

Betaspektroskopie

Kevin Edelmann, Julian Stöckel
Gruppe 109

19.1.2011

Zusammenfassung

Beim β -Zerfall werden ein Elektron bzw. Positron und ein Neutrino emittiert und die beim Zerfall freiwerdende kinetische Energie kann sich statistisch auf beide Teilchen verteilen. Daher weisen die emittierten Elektronen ein nichttriviales, kontinuierliches Spektrum auf, das in diesem Versuch untersucht werden soll. Dazu soll die Energieverteilung dieser Elektronen in einem geeigneten Magnetspektrometer vermessen und aus den Daten ein sog. „Kurie-Plot“ angefertigt werden. Aus diesem lassen sich einige Eigenschaften des Zerfalls rekonstruieren, wie z. B. die Neutrinomasse (allerdings nicht in diesem Experiment), das Übergangsmatrixelement und die Zerfallsenergie, die nicht direkt aus dem Spektrum ersichtlich ist.

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbereitung	2
1.1	Theoretische Grundlagen	3
1.1.1	Die drei Arten des β -Zerfalls	3
1.1.2	β -Spektrum	4
1.1.3	Innere Konversion	4
1.1.4	Caesium	5
1.2	Experiment	5
1.2.1	Geiger-Müller-Zähler	5
1.2.2	Aufbau und Messprinzip	6
1.2.3	Durchführung	7
1.2.4	Kurie-Plot	8
1.2.5	Eichung	8
1.2.6	Konversionskoeffizienten	9
2	Auswertung	10
2.1	Durchführung	11
2.2	Korrektur und Eichung	11
2.3	Kurie-Plot	13
2.4	Übergangsenergie	14
2.5	Konversionskoeffizienten	15
A	Anhang	19
	Literaturverzeichnis	21

1 Vorbereitung

1.1 Theoretische Grundlagen

1.1.1 Die drei Arten des β -Zerfalls

Aus der Theorie sind drei Varianten des β -Zerfalls bekannt:

β^- -Zerfall

Beim β^- -Zerfall emittiert der Mutterkern ein Elektron und erhöht, der Ladungserhaltung gehorchend, seine Kernladungszahl um 1. Genauer gesprochen zerfällt das Kernneutron in ein Proton und ein W^- -Boson, das wiederum in ein Elektron und ein Elektronantineutrino zerfällt:

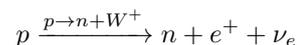


Freie Neutronen sind nicht stabil, sondern haben eine mittlere Lebensdauer von $\tau \approx 885 \text{ s}^1$, sodass der β^- -Zerfall auch bei freien Neutronen auftritt.

Die Energiedifferenz zwischen den Zuständen vor und nach dem Zerfall wird als kinetische Energie auf die drei Edukte verteilt, der β -Zerfall wird zum Dreikörperproblem. Hilfe bei der Lösung des Problems erhält man durch die Massenverhältnisse: Der Kern ist im Vergleich zum Elektron und dem Neutrino sehr schwer, wodurch der an ihn abgegebene Impuls oft vernachlässigt werden kann.

β^+ -Zerfall

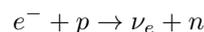
Beim β^+ -Zerfall emittiert der Mutterkern ein Positron und seine Ladungszahl wird verringert. Ein Proton des Kerns zerfällt in ein Neutron und ein W^+ -Boson, das wiederum in ein Positron und ein Elektronneutrino zerfällt:



Freie Protonen sind stabil, sodass der Zerfall nur in gebundenen Systemen beobachtet wird, wobei die Massendifferenz zwischen Mutter- und Tochterkern ausreichen muss, um die Ruhemasse der neu entstandenen Teilchen aufzubringen. Der Überschuss an Energie wird wiederum als kinetische Energie, ganz analog zum β^- -Zerfall aufgeteilt.

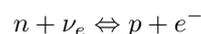
Elektroneneinfang

Beim Elektroneneinfang wird, wie der Name schon andeutet, ein Elektron vom Kern eingefangen. Dieses reagiert mit einem Proton und erzeugt ein Neutron und ein Elektronneutrino. Auch hier lässt sich eine Zerfallsgleichung aufstellen:



Ist die Energiedifferenz zwischen Mutter- und Tochterkern groß genug, finden β^+ und Elektroneneinfang als alternative Zerfallskanäle statt. Üblicherweise wird ein Elektron aus einer inneren Hülle (häufig aus der K -Schale) in der Reaktion verwendet, sodass durch Hüllenelektronen, die den nun freien Platz besetzen Photonen emittiert werden. In manchen Fällen wird dadurch ein Elektron aus den äußeren Schalen ausgeschlagen.

Alle drei Arten der β -Strahlung treten in der Natur auf und sind nachgewiesen worden. Sie lassen sich in einer symmetrisierten Gleichung zusammenfassen:



Offensichtlich sind beim β -Zerfall Ladungs-, Baryonenzahl- und Leptonenzahlerhaltung bestätigt. Nicht erhalten ist die Parität, was aber für diesen Versuch keine weiteren Konsequenzen hat.

¹Siehe [2]

1.1.2 β -Spektrum

Wie oben schon erwähnt, ist der β^- -Zerfall (analoge Überlegungen gelten für den β^+ -Zerfall, nicht aber für den Elektroneneinfang) ein Dreikörperproblem. Es wird lösbar in der Näherung, dass der Kern keine Rückstoßenergie erhält, da seine Masse mehrere Größenordnungen über denen der anderen Zerfallsprodukte liegt. Wir interessieren uns für das Spektrum, d.h. die Verteilung der Elektronenzahl über der Energie. Hierzu verwenden wir Fermis *goldene Regel*:

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \nu(E_f) |H_{fi}|^2$$

Hierbei beschreibt $\Gamma_{i \rightarrow f}$ die Zerfallsrate vom Anfangszustand in den Zustand mit Energie E_f , $\nu(E_f) = \frac{dn}{dE_f}$ die Zustandsdichte bei der Energie E_f und H_{fi} das (energieunabhängige) Übergangsmatrixelement. Man findet² für die Zahl der Elektronen im Impulsintervall dp

$$N(p)dp = K \cdot p^2(E_f - E)^2 |H_{fi}|^2 F(E, Z) \cdot dp \quad (1.2)$$

Wobei die Funktion $F(E, Z)$ tabelliert vorliegt und K eine energieunabhängige Konstante ist. Man kann (1.2) nach der Energie auflösen und erhält dann die Gleichung für den „Kurie-Plot“:

$$\sqrt{\frac{N(p)}{p^2 \cdot F(E, Z)}} = \text{const.} \cdot (E_0 - E) |H_{fi}| \quad (1.3)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Gerade, deren Schnittpunkt mit der Energieachse die Zerfallsenergie ergibt, und aus deren Steigung man das Matrixelement bestimmen kann.

