Vorbereitung

Kreisel

Carsten Röttele Stefan Schierle

Versuchsdatum: 26.06.2012

Inhaltsverzeichnis

1 Drehimpulserhaltung

Zu Beginn des Versuches soll zunächst die Drehimpulserhaltung mithilfe eines Drehschemels und eines Fahrradkreisels untersucht werden. Hierzu ist es hilfreich zunächst die Definition des Drehimpulses zu betrachten:

$$\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega}$$

Θ ist hier das Trägheitsmoment und $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit in Richtung der momentanen Drehachse. Falls nun der Drehimpuls erhalten sein soll, so dürfen keine äußeren Drehmomente wirken und es gilt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{konst}$$

Wenn man nun den Drehschemel betrachtet, so stellt man fest, dass dieser nur eine Drehachse in z-Richtung besitzt, weshalb man auch nur diese bei der Drehimpulserhaltung betrachten muss.
Eine Person setzt sich nun auf den Drehschemel und versetzt den Kreisel in Rotation. Falls diese nun den Kreisel mit vertikaler Achse in Rotation versetzt, so wird sich aufgrund der Erhaltung des gesamten Drehimpulses, welcher sich nun aus der Person und dem Kreisel zusammensetzt, der Schemel in die entgegengesetzte Richtung drehen.
Eine andere Möglichkeit zum Zeigen der Drehimpulserhaltung wäre die Position des Kreisels, also die Entfernung zur Drehachse des Schemels, da sich dadurch das Trägheitsmoment ändert. Je weiter weg die Person den Kreisel hält, desto langsamer wird sich der Schemel drehen, da sich die Winkelgeschwindigkeit zur Erhaltung des Drehimpulses ändern muss; in diesem Fall also kleiner wird.
Auch könnte man der Person auf dem Schemel einen sich schon drehenden Kreisel geben, dessen Achse horizontal ausgerichtet ist. Dann würde man keinen Drehimpuls in z-Richtung erhalten und die Person würde somit still stehen. Erst wenn man den Kreisel kippen würde, begänne man sich wieder zu drehen.

2 Freie Achsen

Im zweiten Teil des Versuches soll man eine „Zigarrenkiste“an einen Elektromotor hängen, um damit den quaderförmigen Gegenstand rotieren zu lassen. Hierzu sind am Quader Ösen angebracht, sodass man ihn an verschiedenen Stellen aufhängen kann, wodurch man verschiedene Rotationsachsen erhält. Im Folgenden wird die Rotation um die drei Hauptträgheitsachsen untersucht. Hierbei wird sich zeigen, dass die Kiste zwei freie Achsen besitzen wird, bei denen der Körper eine stabile Drehung ausführt, während bei der anderen Achse Störungen auftreten werden.
Um das ganze zu beschreiben, benötigt man die Eulerschen Formeln:

$$M_1 = \Theta_1\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\omega_2\omega_3$$
$$M_2 = \Theta_2\dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_1\omega_3$$
$$M_3 = \Theta_3\dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)\omega_1\omega_2$$

In unserem Fall gibt es keine Drehmomente $\vec{M}$ und aufgrund des Elektromotors ist eine Komponente der Winkelgeschwindigkeit konstant. Sei dies in unserem Fall die Komponente ω_k, wodurch auch deren zeitliche Ableitung null wird. In dem man nun eine der zwei anderen Gleichungen zeitlich ableitet und dann nach $\dot{\omega}_j$ auflöst und dies in die andere Gleichung für $\dot{\omega}_j$ wieder einsetzt, so erhält man die Differentialgleichung:

$$\ddot{\omega}_i + \underbrace{\frac{\Theta_k - \Theta_j}{\Theta_i} \cdot \frac{\Theta_k - \Theta_i}{\Theta_j} \cdot \omega_k^2}_{\equiv K} \cdot \omega_i = 0$$

Also vereinfacht aufgeschrieben:

$$\ddot{\omega}_i + K\omega_i = 0$$

Für die Lösungen dieser DGl muss man nun zwei Fälle unterscheiden:

- $K > 0$: Man hat hier die Gleichung eines harmonischen Oszillators, also eine periodische Lösung. Die Rotation ist demzufolge stabil. Dies ist der Fall, wenn Θ_k das größte oder das kleinste Trägheitsmoment ist.
- $K < 0$: Die Lösung ist hier eine sinh-Funktion, d.h. es entsteht eine exponentiell wachsende Funktion und die Rotation ist dementsprechend instabil.

