Auswertung: Wärmekapazität

M. Axwel & Marcel Köpke

14.06.2012

Inhaltsverzeichnis

1 spezifische Wärmekapazität von Aluminium und Kupfer

Wie in der Vorbereitung beschrieben führten wir die Messung der spezifischen Wärmekapazität von Aluminium und Kupfer aus. Allerdings verwendeten wir 2 Methoden. Einmal mit einem soliden Metallstück und einmal mit Granulat.

Zuvor bestimmten wir jedoch mit einer Wasser-Wasser Mischung die Wärmekapazität des Kalorimeters. Dabei verwendeten wir eine Wassermenge mit $m_1 = 123,125g$ und $T_1 = 23,2°\mathrm{C}$ und eine zweite Wassermenge mit $m_2 = 81,08g$ und $T_2 = 60,0°\mathrm{C}$. Es stellte sich die Mischtemperatur $T_E = 37,7°\mathrm{C}$ ein. Die Masse des Kalorimeters betrug: $m_K = 425,829g$ bei einer Anfgangstemperatur von $T_0 = T_1 = 23,2°\mathrm{C}$. Damit berechnet sich die Wärmekapazität c_K des Kalorimeters zu:

$$c_K = \frac{c_W}{m_K \Delta T_K}(m_2\Delta T_2 - m_1\Delta T_1) = 15,3174890094\frac{J}{kg \cdot K}$$

(beachte: $\Delta T > 0$).

Da die einzelnen Messgrößen (m, T) nicht korrelieren benutzen wir Gaußfehlerfortpflanzung um den systematischen Fehler anzugeben. Zuerst berechnen wir jedoch den systematischen Fehler für die ΔT_i (ebenfalls Gaußfehlerfortpflanzung):

$$\sigma_{\Delta T_i} = \sqrt{\left|(\frac{\partial \Delta T_i}{\partial T_E})^2(\sigma_\mathrm{T})^2 + (\frac{\partial \Delta T_i}{\partial T_A})^2(\sigma_\mathrm{T})^2\right|} = \sqrt{(\sigma_\mathrm{T})^2(1+1)} = \sigma_T\sqrt{2}$$

Der Skalenfehler des Temperaturmessgeräts betrug:

$$\sigma_T = 0,05K$$

damit erhalten wir für alle i:

$$\sigma_{\Delta T_i} = 0,07K$$

Der systematische Fehler der spez. Wärmekapazität c_K kann geschrieben werden als:

$$\sigma_{c_K} = \sqrt{\sum_i(\frac{\partial c_K}{\partial(\Delta T_i)})^2(\sigma_{\Delta T_i})^2 + \sum_i(\frac{\partial c_K}{\partial m_i})^2(\sigma_{m_i})^2}$$

Den Massenfehler schätzen wir ab mit:

$$\sigma_{m_i} = 0,01g$$

Damit dann:

$$\sigma_{c_K} = \sqrt{(\sigma_{\Delta T_i})^2 \cdot ((\frac{c_W}{m_K \Delta T_K} m_1)^2 + (\frac{c_W}{m_K \Delta T_K} m_2)^2 + (\frac{c_W}{m_K (\Delta T_K)^2}(m_2 \Delta T_2 - m_1 \Delta T_1))^2 + ...}$$
$$... \overline{(\sigma_{m_i})^2 \cdot ((\frac{c_W}{m_K \Delta T_K} \Delta T_1)^2 + (\frac{c_W}{m_K \Delta T_K} \Delta T_2)^2 + (\frac{c_W}{(m_K)^2 \Delta T_K}(m_2 \Delta T_2 - m_1 \Delta T_1))^2}$$

$$\sigma_{c_K} = 7,01 \frac{J}{kg \cdot K}$$

Analog erhielten wir für eine Messung der spezifischen Wärmekapazität c_H der Halterung des Granulats:

$$c_H = \frac{1}{m_H \cdot \Delta T_H}(c_W m_W \Delta T_W + c_K m_K \Delta T_K) = 419,7430578672 \frac{J}{kg \cdot K}$$

mit $m_H = 24,83g$, $\Delta T_H = 73,6K$, $m_W = 139,535g$, $\Delta T_W = \Delta T_K = 1,3K$ und $m_k = 425,829g$. Wir benutzten auch hier wieder die Gauß-Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_{c_H} = \sqrt{\sum_i (\frac{\partial c_H}{\partial(\Delta T_i)})^2 (\sigma_{\Delta T_i})^2 + \sum_i (\frac{\partial c_H}{\partial m_i})^2 (\sigma_{m_i})^2 + (\frac{\partial c_H}{\partial c_K})^2 (\sigma_{c_K})^2}$$