In der Realität ist die Verteilung der Elektronen zu den niedrigen Energien hin verzerrt, da das sich entfernende Elektron noch von der Coulombkraft abgebremst wird (entsprechend werden beim β^+ -Zerfall entstehende Positronen beschleunigt und das Spektrum ist dort zu den höheren Energien verschoben). Ausserdem wurde in der Ableitung von (1.2) die Neutrinomasse vernachlässigt. Die eigentlich endliche Neutrinomasse führt zu einer Krümmung der Kurve nahe der Maximalenergie, sodass die Kurve die Energieachse eigentlich bei $E_0 - m_\nu$ senkrecht schneidet. Auf diese Weise wird im KATRIN-Experiment am Campus Nord bald eine neue Obergrenze für die Elektronantineutrinomasse bestimmt. Deutlich werden die Effekte der Neutrinomasse bei niedrigen Kernmassen. Aus diesem Grund und aus der geringen Genauigkeit des Spektrometers heraus werden wir in unserem Experiment keinen Einfluss der Neutrinomasse bemerken.

1.1.3 Innere Konversion

Der Tochterkern des β -Strahlers ist im oft in einem angeregten Zustand. In diesem Fall kann es zum Prozess der inneren Konversion kommen, den wir zur Eichung der Energieskala benutzen werden.

Anstelle eines γ -Quants kann ein angeregter Kernzustand die Anregungsenergie von $E_\gamma = 662 \text{ keV}$ ³ auch auf ein inneres Hüllenelektron mit nichtverschwindender Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kern abgeben. Dieses Elektron entfernt sich mit der kinetischen Energie $E_{\text{kin}} = E_\gamma - E_B$, wobei E_B seine Bindungsenergie ist. Die innere Konversion tritt vor allem bei Übergängen hoher Multipolarität auf, die elektromagnetisch gehemmt sind.

Besonders wichtig sind hierbei die Elektronen der K und L -Schalen, weshalb das Konversionsspektrum zwei scharfe Linien aufweist, die sich gut zur Eichung eignen. Die Energien der

²Siehe [1], S. 17ff.

³Siehe [1], Termschema auf S. 244

davon fliegenden Elektronen betragen für diese Schalen⁴

$$\begin{aligned}E_K &= 662 \text{ keV} - 37,4 \text{ keV} = 624,6 \text{ keV} \\E_L &= 662 \text{ keV} - 5,6 \text{ keV} = 656,4 \text{ keV}\end{aligned}\tag{1.4}$$

Der *Konversionskoeffizient* ist das Verhältnis der Anzahl von Elektronen, die durch innere Konversion angeregt das Atom verlassen, zu der Anzahl von Zerfällen, bei denen die Anregungsenergie des Kerns wie üblich durch abgestrahlte γ -Quanten erfolgt:

$$\alpha = \frac{N_e}{N_\gamma}\tag{1.5}$$

Dieses Wahrscheinlichkeitsverhältnis wiederum ist die Summe aus allen Konversionskoeffizienten, die auf die einzelnen Schalen bezogen sind:

$$\alpha = \alpha_K + \alpha_L + \dots$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anregungsenergie an ein Elektron aus der K -Schale abgegeben wird, ist aufgrund der unterschiedlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten im Kern nämlich nicht gleich der Wahrscheinlichkeit, dass diese Energie an ein Elektron aus einer anderen Schale abgegeben wird. Das Verhältnis zwischen zwei solchen Koeffizienten bezeichnet man als *Konversionsverhältnis*.

1.1.4 Caesium

In diesem Experiment werden wir ^{137}Cs als β^- -Quelle verwenden. Deshalb sollen hier die wichtigsten Eigenschaften des ^{136}Cs kurz angerissen werden.⁵

- ^{137}Cs ist ein β^- -Strahler
- ^{137}Cs besitzt zwei Zerfallskanäle: Zu ca. 93,5% zerfällt es in einen angeregten Zustand von ^{137}Ba , der dann über γ -Strahlung oder innere Konversion in den Grundzustand übergeht. Zu den verbleibenden 6,5% zerfällt es direkt in den Grundzustand des ^{137}Ba . Die Energien der Zerfälle betragen 512 keV im ersten und 1174 keV im zweiten Fall.

1.2 Experiment

1.2.1 Geiger-Müller-Zähler

Zur Detektion von Elektronen wird im Versuch ein Geiger-Müller-Zählrohr benutzt. Dieses besteht aus einem radialen, gasgefüllten Kondensator, der an einem Ende ein für Teilchen durchlässiges Eintrittsfenster besitzt. Sobald ein Teilchen in die Kammer eintritt und das Gas ionisiert, wandern die freigeschlagenen Elektronen⁶ zur Anode und lösen auf ihrem Weg dorthin weitere Elektronen-Lawinen aus, da sie im starken Feld des Kondensators innerhalb ihrer freien Weglänge auf Energien beschleunigt werden, die weitere Ionisierungen ermöglichen. Es entsteht eine Gasentladung, die von einer Elektronik gezählt werden kann.

⁴Bindungsenergie der Elektronen siehe [1], S. 247. Die niedrigste angegebene Energie der Schale soll minus 1 keV genommen werden. Der Wert für die L-Schalen wurde gemittelt.

⁵Siehe [1], Termschema auf S. 244

⁶Die ionisierten Atome sind aufgrund ihrer Masse zu langsam, um hohe Zählraten verarbeiten zu können. Sie werden hier also vernachlässigt.

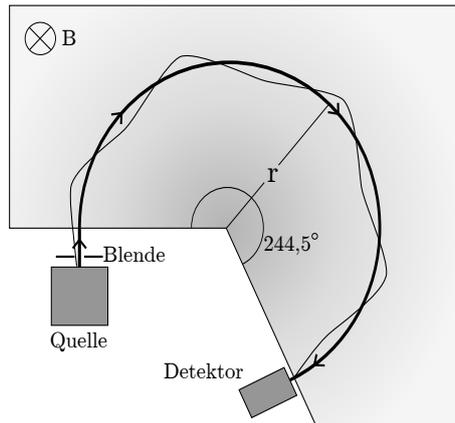


Abbildung 1.1: Versuchsaufbau

Im Geiger-Müller-Zählrohr wird im Gegensatz zum Proportionalzählrohr eine so hohe Spannung angelegt, dass die Anzahl der ausgeschlagenen Sekundärelektronen nicht von der Stärke der Primärisionisation abhängt, sondern nur noch von der Spannung, Geometrie des Rohres und vom Gas. Dadurch können die Teilchen nur gezählt und nicht mehr ihre ursprüngliche Energie bestimmt werden. Das ist in unserem Versuch aber völlig ausreichend, weil die Energie der ankommenden Elektronen hier bereits durch das Magnetfeld ausgewählt ist.