3 Kräftefreier Kreisel

Als nächstes soll man die Nutationsfrequenz eines kräftefreien Kreisels bestimmen. Dies wird mithilfe eines Kardankreisels durchgeführt. Da auf diesen aufgrund der Bedingung eines kräftefreien Kreisels keine äußeren Drehmomente wirken dürfen, müssen wir dies bei unserem Aufbau beachten.
Die zu messende Nutation wird als die Rotation der Figurenachse um die Drehimpulsachse bezeichnet. Hierzu müssen wir dem Kreisel senkrecht zur Drehimpulsachse einen kurzen Stoß versetzen.
Da die Nutationsfrequenz von der Rotationsfrequenz abhängt, wird nun die Zweite gemessen, durch einen Phototransistor. Dieser zeigt ein Rechtecksignal aus dem Hell-Dunkel-Wechsel, der genau einmal bei einer Umdrehung auftritt, weil auf dem schwarzen Kreisel sich ein weißer Streifen befindet. Mit einem angeschlossenen Frequenzzähler kann so die Rotationsfrequenz bestimmt werden. Außerdem gibt es einen zweiten Phototransistor, welcher für die Nutationsfrequenz ein Rechtecksignal erstellt, welches man wieder mit einem angeschlossenen Frequenzzähler misst. Dieses erhält man durch den

Schattenwurf des inneren Kardanrahmens.
Aus der Vorbereitungshilfe kann man den Zusammenhang zwischen der Nutationsfrequenz ω_N und der Rotationsfrequenz ω entnehmen. Für kleine Auslenkwinkel gilt:

$$\omega_N = \frac{\Theta_z}{\Theta_{x,y}} \cdot \omega$$

Hierbei ist Θ_z das Trägheitsmoment um die Rotationsachse des Kreisels und $\Theta_{x,y}$ dasselbige um die anderen Hauptachsen. Aufgrund des Kardanrahmens muss die Formel jedoch korrigiert werden, da dieser auch ein Trägheitsmoment besitzt und somit auch für die Rotation eine Rolle spielt. Auch dies wurde bereits in der Vorbereitungshilfe hergeleitet:

$$\omega_N = \frac{\Theta_z}{\sqrt{\Theta_{x,korr} \cdot \Theta_{y,korr}}}$$

Die korrigierten Trägheitsmomente lassen sich berechnen durch:

$$\Theta_{x,korr} = \Theta_{Kreisel} + \Theta_{Innenkardan} + \Theta_{Außenkardan}$$
$$\Theta_{x,korr} = \Theta_{Kreisel} + \Theta_{Innenkardan}$$

Außerdem soll der Versuch noch mit verschiedenen Zusatzgewichten am äußeren Kardanrahmen wiederholt werden, wodurch sich anhand der Formel ersichtlich die korrigierten Trägheitsmomente ändern.

4 Dämpfung des Kreisels

Hier soll die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels über die Zeit aufgetragen werden. Dazu wird wieder der Kreisel angeregt und die Rotationsfrequenz wie gerade eben gemessen. Aufgrund der Lager- und Luftreibung sollte der Kreisel gedämpft werden und demzufolge irgendwann zum Stehen kommen. Es ist zu erwarten, dass die Winkelgeschwindigkeit exponentiell abnimmt, da es ähnlich wie bei einem gedämpften harmonischen Oszillator ist.

