräftefreier Kreisel

Hier soll die Nutationsfrequenz eines Kardankreisels in Abhängigkeit von der Drehfrequenz gemessen werden (mit und ohne Zusatzgewichte).

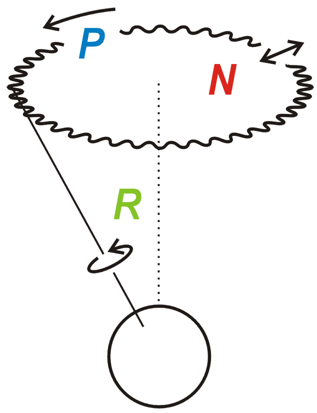

Abbildung 1: Skizze zur Nutation N (R: Rotation, P: Präzession)

Um im Versuch eine Nutation auszulösen, verpassen wir der Apparatur einen kurzen Stoß. Die Nutation wird sich recht schnell wieder legen, weswegen die Stöße wiederholt werden.
Der Kreisel wird auf etwa 1000 Umdrehungen pro Minute, was einer Frequenz von etwa 17Hz entspricht beschleunigt. Die Messungen enden, wenn die Frequenz auf etwa 0,5Hz gesunken ist. So werden etwa 35 Messungen durchgeführt (ohne Gewichte).
Durch Anbringen der Zusatzgewichte vergrößert sich das Trägheitsmoment, somit ist zu erwarten, dass sich hier die Abhängigkeit von Rotations- und Nutationsfrequenz verändert.

Zum Kardankreisel:
Der Kardankreisel besteht aus zwei runden Rahmen (der innere ist drehbar am Äußeren befestigt; der Äußere ist ebenfalls drehbar in einer Halterung) und einer Kreisscheibe (drehbar am inneren Rahmen befestigt), sodass sich die Scheibe quasi in allen Positionen drehen lässt.

Zur Frequenzmessung:
Zur Messung der Roationsfrequenz ist ein Reflektorstreifen auf der Kreisscheibe angebracht. Der Kreisel wird so positioniert, dass sich das Laser/Fototransistorelement fast senkrecht über der Rotationsfläche befindet. Es wird gemessen, wann der Reflektorstreifen 'vorbeidreht'.
Die Nutationsfrequenzmessung erfolgt über eine ähnliche Messvorrichtung.

Zur Abhängigkeit vom Trägheitmoment (aus der Vorbereitungshilfe):

$$\omega_N = \frac{\Theta_z}{\Theta_{x,y}} \cdot \omega \tag{8}$$

Mit Trägheitsmoment $\Theta_{x,y}$ sei hier das Trägheitsmoment 'um die anderen Hauptachsen' gemeint.
Allerdings beeinflusst der Rahmen des kardanisch aufgehängten Kreisels ebenfalls die Nutationsbewegung (ebenfalls der Vorbereitungshilfe entnommen):

$$\omega_N = \frac{\Theta_z}{\sqrt{\Theta_{x_{korr}} \cdot \Theta_{y_{korr}}}} \tag{9}$$

$$\Theta_{x_{korr}} = \Theta^{Kreisel} + \Theta^{Innenkardan} + \Theta^{Außenkardan} \tag{10}$$

$$\Theta_{y_{korr}} = \Theta^{Kreisel} + \Theta^{Innenkardan} \tag{11}$$

4 Dämpfung des Kreisels

In diesem Verusch soll die Dämpfung des Kreisels bestimmt werden. Dazu wird der Kreisel mithilfe eines Elektromotors beschleunigt, und mithilfe des bereits in Aufgabe 3 verwendeten Verfahrens (Photodiode registriert weißen Streifen auf schwarzem Kreisel → Spannungsimpuls, der von Frequenzzähler registriert wird) die Winkelgeschwindigkeit bestimmt.

Im aus den Messdaten erstellten $\omega(t) - t-$Diagramm sollte ein exponentieller Abfall der Winkelgeschwindigkeit mit der Zeit zu erkennen sein.