1.2.2 Aufbau und Messprinzip

In diesem Versuch soll als Erstes das Spektrum des β -Zerfalls von ^{137}Cs vermessen werden. Die Impulse der dabei entstehenden Elektronen werden dabei in einem magnetischen Spektrometer bestimmt. Dieses beruht auf dem Prinzip, dass geladene Teilchen in einem Magnetfeld, das senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung steht, abhängig von ihrer Geschwindigkeit unterschiedlich stark abgelenkt werden.

Um den Impuls von Teilchen mit bekannter Ladung und Masse zu bestimmen, werden diese Teilchen aus einer Quelle zuerst durch Blenden fokussiert und dann durch ein Magnetfeld mit bekannter Feldstärke geschossen, in welchem sie sich dann aufgrund der senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor stehenden Lorentz-Kraft auf einer Kreisbahn bewegen, bis sie auf einen fest montierten Detektor, in unserem Fall ein Geiger-Zähler, treffen. Dieser Aufbau ist in Abbildung 1.1 dargestellt.

Setzt man die Lorentz-Kraft mit der Zentripetalkraft der Kreisbahn gleich, erhält man einen Zusammenhang zwischen Impuls der Teilchen und Magnetfeld bei festem Kreisradius:

$$p = eBr$$

In einem einfachen Spektrometer ist das Magnetfeld homogen. Dies hat den Nachteil, dass nur solche Elektronen fokussiert werden, die genau parallel zur Eintrittsachse aus der Blende ins Spektrometer fliegen. Um auch solche Teilchen zu fokussieren, die davon leicht abweichen, ist das Magnetfeld in diesem Versuch nur entlang des Sollkreises homogen und fällt rotationssymmetrisch nach außen ab. Dies hat zur Folge, dass Elektronen mit dem gleichen Impuls, den die Elektronen auf der Sollkreisbahn aufweisen, um selbige Schwingungen durchführen und sie an bestimmten Punkten schneiden, sofern sie nur mit kleinen Winkeln davon abweichen.

Da für die Schnittwinkel der radial und axial verschobenen Elektronen die Beziehung⁷

$$\frac{1}{\Phi_r^2} + \frac{1}{\Phi_z^2} = \frac{1}{\pi^2}$$

gilt, werden bei einem Winkel von $\Phi = \pi \cdot \sqrt{2} \approx 244,5^\circ$ alle geringfügig vom Sollkreis abweichenden Teilchen auf diesen fokussiert. Mit dieser Methode werden möglichst viele Elektronen mit dem Impuls p detektiert.

Das Magnetfeld im Spektrometer muss, um die entsprechenden Differentialgleichungen zu erfüllen⁸, nach außen mit der Wurzel des Abstandes abnehmen. Das Spektrometer im Praktikum erfüllt diese Eigenschaft leider nicht ganz, sodass sich der optimale Winkel für den Detektor bei $\Phi = 235^\circ$ befindet.

Da weder die fokussierende Blende noch der Detektor punktförmig sind, sondern unter einem endlichen Raumwinkel erscheinen, haben die am Zählrohr detektierten Teilchen nicht genau diesen Impuls, sondern ihr Impuls befindet sich innerhalb eines bestimmten Intervalls Δp . Die relative Unsicherheit des Impulses ist dabei die gleiche wie die des Bahnradius, welche konstant ist und nur von der Beschaffenheit der Messapparatur abhängt, sodass die Breite Δp des nachgewiesenen Impulsspektrums wiederum proportional zum Impuls ist:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{p} &= \frac{\Delta r}{r} \\ \Rightarrow \Delta p &= \frac{\Delta r}{r} \cdot p \end{aligned}$$

Dies muss im aufgenommenen Spektrum korrigiert werden, indem die Zählraten in den einzelnen Bins durch den (reduzierten) Impuls geteilt werden.

1.2.3 Durchführung

Zu Beginn wird ohne Magnetfeld eine Messung der Hintergrundstrahlung durchgeführt, die später von den Ergebnissen abgezogen wird.

Die Durchführung des eigentlichen Versuchs besteht in der Aufnahme des Zerfallsspektrums einer ¹³⁷Cs-Probe. Dazu wird der Strom variiert, der das Magnetfeld im Spektrometer erzeugt, und so in Abhängigkeit vom Strom die Zählraten am Geiger-Müller-Zähler aufgenommen. Der Strom soll dabei als Spannungsabfall an einem 10 mΩ-Widerstand gemessen werden.

Die Messungen sollen in folgenden Strombereichen stattfinden:

- 1,5 A bis ungefähr 8 A in Schritten von jeweils 0,2 A. Unter 1,5 A haben die Elektronen eine so geringe Energie, dass sie bereits vor dem Zähler absorbiert werden, sodass eine Messung in diesem Bereich keinen Sinn ergibt.
- ab ca. 8 A, wo die Konversionslinien beginnen, in Schritten von jeweils 0,02 A, um diese besser auflösen zu können.

Bei jedem Messpunkt soll 60 s lang gemessen werden. Da der Eisenkern des Spektrometers einer Hysterese unterliegt, ist stets bei steigendem Magnetfeld zu messen.

⁷Siehe [1], Formel 7-41 auf S. 138

⁸Siehe [1], S. 139

1.2.4 Kurie-Plot

In diesem Versuch soll das aufgenommene Spektrum als Kurie-Plot dargestellt werden. Die Grundlage dafür ist Formel (1.3). Der Einfachheit halber werden nun jedoch dimensionslose Größen eingeführt:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{E + m_0 c^2}{m_0 c^2} & \epsilon_0 &= \frac{E_0 + m_0 c^2}{m_0 c^2} \\ \eta &= \frac{p}{m_0 c} & \Rightarrow \epsilon &= \sqrt{\eta^2 + 1} \\ G(\eta, Z) &= \frac{\eta}{\epsilon} F(E, Z) \end{aligned} \quad (1.6)$$

wobei die letzte Gleichung die reduzierte Fermi-Funktion darstellt, die vom reduzierten Impuls η und der Kernladungszahl Z abhängt und im Praktikum gut leserlich in tabellarischer Form vorliegt⁹. Für Werte, die zwischen den tabellierten Punkten liegen, wird später eine Interpolation durchgeführt. Die linearisierte Gleichung des Kurie-Plots ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} Z_k(\epsilon) &= C \cdot (\epsilon - \epsilon_0) \\ \text{mit } Z_k &= \sqrt{\frac{Z(\eta)}{\eta \epsilon \cdot G(\eta, Z)}} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Führt man für das gemessene Spektrum eine lineare Regression nach diesen Größen durch, dann lässt sich die Übergangsenergie E_0 mit Hilfe des extrapolierten Werts für ϵ_0 und (1.6) bestimmen.