5 Einfluss äußerer Drehmomente

Beim nächsten Teil des Versuches geht es um die Präzessionsfrequenz, die in Abhängigkeit von der Drehfrequenz gemessen werden soll. Hierzu wird ein Metallstab als zusätzliches Gewicht auf einer Seite der Figurenachse angebracht, da man nur eine Präzessionsbewegung erhält, wenn sich der rotierende Körper in Ruhe nicht im Kräftegleichgewicht befindet, wodurch also ein äußeres Drehmoment auf ihn wirkt. Steht nun der Drehimpuls L senkrecht auf dem Drehmoment M, so entsteht eine Präzessionsbewegung und der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ bewegt sich um die Vertikale.

Jedoch ist der Versuch nicht ganz nutationsfrei, weshalb man die Nutationsbewegungen noch gedämpft werden müssen, sodass sich für die Präzessionsfrequenz folgende Formel ergibt, die bereits in der Vorbereitung hergeleitet wurde:

$$\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Mit $\vec{L} \perp \vec{M}$ und $L = \Theta_z \cdot \omega$ folgt:

$$\omega_p = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{L}|} = \frac{r \cdot m \cdot g}{\Theta_z \cdot \omega}$$

r ist hier der Abstand des Gewichts zum Schwerpunkt des Kreisels.

6 Hauptträgheitsmomente

Nun soll mit den aus den Aufgaben 3 und 5 gemessenen Daten die Hauptträgheitsmomente bestimmt werden. So lässt sich zunächst aus der vorherigen Aufgabe Θ_z bestimmen, indem man ω_p über $\frac{1}{\omega}$ aufträgt und dann die Steigung folgender Geraden ermittelt:

$$\omega_p = \frac{M}{\Theta_z} \cdot \frac{1}{\omega}$$

Mit dem daraus berechneten Θ_z und den in Aufgabe 3 gemessenen Werten, bestimmt man wieder die Geradensteigung der folgenden Geraden, indem man ω_N über ω aufträgt:

$$\omega_N = \frac{\Theta_z}{\sqrt{\Theta_{x,korr} \cdot \Theta_{y,korr}}}$$

Hierbei ist wieder die schon im obigen Teil beschriebene Definition von $\Theta_{x,y,korr}$ zu beachten, sodass man zur Bestimmung der eigentlichen Hauptträgheitsmomente die zusätzlichen vom Kardanrahmen abziehen muss.
Zudem soll noch die Masse des Rotors abgeschätzt werden, was man mithilfe der Annahme, dass der Rotor ein Zylinder ist, erhält. Für einen Zylinder gilt nämlich:

$$\Theta_z = \frac{1}{2} M R^2$$

Man muss hier also nur noch den Radius des Zylinders messen.

7 Kreisel im beschleunigten Bezugssystem

Zum Schluss wird das Verhalten eines Kreiselkompasses untersucht. Hierzu wird die Horizontalebene blockiert, weshalb der Kreisel ein Drehmoment erfährt, welches von der Erdrotation hervorgerufen wird. Aufgrund des Drehmomentes richtet sich der Kompass nach Norden aus. Jedoch reicht die Erdrotation bei unserem Versuch nicht aus um diesen Effekt zu zeigen, da die Erde zu langsam rotiert und die Lagerreibung zu groß ist. Aus diesem Grund wird ein Drehtisch verwendet, der gekippt ist. Der Kreisel erfährt also das Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{L} \times \vec{\omega}_D$$

Man kann nun die Winkelgeschwindigkeit des Drehtisches in eine parallele und senkrechte Komponente aufteilen, immer bezogen auf die fixierte Horizontalebene des Kreisels.
Wenn man nun die parallele Komponente des Drehmomentes betrachtet, so wird diese aufgrund der Blockierung der Horizontalebene fast keine Wirkung haben. Die senkrechte Komponente jedoch sorgt für die Ausrichtung des Kreisels in die Nord-Süd-Richtung des Drehtisches, da dort die Drehimpulsachse des Rotors mit der Parallelkomponente der Winkelgeschwindigkeit zusammenfällt.