$$\sigma_{c_H} = \sqrt{(\sigma_{\Delta T_i})^2 \cdot ((\frac{c_W}{m_H \Delta T_H} m_W)^2 + (\frac{c_K}{m_H \Delta T_H} m_K)^2 + ...}$$
$$... \overline{(\frac{1}{m_H (\Delta T_H)^2}(c_W m_W \Delta T_W + c_K m_K \Delta T_K))^2 + ...}$$
$$... \overline{(\sigma_{m_i})^2 \cdot ((\frac{c_W}{m_H \Delta T_H} \Delta T_W)^2 + (\frac{c_K}{m_H \Delta T_H} \Delta T_K)^2 + ...}$$
$$... \overline{(\frac{1}{(m_H)^2 \Delta T_H}(c_W m_W \Delta T_W + c_K m_K \Delta T_K))^2 + ...}$$
$$... \overline{(\sigma_{c_K})^2 \cdot (\frac{m_K \Delta T_K}{m_H \Delta T_H})^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{c_H} = 22,68 \frac{J}{kg \cdot K}$$

1.1 einzelnes Metallstück

Mit den zuvor bestimmten Korrekturwärmekapazitäten erhalten wir für die spezifischen Wärmekapazitäten von den einzelnen Metallstücken:

$$c_M = \frac{1}{m_M \Delta T_M}(c_W m_W \Delta T_W + c_K m_K \Delta T_K)$$

wobei $\Delta T_K = \Delta T_W$ ist.

Wir erhielten folgende Messwerte:

Messung	m_M [g]	m_W [g]	$T_{W,0}$ [°C]	$T_{M,0}$ [°C]	T_E [°C]	c_M [$\frac{J}{kg \cdot K}$]
Aluminium	30,735	182,283	23,1	98,1	25,6	862,58
Aluminium	30,735	159,455	23,1	99,3	25,9	835,75
Aluminium	30,735	145,735	23,1	99,5	26,7	991,08
Kupfer	171,175	171,975	23,1	98,6	29,1	366,01
Kupfer	171,175	127,935	23,1	99,5	33,3	487,46
Kupfer	171,175	152,755	23,1	94,6	30,2	415,65

Tabelle 1.1: Messwerte

Trägt man die Messwerte über äquidistante Stellen auf und fittet eine Konstante an diesen Plot so erhält man:

$$\begin{aligned} \overline{c_{Al}} &= 896,47 \frac{J}{kg \cdot K} \\ \overline{c_{Cu}} &= 423,04 \frac{J}{kg \cdot K} \end{aligned}$$

Die statistischen Fehler sind dabei:

$$\sigma_{stat,Al} = 47,93 \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$\sigma_{stat,Cu} = 35,25 \frac{J}{kg \cdot K}$$

Wie zuvor sind korrelieren auch hier die Fehler nicht, sodass wir wieder Gaußfehlerabschätzung für den systematischen Fehler anwenden:

$$\sigma_{c_M} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial c_M}{\partial(\Delta T_i)}\right)^2 (\sigma_{\Delta T_i})^2 + \sum_i \left(\frac{\partial c_M}{\partial m_i}\right)^2 (\sigma_{m_i})^2 + \left(\frac{\partial c_M}{\partial c_K}\right)^2 (\sigma_{c_K})^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{c_M} &= \sqrt{(\sigma_{\Delta T_i})^2 \cdot ((\frac{c_W}{m_M \Delta T_M} m_W)^2 + (\frac{c_K}{m_M \Delta T_M} m_K)^2 + ...} \\ ... & \overline{(\frac{1}{m_M (\Delta T_M)^2} (c_W m_W \Delta T_W + c_K m_K \Delta T_K))^2 + ...} \\ ... & \overline{(\sigma_{m_i})^2 \cdot ((\frac{c_W}{m_M \Delta T_M} \Delta T_W)^2 + (\frac{c_K}{m_M \Delta T_M} \Delta T_K)^2 + ...} \\ ... & \overline{(\frac{1}{(m_M)^2 \Delta T_M} (c_W m_W \Delta T_W + c_K m_K \Delta T_K))^2 + ...} \\ ... & \overline{(\sigma_{c_K})^2 \cdot (\frac{m_K \Delta T_K}{m_M \Delta T_M})^2} \end{aligned}$$

Wir erhalten 3 verschiedene systematische Fehler (je einen pro Messung) und wählen den größten aus:

$$\Rightarrow \sigma_{c_{Al}} = 24,44 \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$\Rightarrow \sigma_{c_{Cu}} = 4,55 \frac{J}{kg \cdot K}$$

Somit können wir unsere Messwerte nun angeben:

$$c_{Al} = (896,5 \pm 24,4 \pm 47,9) \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$c_{Cu} = (423,0 \pm 4,6 \pm 35,3) \frac{J}{kg \cdot K}$$

Die Literaturwerte lauten:

$$c_{Al,lit} = 896 \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$c_{Cu,lit} = 381 \frac{J}{kg \cdot K}$$

1.1.1 Diskussion der Messwerte

Wie man sieht liegt das Ergebnis von Aluminium im Bereich des Literaturwerts. Es ergaben sich hier also kaum Komplikationen mit einem unvollständig durchwärmten Aluminiumblock.