1.2.5 Eichung

Der reduzierte Impuls der Teilchen ist proportional zum Strom durch die Spulen des Spektrometers, wobei die Proportionalitätskonstante nicht bekannt ist. Um einen Zusammenhang zwischen den Größen herzustellen, werden die Konversionslinien mit den Energien aus (1.4) und der Nullpunkt für eine Eichung verwendet.

Die zu den Energien gehörenden reduzierten Impulse betragen

$$\begin{aligned} \eta &\stackrel{(1.6)}{=} \sqrt{\left(\frac{E + m_0 c^2}{m_0 c^2}\right)^2 - 1} \\ \Rightarrow \eta_K &= 1,985 \\ \eta_L &= 2,054 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Mit den Werten des Spulenstroms an den jeweiligen Maxima lässt sich dann eine lineare Regression $\eta(I) = \alpha \cdot I + \beta$ durchführen.

In der Auswertung muss noch die Tatsache berücksichtigt werden, dass rund 6,5% aller Zerfälle direkt in den Grundzustand erfolgen. Da das Spektrum dieses Zerfalls im Vergleich zu dem von uns untersuchten Spektrum sehr flach sein wird, kann man es im untersuchten Bereich als konstant annehmen. Und da die Zerfallsenergie dieses Spektrums etwa doppelt so hoch ist wie im anderen, kann man zusätzlich annehmen, dass die Hälfte der Zerfälle mit dem hier untersuchten Spektrum überlagert ist und sich die andere Hälfte jenseits davon befindet. Indem man von jedem aufgenommenen Messwert 3,2% abzieht, kann das überlagerte Spektrum in erster Näherung herausgerechnet werden.

⁹Siehe [1], Anhang 2 auf S. 246

1.2.6 Konversionskoeffizienten

Da die Anzahl der Zerfälle proportional zu der Fläche unter dem Spektrum ist, lassen sich die Konversionskoeffizienten bestimmen, indem das aufgenommene Spektrum im Bereich unter $1,5 A$ aus dem Kurie-Plot extrapoliert und das Verhältnis der Flächen unter den entsprechenden Kurven gebildet wird:

$$\alpha_{K,L} = \frac{A_{K,L}}{A_{\beta} - A_K - A_L} \quad (1.9)$$

A_{β} entspricht dabei der Fläche unter dem Spektrum ohne die Konversionslinien und A_K bzw. A_L den Flächen unter den jeweiligen Konversions-Peaks. Dies ist also das Verhältnis von Anzahl Konversionen einer speziellen Schale zur Anzahl der β -Zerfälle mit anschließender γ -Emission und daher genau der Konversionskoeffizient.

Durch Vergleich der Konversionskoeffizienten und -verhältnisse mit den angegebenen Werten¹⁰ soll die Multipolordnung der emittierten γ -Strahlung bestimmt werden, aus welcher man dann den Drehimpuls und die Parität des entsprechenden Kernzustands bestimmen könnte.

¹⁰Siehe [1], Anhang 3 auf S. 247f.

2 Auswertung

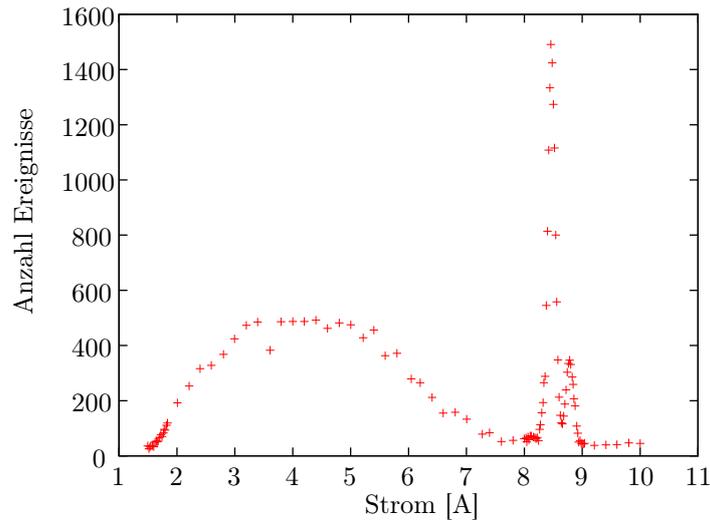


Abbildung 2.1: Unverarbeitete Daten

2.1 Durchführung

Das Spektrometer wurde – nach einem erfolglosen Versuch, ein gutes Vakuum aufzubauen, und der anschließenden Reinigung des Dichtungsringes – auf einen Druck von ca. 1,2 Torr evakuiert und zunächst ohne Probe 5 Messungen à 60 s durchgeführt, um die Hintergrundstrahlung zu vermessen. Dabei wurden 13, 23, 26, 26 und 21 Ereignisse gezählt. Bei den weiteren Rechnungen wird also eine mittlere Hintergrundstrahlung von

$$N_{back} = 21,8 \pm 4,7$$

angenommen. Danach wurde die Probe im Spektrometer platziert und der Druck erneut abgesenkt, dieses Mal etwas länger bis auf ca. 1,05 Torr. Im Laufe der Messungen ist der Druck schließlich bis auf etwa 0,3 Torr gefallen. Da einige Elektronen vom Restgas absorbiert werden, bevor sie den Detektor erreichen, ist dies eine systematische Fehlerquelle, auf die quantitativ in diesem Rahmen allerdings nicht näher eingegangen werden kann. Qualitativ lässt sich jedoch sagen, dass niederenergetische Elektronen von diesem Effekt stärker betroffen sind als höherenergetische.

Anfänglich wurde das Spektrum aufgrund eines Kommafehlers beim Umrechnen der am Messwiderstand abfallenden Spannung in die Stromstärke in 10 Mal so kleinen Schritten vermessen, wie verlangt war. Nachdem der Tutor die Experimentatoren freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht hat, fanden die Messungen dann in Abständen von 0,2 A statt. Ab einer Stromstärke von 8 A wurde wieder in Schritten von 0,02 A gemessen, bis beide Konversionlinien vermessen waren, und ganz zum Schluss noch einige Messungen bis 10 A mit größeren Abständen, um das flache Ende des Spektrums aufzunehmen. Die gemessenen Werte sind zunächst ohne weitere Korrekturen in Abbildung 2.1 aufgetragen und im Anhang A in Tabelle A.1 notiert.