5 Kreisel mit äußerem Drehmoment

Nun soll beim Nutationsfreien, symmetrischen Kreisel die Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit um die Figurenachse gemessen werden.

Präzession (Drehung der Figuren- und Drehimpulsachse mit der Zeit) tritt dann auf, wenn das äußere Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ auf einen Kreisel und der Drehimpuls des Kreisels um seine Figurenachse $\vec{L} = \theta\vec{\omega}$ senkrecht aufeinander stehen. Im Versuch wird dies realisiert, indem ein Metallstab als Gewicht an den Kardanrahmen des Kreisels befestigt wird.

Die Präzessionsfrequenz lässt sich mit

$$\omega_p = \frac{dL}{dt} \cdot \frac{1}{|L|} = \frac{M}{L} = \frac{mgr}{\theta\omega} \tag{12}$$

berechnen, wobei r den Abstand des angeschraubten Metallstabes vom Schwerpunkt des Kreisels bezeichnet.

Die Präzessionsfrequenz soll nun in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω des Kreisels in einem Diagramm aufgetragen werden. Dabei sollte sich für ω_p ein Zusammenhang proportional zu $\frac{1}{\omega}$ ergeben.

6 Die Hauptträgheitsmomente

Nun sollen aus den gemessenen Präzessions- und Nutationsfrequenzen die Hauptträgheitsmomente des Kreisels unter Berücksichtigung der zusätzlichen Trägheitsmomente durch den Kardanrahmen berechnet werden.

Aus den Messdaten aus Aufgabe 5 lässt sich das Trägheitsmoment des Kreisels bei Drehung um die Figurenachse θ_z berechnen. Es gilt:

$$\omega_p = \frac{mgr}{\theta_z\omega} \Leftrightarrow \theta_z = \frac{mgr}{\omega_p \cdot \omega} \tag{13}$$

Anschließend lassen sich aus der Nutationsfrequenz aus Aufgabe 3 die Trägheitsmomente bei Drehung um die beiden anderen Hauptachsen ($\theta_x = \theta_y$) berechnen:

$$\omega_N = \frac{\theta_z}{\theta_{x,y}} \cdot \omega \Leftrightarrow \theta_{x,y} = \theta_z \cdot \frac{\omega}{\omega_N} \tag{14}$$

Die Hauptträgheitsmomente des Kreisels setzen sich dann wie folgt zusammen (aus Vorbereitungshilfe):

$$\theta_x = \theta_x^{Rotor} + \theta_x^{Innenkardan} + \theta_x^{Außenkardan} \tag{15}$$

$$\theta_y = \theta_y^{Rotor} + \theta_y^{Innenkardan} \tag{16}$$

Da der verwendete Rotor ein Vollzylinder ist, lässt sich seine Masse mithilfe von

$$\theta_z = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \Leftrightarrow m = \frac{2 \cdot \theta_z}{r^2} \tag{17}$$

abschätzen.

7 Kreisel im beschleunigten Bezugssystem

In diesem Versuch wird ein Kreisel kippbarer Standfläche, dessen innerer Kardanrahmen sich in der Horizontalebene fixieren lässt, auf einen Drehteller gestellt. Dieser Versuchsaufbau ähnelt dem sogenannten Kreiselkompass.

Auf dem Drehteller erfährt der gekippte Kreiselkompass ein Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{L} \times \vec{\omega} \tag{18}$$

Beim Kreiselkompass führt dies dazu, dass sich der Kreisel nach Norden ausrichtet.

In der Formel ist auch ersichtlich, weshalb der Kreisel dazu gekippt sein muss: Stehen $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ parallel zueinander, erfährt der Kreisel kein Drehmoment ($\vec{M} = \vec{0}$) und richtet sich nicht aus.

8 Quellen

`http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cd/Praezession.png`