Das Ergebnis von Kupfer weicht allerdings schon eher vom Lit.-Wert ab, was sich durch das höhere, verwendete, Volumen klar machen kann. Der Kupferblock konnte auf Grund der größeren Masse nicht gleichmäßig durchwärmt werden, was das Ergebnis verfälschte.

1.2 Granulat

Mit den zuvor bestimmten Korrekturwärmekapazitäten erhalten wir für die spezifischen Wärmekapazitäten von den einzelnen Metallstücken:

$$c_M = \frac{1}{m_M \Delta T_M} (c_W m_W \Delta T_W + c_K m_K \Delta T_K - c_H m_H \Delta T_H)$$

wobei $\Delta T_K = \Delta T_W$ und $\Delta T_H = \Delta T_M$ ist.

Wir erhielten folgende Messwerte:

Messung	m_M [g]	m_W [g]	$T_{W,0}$ [°C]	$T_{M,0}$ [°C]	T_E [°C]	c_M $[\frac{J}{kg \cdot K}]$
Aluminium	13,21	99,095	23,1	99,8	28,1	1433,15
Aluminium	13,21	101,905	23,1	99,8	28,6	1741,24
Aluminium	13,21	90,285	23,1	99,9	29,2	1719,72
Kupfer	19,12	117,815	23,1	98,5	26,3	612,14
Kupfer	19,12	116,515	23,1	99,5	26,1	510,45
Kupfer	19,12	95,495	23,1	99,8	26,8	530,85

Tabelle 1.2: Messwerte

Trägt man die Messwerte über äquidistante Stellen auf und fittet eine Konstante an diesen Plot so erhält man:

$$\begin{aligned}\overline{c_{Al}} &= 1631,37\frac{J}{kg \cdot K} \\ \overline{c_{Cu}} &= 55,15\frac{J}{kg \cdot K}\end{aligned}$$

Die statistischen Fehler sind dabei:

$$\sigma_{stat,Al} = 99,3\frac{J}{kg \cdot K}$$

$$\sigma_{stat,Cu} = 31,06\frac{J}{kg \cdot K}$$

Wie zuvor sind korrelieren auch hier die Fehler nicht, sodass wir wieder Gaußfehlerabschätzung für den systematischen Fehler anwenden:

$$\sigma_{c_M} = \sqrt{\sum_i(\frac{\partial c_M}{\partial(\Delta T_i)})^2(\sigma_{\Delta T_i})^2 + \sum_i(\frac{\partial c_M}{\partial m_i})^2(\sigma_{m_i})^2 + (\frac{\partial c_M}{\partial c_K})^2(\sigma_{c_K})^2 + (\frac{\partial c_M}{\partial c_H})^2(\sigma_{c_H})^2}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{c_M} &= \sqrt{(\sigma_{\Delta T_i})^2 \cdot ((\frac{c_W}{m_M \Delta T_M} m_W)^2 + (\frac{c_K}{m_M \Delta T_M} m_K)^2 + ...} \\ ... & \overline{(\frac{1}{m_M (\Delta T_M)^2}(c_W m_W \Delta T_W + c_K m_K \Delta T_K - c_H m_H \Delta T_H))^2 + ...} \\ ... & \overline{(\sigma_{m_i})^2 \cdot ((\frac{c_W}{m_M \Delta T_M} \Delta T_W)^2 + (\frac{c_K}{m_M \Delta T_M} \Delta T_K)^2 + ...} \\ ... & \overline{(\frac{1}{(m_M)^2 \Delta T_M}(c_W m_W \Delta T_W + c_K m_K \Delta T_K - c_H m_H \Delta T_H))^2 + ...} \\ ... & \overline{(\sigma_{c_K})^2 \cdot (\frac{m_K \Delta T_K}{m_M \Delta T_M})^2 + (\sigma_{c_H})^2 (\frac{m_H \Delta T_H}{m_M \Delta T_M})^2}\end{aligned}$$

Wir erhalten 3 verschiedene systematische Fehler (je einen pro Messung) und wählen den größten aus:

$$\Rightarrow \sigma_{c_{Al}} = 38,87\frac{J}{kg \cdot K}$$

$$\Rightarrow \sigma_{c_{Cu}} = 26,97 \frac{J}{kg \cdot K}$$

Somit können wir unsere Messwerte nun angeben:

$$c_{Al} = (1631,3 \pm 38,9 \pm 99,3) \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$c_{Cu} = (551,1 \pm 27,0 \pm 31,1) \frac{J}{kg \cdot K}$$

Die Literaturwerte lauten:

$$c_{Al,lit} = 896 \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$c_{Cu,lit} = 381 \frac{J}{kg \cdot K}$$

1.2.1 Diskussion der Messwerte

Die Ergebnisse für die Granulatmessungen liegen im Gegensatz zu den vorherigen Messwerten deutlich über den Erwartungswerten. Dies kann eventuell mit der verwendeten Größenordnung der Masse und dem Halterungssieb erklärt werden.