2.2 Korrektur und Eichung

Von der gemessenen Ereignisanzahl wurde zunächst die mittlere Hintergrundstrahlung abgezogen, dieses Ergebnis dann durch die jeweilige Stromstärke geteilt und zum Schluss von jedem

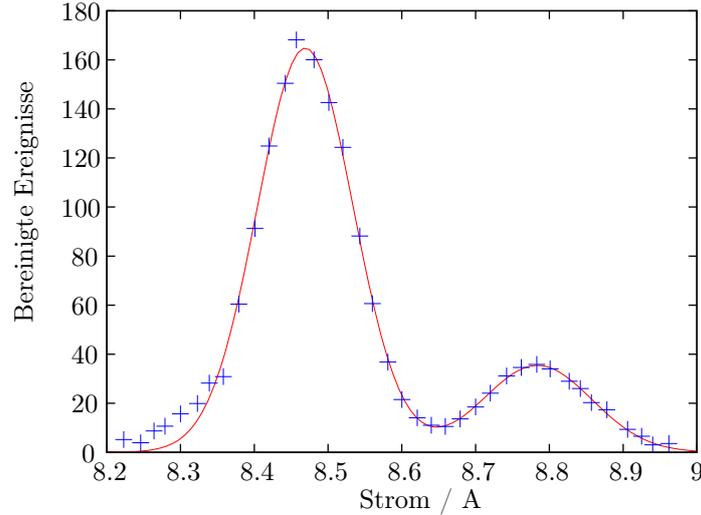


Abbildung 2.2: Gefittete Konversionslinien

Messwert 3,2% abgezogen. Es gilt also

$$Z(I) = \frac{968}{1000} \cdot \frac{N(I) - N_{back}}{I}$$

Darin sind zwei fehlerbehaftete Größen enthalten: die Zählrate $N(I)$ und die Hintergrundstrahlung N_{back} . Erstere ist eine poissonverteilte Größe, sodass sich ihr statistischer Fehler durch ihre Wurzel berechnet. Der statistische Fehler eines korrigierten Messwerts beträgt nun¹

$$\Delta Z = \frac{968}{1000 \cdot I} \cdot \sqrt{N(I) + \Delta N_{back}^2}$$

Das verwendete Spannungsmessgerät ließ sich mit einer Genauigkeit von 0,1% ablesen, sodass diese Fehlerquelle vernachlässigt werden kann, ebenso wie die Genauigkeit des Messwiderstands. Die Stromstärke I wird also als exakt angenommen.

Um eine Eichung des so korrigierten Spektrums durchführen zu können, werden nun die bekannten Maxima der Konversionslinien verwendet. Zu diesem Zwecke werden die Peaks mit zwei Gauß-Kurven gefittet:

$$f_{fit}(I) = a_1 \exp\left(-0,5 \cdot \left(\frac{I - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right) + a_2 \exp\left(-0,5 \cdot \left(\frac{I - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)$$

Die Bestimmung der Fit-Parameter erfolgt mit dem Programm GNUPLOT und liefert folgende Werte:

$$\begin{aligned} a_1 &= 164,8 \pm 2,1 & a_2 &= 35,4 \pm 1,9 \\ \mu_1 &= 8,469 \pm 0,001 & \mu_2 &= 8,784 \pm 0,005 \\ \sigma_1 &= 0,065 \pm 0,001 & \sigma_2 &= 0,074 \pm 0,005 \end{aligned} \quad (2.1)$$

¹Statistische Fehler werden im Folgenden entgegen der Konvention mit Δ statt mit σ bezeichnet, um eine Verwechslung mit der Standardabweichung der später interpolierten Gaußkurven zu vermeiden.

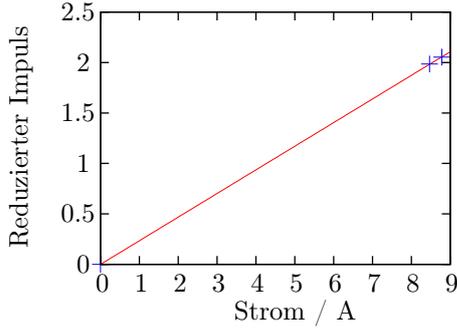


Abbildung 2.3: Eichpunkte

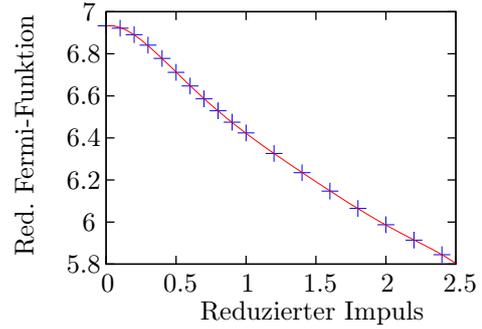


Abbildung 2.4: Interpolierte Fermi-Funktion

Die Messwerte und die extrapolierte Kurve sind in Abbildung 2.2 dargestellt und zeigen, dass die Funktion den Verlauf der Punkte sehr gut beschreibt.

Die Erwartungswerte der Kurven μ_1, μ_2 entsprechen nun den Stromstärken an den Maxima, mit welchen – zusammen mit den theoretischen Werten des reduzierten Impulses in (1.8) und dem Nullpunkt – eine lineare Funktion $\eta(I)$ extrapoliert wird:

$$\eta(I) = (0,2341 \pm 0,0003) \cdot I + (9,1 \cdot 10^{-31} \pm 3,7 \cdot 10^{-5}) \quad (2.2)$$

An den kleinen Fehlern und dem verschwindend kleinen Ordinatenabschnitt kann man erkennen, dass der lineare Zusammenhang zwischen Stromstärke und reduziertem Impuls hervorragend gilt, siehe hierzu auch Abbildung 2.3. Bei den weiteren Rechnungen werden der Ordinatenabschnitt und der Steigungsfehler aufgrund ihrer Kleinheit vernachlässigt.

Mit dieser Eichung wird das korrigierte Spektrum nun in reduzierte Impulse transformiert, was im Anhang A in Abbildung A.1 dargestellt ist.

2.3 Kurie-Plot

Da die reduzierte Fermi-Funktion nur für einzelne Punkte gegeben ist und unsere Messpunkte meist zwischen diesen liegen, wird die Funktion mit einem Polynom sechsten Grades interpoliert, siehe hierzu Abbildung 2.4. Die von GNU PLOT berechneten Koeffizienten für

$$G_{fit}(\eta, Z = 56) = a\eta^6 + b\eta^5 + c\eta^4 + d\eta^3 + e\eta^2 + f\eta + g$$

finden sich ohne weitere Rundung im Anhang A in Tabelle A.2. In Anbetracht der im Vergleich zu anderen Fehlern äußerst kleinen Abweichung dieser interpolierten Kurve wird diese Funktion als nicht fehlerbehaftet angenommen. Damit wird nun in Abbildung 2.5 der Kurie-Plot $Z_k(\epsilon)$ nach Gleichung (1.7) aufgetragen. Der Fehler auf die Größe Z_k berechnet sich durch den Fehler auf die reduzierte Zählrate in folgender Weise:

$$\Delta Z_k = \frac{1}{2\sqrt{Z(\eta)\eta\epsilon \cdot G(\eta)}} \Delta Z$$

Im Kurie-Plot sieht man deutlich, dass die Werte bei kleinen Impulsen stark von der erwarteten Geraden abweichen, was in erster Linie an dem am Anfang höheren Restdruck im Spektrometer und der Tatsache liegt, dass langsamere Teilchen ohnehin leichter absorbiert oder abgelenkt werden, bevor sie am Detektor ankommen, sodass die zu niedrigen Zählraten am Anfang des Spektrums nicht weiter verwunderlich sind.

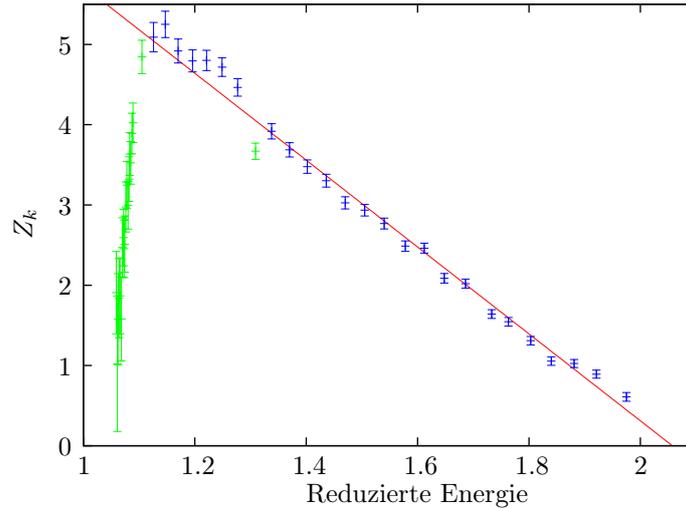


Abbildung 2.5: Kurie-Plot und lineare Interpolation

2.4 Übergangsenergie

Für die geforderte lineare Regression des Kurie-Plots werden aufgrund der starken Abweichung der Anfangswerte nur die Werte ab $\epsilon \approx 1,15$ benutzt. Ein weiteres Wertepaar bei $\epsilon = 1,309$ wird ebenfalls nicht zu dieser Berechnung herangezogen, da der Wert für Z_K an dieser Stelle um ca. 10% vom später interpolierten Wert abweicht. Die Ausgleichsgerade ist in Abbildung 2.5 dargestellt, wobei die blau markierten Messpunkte diejenigen sind, die zu ihrer Berechnung herangezogen wurden. Die Steigung m und der Ordinatenversatz b werden von GNUPLLOT auf

$$m = -5,41 \pm 0,11 \quad b = 11,14 \pm 0,19 \quad (2.3)$$

berechnet. Der Schnittpunkt mit der Energieachse befindet sich damit bei

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= -\frac{b}{m} = 2,059 \\ (\Delta\epsilon_0)^2 &= \frac{1}{m^2}(\Delta b)^2 + \frac{b^2}{m^4}(\Delta m)^2 \\ \Rightarrow \Delta\epsilon_0 &= 0,055 \end{aligned}$$

Dieser Wert wird nun mit (1.6) in eine einheitenbehaftete Energie zurückgerechnet, die der gesuchten Übergangsenergie des β -Zerfalls entspricht:

$$\begin{aligned} E_0 &= m_0c^2 \cdot (\epsilon_0 - 1) \\ \Delta E_0 &= m_0c^2 \cdot \Delta\epsilon_0 \end{aligned}$$

Mit dem Literaturwert² für die Ruhemasse des Elektrons $m_0c^2 = 511 \text{ keV}$ ergibt dies letztendlich

$$E_0 = (541 \pm 28) \text{ keV}$$

Der Literaturwert für die Übergangsenergie liegt bei 512 keV und damit etwa eine Standardabweichung unter unserem Messwert. Es ist jedoch nicht verwunderlich, dass unser Messwert zu

²Siehe [2]

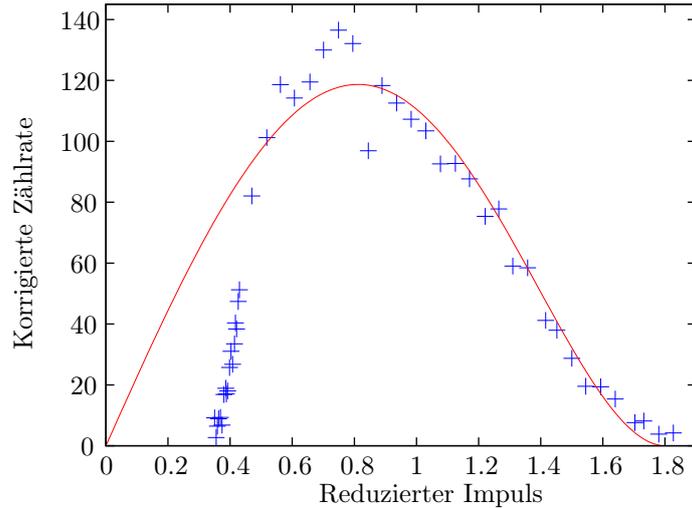


Abbildung 2.6: Aus Kurie-Plot interpoliertes β -Spektrum

hoch ausfällt, da das in den Berechnungen vernachlässigte Restgas im Spektrometer vor allem am unteren Ende des Spektrums die Zählrate beeinflusst, sodass das Spektrum etwas zu den hohen Energien hin verzerrt ist.

2.5 Konversionskoeffizienten

Die Fläche unter dem β -Spektrum lässt sich aus den Messdaten nicht ohne Weiteres bestimmen, da der Anfang des Spektrums nicht vermessen wurde und die aufgenommenen Messwerte bis zu einem gewissen Impuls offenbar durch das Restgas verfälscht sind. Aus diesem Grund wird aus dem Kurie-Plot das ganze Spektrum interpoliert. Dazu wird die Gleichung (1.7) nach der bereinigten Zählrate aufgelöst und die extrapolierten Werte für Steigung und Ordinatenabschnitt aus (2.3) sowie die Beziehung zwischen reduzierter Energie und Impuls aus (1.6) eingesetzt:

$$Z(\eta) = \left(b - m\sqrt{\eta^2 + 1} \right)^2 \cdot \eta\sqrt{\eta^2 + 1} G(\eta)$$