Das Halterungssieb hatte eine Masse von 24,83g. Die verwendeten Granulatproben lagen sämtlich unterhalb dieses Wertes. Dadurch beeinflusste das Sieb die Messung stark, da es einen großen Anteil der zugeführten Wärmemenge mit sich trug. Ungenaue Messungen der Wärmekapazität des Siebs können hier also zu großen Fehlern führen, die nicht weiter abgeschätzt werden können. Auch treten durch das Sieb weitere Fehlerquellen, wie das «Mitführen» von heißem Wasser in das Kalorimeter auf. Dies verfälschte weiterhin die Messung.

Man kann jedoch deutlich sehen, dass der Messwert für Aluminium stärker vom Lit.-Wert abweicht als der von Kupfer. Auch hier lässt sich dies wieder durch das Massenverhältnis erklären. In den gesamten Messungen wurde die Masse von Aluminium stets kleiner gewählt als diejenige von Kupfer, sodass der Einfluss von Fehlerquellen wie dem Sieb für Aluminium natürlich stärker ins Gewicht fällt als für Kupfer.

2 Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazität

2.1 Besprechung der Messwerte

Wie in der Vorbereitung angegeben kühlten wir einen Aluminiumzylinder auf ~100K ab und erhitzen ihn dann mit einer konstanten (elektrischen) Heizleistung $P_H = U \cdot I = 12,3V \cdot 2,35A = 28,91W$.

Unsere Messwerte waren:

t [s]	U [mV]	T [K]
0	-5,722	76,15
60	-5,598	83,15
120	-5,309	100,15
180	-5,01	114,15
240	-4,712	127,15
300	-4,426	139,15
360	-4,162	149,15
420	-3,904	159,15
480	-3,646	168,15
540	-3,387	177,15
600	-3,138	185,15
660	-2,904	192,15
720	-2,674	197,15
780	-2,445	206,15
840	-2,22	212,15
900	-1,99	229,15
960	-1,76	226,15
1020	-1,541	232,15
1080	-1,331	238,15
1140	-1,123	244,15
1200	-0,915	249,15
1260	-0,702	255,15
1320	-0,495	260,15
1380	-0,3	265,15
1440	-0,11	270,15
1500	0,074	275,15
1560	0,259	279,15
1620	0,442	284,15
1680	0,626	289,15
1740	0,811	293,15
1800	0,991	296,15

Tabelle 2.1: Messwerte

Für den Temperatur-Zeit-Zusammenhang erhalten wir:

$$T(t) = a \cdot t^b$$

mit (±statistischer Fehler)

$$a = 12,9482 \pm 2,003$$

$$b = 0,41718 \pm 0,02209$$

Das Schaubild zeigt die Übereinstimmung:

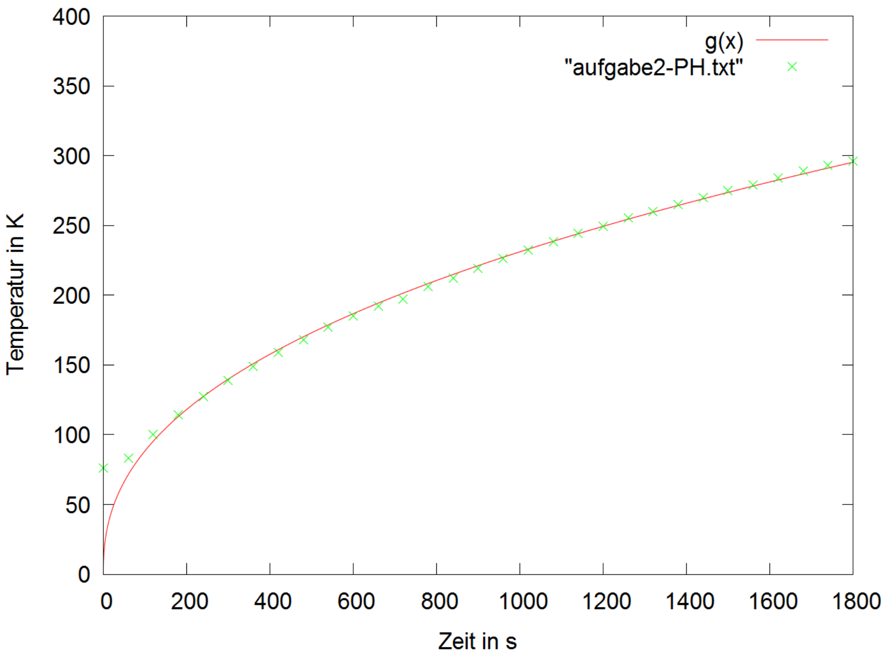

Abbildung 2.1: Fit-Kurve

Damit ergibt sich für die Steigung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot b \cdot t^{b-1}$$

verwenden wir noch $t = \left(\frac{T}{a}\right)^{\frac{1}{b}}$ ergibt sich:

$$\alpha(T) = \frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot b(\frac{T}{a})^{\frac{b-1}{b}} = e \cdot T^d$$

mit

$$e = 193,3488098$$

$$d = -1,397046838$$

Wir müssen jedoch noch die Erwärmung ohne P_H berücksichtigen. Dafür greifen wir uns einige wenige Zahlenwerte aus der in der Vorbereitungshilfe gegebenen Tabelle heraus:

t [s]	U [mV]	T [K]	t [s]	U [mV]	T [K]	t [s]	U [mV]	T [K]
300	-5,39	95,15	2000	-3,09	186,15	7200	-0,97	247,15
400	-5,20	105,15	2300	-2,86	193,15	8000	-0,84	251,15
500	-4,99	115,15	2700	-2,64	200,15	9000	-0,72	254,15
600	-4,75	126,15	3000	-2,51	204,15	10000	-0,55	259,15
700	-4,57	133,15	3400	-2,31	210,15	11000	-0,40	263,15
850	-4,42	139,15	3800	-2,15	214,15	12600	-0,20	268,15
1000	-4,27	145,15	4200	-1,96	220,15	14200	0,00	273,15
1100	-4,13	150,15	4600	-1,81	225,15	16500	0,21	278,15
1200	-4,01	155,15	5000	-1,71	227,15	19500	0,41	283,15
1400	-3,76	164,15	5500	-1,55	232,15	25000	0,62	288,15
1600	-3,51	173,15	6000	-1,34	237,15	28000	0,71	291,15
1800	-3,25	181,15	6500	-1,15	243,15	35000	0,82	293,15

Tabelle 2.2: Tabellenwerte

Für den Temperatur-Zeit-Zusammenhang erhalten wir:

$$T(t) = a \cdot t^b + c$$

mit (±statistischer Fehler)

$$a = 8601,93$$

$$b = 0,00507369$$

$$c = -8757,85$$

Das Schaubild zeigt die Übereinstimmung:

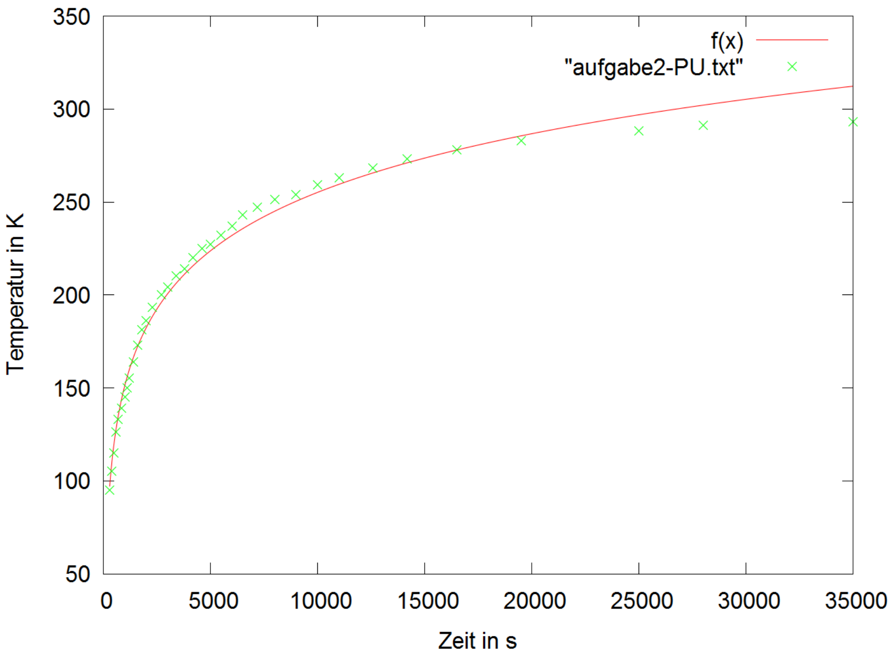

Abbildung 2.2: Fit-Kurve

Damit ergibt sich für die Steigung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = abt^{b-1}$$