In Abbildung 2.6 ist die so interpolierte Kurve mit den Messdaten zusammen aufgetragen. Man sieht auch hier deutlich die zu niedrigen Messraten bei niedrigen Energien. Zur Flächenbestimmung wird nun die hergeleitete Formel mit den extrapolierten Parametern benutzt. Da diese Funktion analytisch nur mit größerem Aufwand integrierbar ist, wird ein numerisches Verfahren mit MATHEMATICA verwendet. Dieses ergibt

$$A_{\beta} = \int_0^{1,786} Z(\eta) d\eta \approx 124,2$$

Da hier die fehlerbehafteten Größen m und b einfließen, ist auch diese Fläche mit einem Fehler behaftet. Aufgrund der numerischen Berechnung kann dieser allerdings nicht durch eine Fehlerfortpflanzung berechnet werden. Es muss also eine Abschätzung gemacht werden, wie abhängig der Wert von A_{β} von Änderungen der Parameter ist. Dazu werden für m und b Werte im Abstand einer Standardabweichung angenommen und das Integral neu berechnet. Für $m = -5,41 - 0,11$

wird $A_\beta \approx 113$, für $b = 11,41 + 0,19$ ergibt sich ein Wert von $A_\beta \approx 139$. Die mittlere Abweichung in diesen Fällen beträgt $\Delta A_1 = 13$. Die größten Abweichungen ergeben sich, wenn für m größere und für b kleinere Werte eingesetzt werden (und andersherum analog); sie betragen dann $\Delta A_2 \approx 25$. Aufgrund der (angenommenen) Gaußverteilung dieser Parameter um den jeweiligen Mittelwert und ihrer (angenommenen) Unabhängigkeit ist die Wahrscheinlichkeit für den wahren Wert am Rand der Standardabweichungen beider Parameter allerdings kleiner als die 68%-Grenze, die für einen einheitlichen Fehler auf A eine Standardabweichung ausmachen würde. Daher wird der Fehler für A auf einen Wert zwischen ΔA_1 und ΔA_2 geschätzt. Im Folgenden wird also

$$\Delta A_\beta = 19$$

angenommen.

Die Bestimmung der Flächen unter den Konversionslinien erfolgt ebenfalls über Integration der extrapolierten Funktion. In der Messung überlappen sich die Funktionen, was eine direkte Bestimmung der jeweiligen Flächen erschwert, mit dieser Methode allerdings kein Problem darstellt, weil einfach nur über die jeweilige Gauß-Kurve integriert werden muss. Die Fläche unter einer Gaußkurve beträgt:

$$A_G = \int_{-\infty}^{\infty} a \exp\left(-0,5 \cdot \left(\frac{\eta - \mu}{\sigma}\right)^2\right) d\eta$$

Nach der Substitution

$$\begin{aligned} u &= \frac{\eta - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \\ \Rightarrow d\eta &= \sqrt{2}\sigma du \end{aligned}$$

wird dies zu

$$A_G = a\sigma\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = a\sigma\sqrt{2\pi}$$

Die Fehlerfortpflanzung für diese Größe ergibt sich folgendermaßen:

$$(\Delta A_G)^2 = 2\pi \cdot (\sigma^2(\Delta a)^2 + a^2(\Delta\sigma)^2)$$

Die in (2.1) gewonnenen Parameter σ_i müssen aufgrund der unterschiedlichen Eichung erst mit (2.2) in reduzierte Impulse umgerechnet werden. Die Flächen betragen dann

$$A_K = 164,8 \cdot 0,065 \cdot 0,234 \cdot \sqrt{2\pi} = 6,29$$

$$A_L = 35,4 \cdot 0,074 \cdot 0,234 \cdot \sqrt{2\pi} = 1,54$$

und die Abweichungen

$$\Delta A_K = \sqrt{2\pi \cdot 0,234^2 \cdot ((0,065 \cdot 2,1)^2 + (164,8 \cdot 0,001)^2)} = 0,126$$

$$\Delta A_L = \sqrt{2\pi \cdot 0,234^2 \cdot ((0,074 \cdot 1,9)^2 + (35,4 \cdot 0,005)^2)} = 0,133$$

Mit diesen Werten und der Gleichung (1.9) können nun die Konversionskoeffizienten der K - und L -Schalen berechnet werden:

$$\alpha_K = \frac{A_K}{A_\beta - A_K - A_L} = 0,054$$

$$\alpha_L = \frac{A_L}{A_\beta - A_K - A_L} = 0,013$$

Mit den Fehlern

$$(\Delta\alpha_K)^2 = \frac{1}{(A_K + A_L - A_\beta)^4} \cdot \left[(A_\beta - A_L)^2 (\Delta A_K)^2 + A_K^2 (\Delta A_\beta)^2 + A_K^2 (\Delta A_L)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \Delta\alpha_K = 0,009$$

$$\Delta\alpha_L = 0,002$$

Das Konversionsverhältnis beträgt demnach

$$\frac{\alpha_K}{\alpha_L} = 4,15$$

Mit einer Standardabweichung von

$$\left(\Delta \frac{\alpha_K}{\alpha_L} \right)^2 = \frac{1}{\alpha_L^2} (\Delta\alpha_L)^2 + \frac{\alpha_K^2}{\alpha_L^4} (\Delta\alpha_L)^2$$

$$\Rightarrow \Delta \frac{\alpha_K}{\alpha_L} = 1,01$$

Das Ergebnis der Messungen lautet also insgesamt

$\alpha_K = 0,054 \pm 0,009$
$\alpha_L = 0,013 \pm 0,002$
$\frac{\alpha_K}{\alpha_L} = 4,2 \pm 1,0$

Zum Vergleich dieser Messwerte mit den theoretischen Werten müssen die tabellierten Werte für eine Energie von $E_\gamma = 662 \text{ keV}$ durch lineare Extrapolation benachbarter Werte gewonnen werden. In Tabelle 2.1 sind die so interpolierten Konversionskoeffizienten für die entsprechenden Schalen notiert.

Die Konversionskoeffizienten passen dabei am Besten zum Übergang M3 mit $\alpha_{K,M3} = 0,048$ und $\alpha_{L,M3} = 0,008$. Die Abweichungen davon betragen 12,5% bzw. 16,25% und liegen zumindest in der K-Schale sogar in der Fehlertoleranz. Das theoretische Konversionsverhältnis beträgt für diesen Übergang

$$\frac{\alpha_{K,M3}}{\alpha_{L,M3}} = 6,00$$

was allerdings um zwei Standardabweichungen vom gemessenen Wert abweicht.

Tabelle 2.1: Interpolierte theoretische Konversionskoeffizienten

Schale	Übergang	1	2	3	4
K	E	1,69 (-3)	4,61 (-3)	1,15 (-2)	2,69 (-2)
	M	6,61 (-3)	7,29 (-2)	4,88 (-2)	1,24 (-1)
L	E	2,11 (-4)	6,75 (-4)	2,20 (-3)	7,59 (-3)
	M	9,08 (-4)	2,77 (-3)	8,14 (-3)	2,48 (-2)

Aus der Theorie³ ist bekannt, dass dieser Übergang vom Typ M4 sein sollte. Die theoretischen Koeffizienten für diesen Übergang weichen allerdings um einen Faktor von ca. 2 von den gemessenen ab und liegen damit weit außerhalb der statistischen Toleranz. Das theoretische Konversionsverhältnis beträgt hier:

$$\frac{\alpha_{K,M4}}{\alpha_{L,M4}} = 5,00$$

Dieser Wert passt wiederum zum experimentellen wesentlich besser, er weicht nur noch um eine Standardabweichung ab. Dies weist auf einen unbekanntem systematischen Fehler hin, der sich in den Einzelwerten zwar niederschlägt, jedoch im Verhältnis herausgekürzt wird. Abschließend lässt sich hierzu sagen, dass die Genauigkeit des Experiments offenbar nicht ausreicht, um klar zu entscheiden, von welcher der beiden Multipolordnungen dieser Übergang nun ist.

³Siehe [1], Termschema auf S. 244

A Anhang

Tabelle A.1: *Unverarbeitete Messwerte*

I/A	N	I/A	N	I/A	N	I/A	N	I/A	N
1,495	36	2,595	328	6,806	158	8,323	193	8,742	303
1,517	26	2,805	368	7,004	133	8,339	265	8,762	335
1,532	32	2,995	424	7,275	79	8,358	288	8,783	347
1,550	36	3,199	473	7,398	84	8,379	545	8,801	331
1,577	37	3,394	485	7,605	52	8,401	814	8,827	286
1,599	33	3,609	383	7,804	56	8,420	1108	8,842	259
1,622	50	3,798	486	7,999	62	8,442	1334	8,857	207
1,649	54	4,000	487	8,028	65	8,457	1491	8,878	181
1,659	51	4,199	487	8,043	51	8,481	1424	8,906	108
1,675	53	4,401	492	8,064	68	8,501	1274	8,925	82
1,701	67	4,601	462	8,080	58	8,520	1116	8,940	50
1,721	77	4,804	482	8,100	72	8,543	800	8,962	55
1,742	70	5,003	475	8,122	72	8,560	558	8,983	45
1,769	83	5,217	428	8,157	68	8,581	348	9,000	44
1,780	96	5,402	456	8,181	67	8,600	213	9,021	43
1,797	93	5,597	363	8,201	62	8,621	147	9,041	45
1,821	111	5,800	372	8,223	66	8,640	120	9,209	38
1,837	119	6,048	279	8,246	55	8,659	116	9,411	40
2,008	192	6,201	265	8,264	96	8,679	144	9,600	41
2,211	253	6,407	212	8,279	113	8,700	188	9,804	47
2,401	316	6,599	155	8,300	156	8,720	239	10,001	45

Tabelle A.2: *Fit-Parameter der reduzierten Fermi-Funktion*

Param.	Wert	\pm	Param.	Wert	\pm
a	-0,059432	0,006383	b	0,49990	0,04557
c	-1,6464	0,1229	d	2,6604	0,1555
e	-2,07582	0,09251	f	0,11147	0,02264
g	6,93203	0,00167			

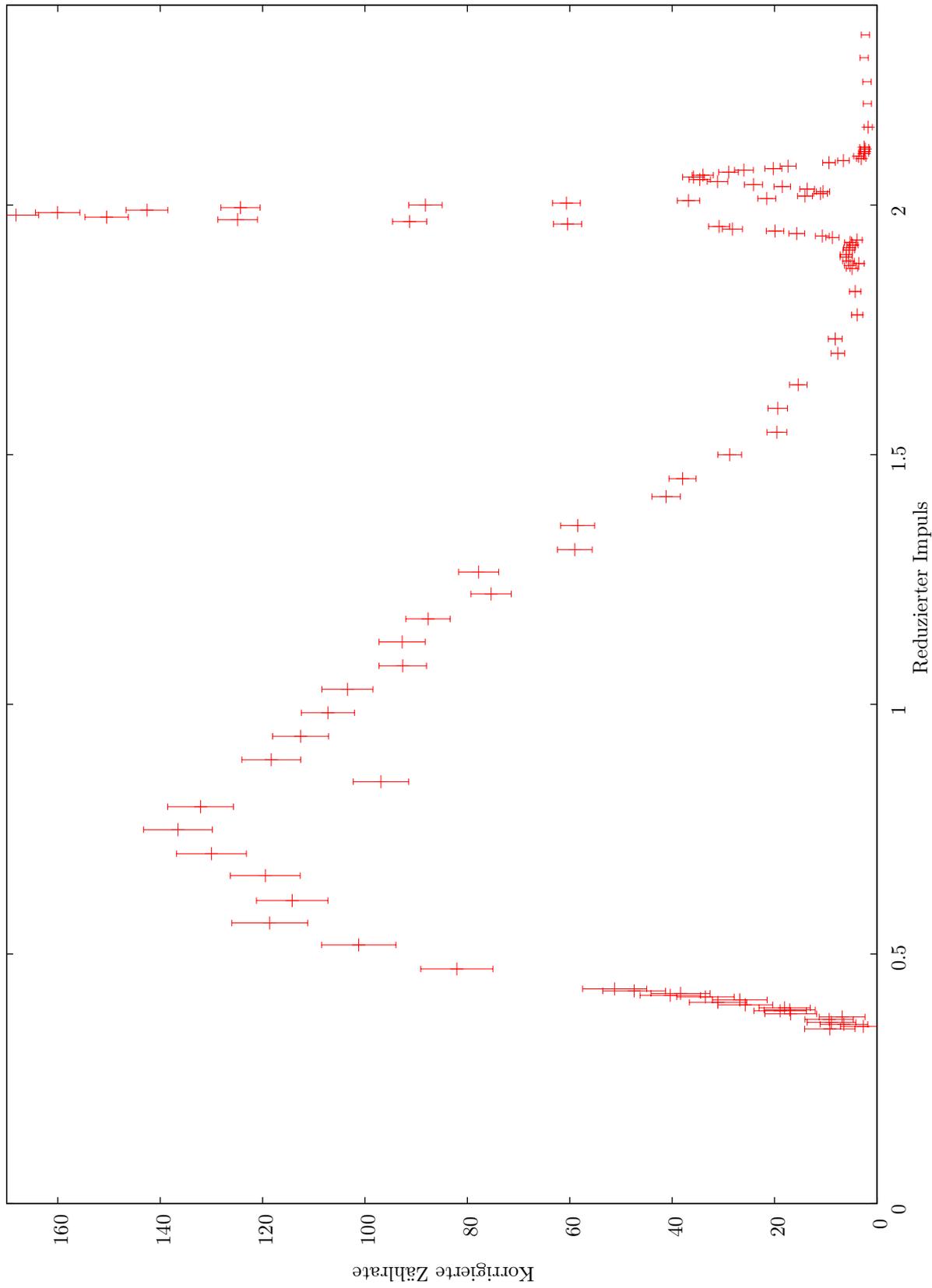


Abbildung A.1: Tatsächliches Impulsspektrum

Literaturverzeichnis

- [1] F. K. SCHMIDT: *Einführung in das Kernphysikalische Praktikum*.
Institut für Experimentelle Kernphysik der Universität Karlsruhe, 2009
- [2] K. NAKAMURA ET AL. (PARTICLE DATA GROUP): *Particle Data Book*.
Journal of Physics G 37, 075021, 2010