Nutzen wir nun noch $t = (\frac{T-c}{a})^{\frac{1}{b}}$ aus so folgt:

$$\beta(T) = \frac{\partial T}{\partial t} = ab(\frac{T-c}{a})^{\frac{b-1}{b}} = 43,6435(\frac{T+8757,85}{8601,93})^{-197,09}$$

Hier nun die beiden Steigungskurven gegenübergestellt:

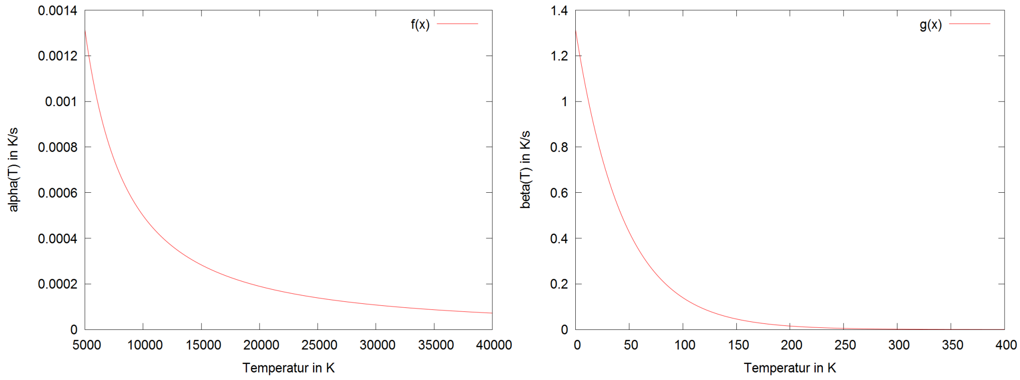

Abbildung 2.3: $\alpha(T)//\beta(T)$

Wie in der Vorbereitungshilfe beschrieben erhalten wir:

$$c(T) = \frac{P_H}{m} \cdot \frac{1}{\alpha(T) - \beta(T)}$$

mit $P_H = 28,905W$ und $m = 0,376kg$. Damit ergibt sich folgende Kurve:

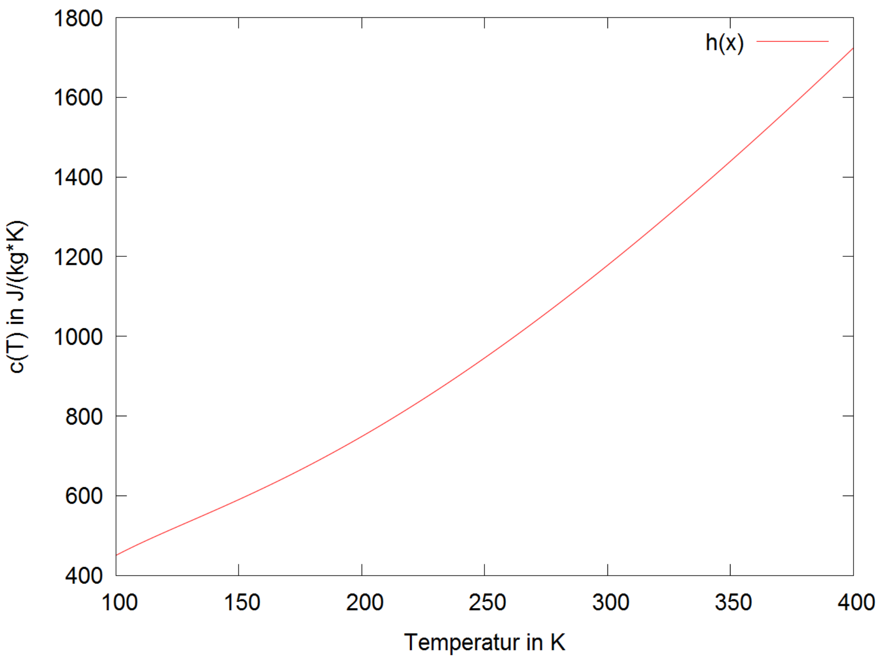

Abbildung 2.4: $c(T)$

Man sieht, dass die spezifische Wärmekapazität annähernd linear mit der Temperatur ansteigt. Es gilt:

$$c(300K) \approx 1174,39 \frac{J}{kg \cdot K}$$

Die Ergebnisse von Aufgabe 1 zeigen sich auch hier wieder näherungsweise.

2.2 Fehlerrechnung

2.2.1 systematischer Fehler

Wir geben zuerst den systematischen Fehler für die Heizleistung P_H an. Da U und I korreliert sind schätzen wir den Fehler mit der Größtfehlerabschätzung ab. Die sys. Fehler für die Messgrößen geben wir dabei mit 5% der Skalenabstandseinstellmöglichkeit an:

$$\begin{aligned} \sigma_U &= 0,005V \\ \sigma_I &= 0,0005A \end{aligned}$$

Damit:

$$\sigma_{P_H} = \left|\frac{\partial P_H}{\partial U}\right| \sigma_U + \left|\frac{\partial P_H}{\partial I}\right| \sigma_I = I \cdot \sigma_U + U \cdot \sigma_I$$

$$\Rightarrow \sigma_{P_H} = 0,0179W$$

Die Messung der Temperatur erfolgte über ein Thermoelement, welches eine temperaturabhängige Spannung registrierte. Die Auswertung der Temperatur erfolgt mit Hilfe einer Referenztabelle, deren «Skalenabstand» 2 K beträgt. Dies ist um 3 Größenordnungen ungenauer als die eigentliche Spannungsmessung. Daher schätzen wir den systematischen Fehler der Temperaturmessung ab mit:

$$\sigma_T = 1K$$

Für die Fit-Größen können wir keinen systematischen Fehler angeben, da sie nicht direkte Messgrößen widerspiegeln. Da α und β damit jeweils nur von einer Messgröße abhängen sind in diesem Fall Gauß- und Größtfehlerabschätzung identisch. Wir verwenden jeweils die kleinste gemessene Temperatur um den größten Fehler auszuwählen:

$$\sigma_\alpha = \sqrt{(\frac{\partial \alpha}{\partial T})^2 (\sigma_T)^2} = \left|\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right| \sigma_T = e\,|d| \cdot T^{d-1} \sigma_T = 0,0083387618 \left[\frac{K}{s}\right]$$

$$\sigma_\beta = \sqrt{(\frac{\partial \beta}{\partial T})^2 (\sigma_T)^2} = \left|\frac{\partial \beta}{\partial T}\right| \sigma_T = |(b-1)|\,(\frac{T-c}{a})^{-\frac{1}{b}} \cdot \sigma_T = 0,0034290431 \left[\frac{K}{s}\right]$$

Die Masse des Zylinders war auf dem Aufgabenblatt ohne Fehler angeben. Wir nehmen diesen daher als verschwindet gering an. Da alle Messgrößen (P_H, α, β) unkorreliert sind wählen wir auch hier wieder Gaußfehlerabschätzung um den systematischen Fehler für $c(T)$ anzugeben:

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial P_H}\right)^2 (\sigma_{P_H})^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial \alpha}\right)^2 (\sigma_\alpha)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial \beta}\right)^2 (\sigma_\beta)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{m}\frac{1}{\alpha-\beta}\right)^2 (\sigma_{P_H})^2 + \left(\frac{P_H}{m}\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\right)^2 \left((\sigma_\alpha)^2 + (\sigma_\beta)^2\right)} \end{aligned}$$

Wir wählen für $\alpha(T)$ und $\beta(T)$ jeweils diejenige Temperatur aus, mit dem $|\alpha-\beta|$ am kleinsten und damit $\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}$ am größten wird. Am Schaubild 2.4 erkennt man, dass dies Gerade für hohe Temperaturen der Fall ist. Wir wählen also $T = 296,15K$ und haben damit:

$$\begin{aligned} \alpha(296,15K) &= 0,06815909979\frac{K}{s} \\ \beta(296,15K) &= 0,001896107794\frac{K}{s} \end{aligned}$$

Schlussendlich folgt:

$$\sigma_c = 157,9\frac{J}{kg \cdot K}$$

2.2.2 statistischer Fehler

Um den statistischen Fehler der Messung anzugeben betrachten wir den statistischen Fehler der Fit-Parameter. Allerdings berechnete unser Fit-Programm (Gnuplot) für die Fit-Parameter von β relative Fehler von $\sim 900\%$. Wir schließen hier auf einen Fehler im Algorithmus des Fit-Programms und schätzen den statistischen Fehler für β dann später mit demselben Fehler wie für α ab. Dies ist zudem sinnvoll da die Messwerte für α und β aus dem gleichen Messvorgang hervorgehen.

Berechnen wir nun also den statistischen Fehler von α:

Die Parameter e und d sind Funktionen der Parameter a und b:

$$
\begin{aligned}
e &= ab(\frac{1}{a})^{\frac{b-1}{b}} \\
d &= \frac{b-1}{b}
\end{aligned}
$$

Da es nicht entscheidbar ist ob die Parameter a und b korrelieren benutzen wir Größtfehlerabschätzung um so auf jeden Fall keinen Fehler zu unterschlagen:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{e,stat} &= \left|\frac{\partial e}{\partial a}\right| \sigma_{a,stat} + \left|\frac{\partial e}{\partial b}\right| \sigma_{b,stat} = 124,3053004 \\
\sigma_{d,stat} &= \left|\frac{\partial d}{\partial b}\right| \sigma_{b,stat} = 0,1269254630
\end{aligned}
$$

Wir schätzen die Fehler nun für α weiterhin mit Größtfehlerabschätzung ab:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\alpha,stat} &= \left|\frac{\partial \alpha}{\partial e}\right| \sigma_{e,stat} + \left|\frac{\partial \alpha}{\partial d}\right| \sigma_{d,stat} \\
&= \left|T^d \cdot \sigma_{e,stat}\right| + \left|e \cdot \ln(T) \cdot T^d\right| \cdot \sigma_{d,stat}
\end{aligned}
$$

Die Funktion $\sigma_{\alpha,stat}(T)$ nimmt, wie folgendes Schaubild zeigt, für $T = 100K$ im Intervall $[100K : 300K]$ ihr Maximum an:

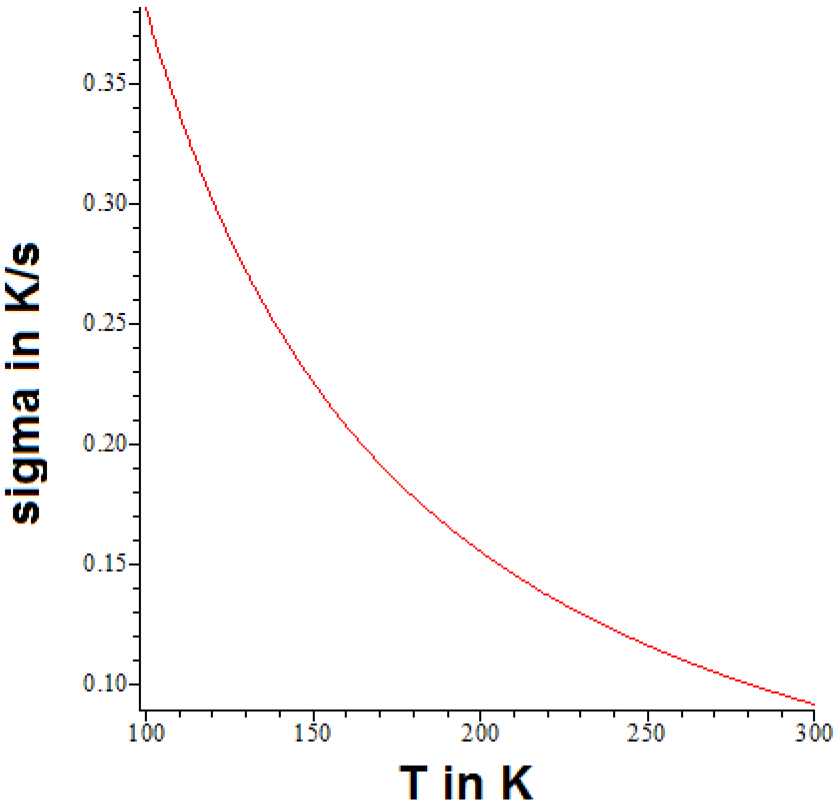

Abbildung 2.5: $\sigma_{\alpha,stat}(T)$

Damit erhalten wir dann:

$$\sigma_{\alpha,stat} = \sigma_{\alpha,stat}(100K)) = 0,3812774706\frac{K}{s}$$

und setzten wie oben erwähnt:

$$\sigma_{\beta,stat} = \sigma_{\alpha,stat}$$

Analog wie zuvor schätzen wir nun den stat. Fehler für $c(T)$ mit Gaußfehlerabschätzung ab:

$$\sigma_{c,stat} = \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial \alpha}\right)^2 (\sigma_{\alpha,stat})^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial \beta}\right)^2 (\sigma_{\beta,stat})^2}$$

Wir erhalten damit:

$$\sigma_{c,stat} = 9442,2\frac{J}{kg \cdot K}$$

Dieser Wert kann nur als Obergrenze des stat. Fehlers dienen, da zuvor immer versucht wurde diesen zu maximieren. Annahmen, wie das setzen der Temperatur auf $\sim 100K$ in den oberen Rechnungen, sind für Messungen im Bereich von z.B. 300 K natürlich völlig übertrieben. Da in dieser Aufgabe jedoch nach keinem Messwert der spezifischen Wärmekapazität bei einer bestimmten Temperatur gefragt war belassen wir es bei diesem Ergebnis.

Man kann jedoch gut erkennen, dass die Messung der spezifischen Wärmekapazität bei tiefen Temperaturen ($\sim 100K$) sehr schwierig ist, da allein der statistische Fehler enorm groß wird.