Fakultät für Physik
Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene

Eigenschaften der Elementarteilchen

Kevin Edelmann, Julian Stöckel
Gruppe 109

3.11.2010

Zusammenfassung

Anhand von Detektorsignaturen von Z^0-Zerfällen aus e^+e^--Kollisionen, die vom Delphi-Detektor am Cern aufgenommenen wurden, sollen in diesem Versuch Grundlagen der Event-Klassifikation und der Bestimmung elementarer Parameter aus entsprechenden Zählraten vermittelt werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitung

1.1 Theoretische Grundlagen

1.1.1 Teilchenzoo

Die Elementarteilchen können nach verschiedenen Eigenschaften in verschiedene Familien einsortiert werden. Als erstes Merkmal dient hierzu der Spin: Teilchen mit halbzahligem Spin sind sogenannte „Fermionen“ wohingegen man bei ganzzahligem Spin von „Bosonen“ spricht. Diese Charakterisierung gewinnt durch die grundlegend verschiedenen Verhaltensweisen von Ensembles von Bosonen bzw. Fermionen an Wichtigkeit: Bei Bosonen kann der gleiche Quantenzustand von mehreren Teilchen besetzt werden, da ihr Eigenwert des Austauschoperators $+1$ ist. Der Eigenwert von Fermionen ist jedoch -1, was zum Pauliverbot führt: Zwei Fermionen können niemals denselben Quantenzustand haben. Bei den Fermionen unterscheidet man dann „Leptonen“, die bislang als punktförmig angenommen werden und nicht weiter zerteilt werden können, sowie „Hadronen“, deren Radius etwa $10^{-15}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{f}$ beträgt. Die Hadronen bestehen aus „Quarks“, die mithilfe der starken Wechselwirkung interagieren. Es sind bislang sechs Quarksorten nachgewiesen worden: up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b) und top (t). Hadronen, die aus drei Quarksorten bestehenen heißen „Baryonen“, während aus zwei Quarks aufgebaute Hadronen „Mesonen“ genannt werden. Als Leptonen kennt man das Elektron, das Myon und das Tauon, die jeweils eine negative elektrische Ladung tragen, sowie dazu jeweils ein Neutrino.

Letztendlich kennt man bisher also zwölf Elementarteilchen, die in drei Familien organisiert werden. Die Teilchen einer höheren Familie verhalten sich im Allgemeinen ihren Gegenstücken aus den niedrigeren Familien ähnlich, jedoch ist ihre Masse größer (was manchmal an sich schon zu anderem Verhalten führt) und abgesehen von den Neutrinos sind alle Teilchen der höheren Familien instabil.

Zu jedem Teilchen gibt es außerdem noch ein entsprechendes Antiteilchen mit entgegengesetzter Ladung.

1.1.2 Z^0 Ereignisse

Als Z^0 Ereignisse bezeichnet man die Elektron-Positron-Annihilationen, bei denen ein Z^0-Boson entsteht, das in ein Teilchen-Antiteilchen-Paar zerstrahlt. Dieses Teilchen-Antiteilchen-Paar kann entweder leptonisch oder hadronisch sein, wobei beim hadronischen Zerfall aufgrund der zu geringen Energie kein Top-Antitop-Paar entstehen kann. Diese unterscheiden sich deutlich in den Signaturen im Detektor.

Beim hadronischen Zerstrahlen der Z^0 kann es desweiteren noch zu einem „3-Jet Ereignis“ kommen, wobei neben dem Quark-Antiquark-Paar noch ein Gluon entsteht, das dann weiter zerfällt und einen eigenen Teilchenschauer erzeugt. Die Energie der starken Wechselwirkung nimmt mit dem Abstand des Paares zu. Mit der anwachsenden Energie können in dem Kraftfeld neue Teilchen entstehen. Dies sind häufig weitere Quark-Antiquark-Paare, die sich mit den

Tabelle 1.1: *Die bekannten Elementarteilchen*

	1. Familie	2. Familie	3. Familie	Eichbosonen
Quarks	up	strange	top	Photon
	down	charm	bottom	Gluon
Leptonen	elektron	myon	tauon	$W^{\pm}$
	e-Neutrino	μ-Neutrino	τ-Neutrino	Z^0

ursprünglich entstandenen vorzugsweise zu Mesonen verbinden. Diese Mesonen sind nicht stabil und zerfallen selbst wieder, was einen Teilchenschauer in der Richtung des ursprünglichen entstandenen Quarks auslöst. Einen solchen Teilchenschauer nennt man Jet. Entsteht nun in aus der Wechselwirkungsenergie ein Gluon, so ist in der Signatur des Ereignisses ein dritter Jet zu verzeichnen. Selten kommen auch mehr-Jet Ereignisse vor.

Da die Teilchenschauer selbst auseinanderlaufend sind, muss der Abstand zwischen zwei Jets groß genug sein, um sie separieren zu können. Als Maß dafür, wie gut zwei Jets separiert werden können, dient der Jetauflösungparameter y, der als Quotient der invarianten Masse und der Schwerpunktsenergie der beiden Jets definiert ist:

$$y = \frac{M_{ij}^2}{s}$$

Ist $y > y_{Cut}$ gelten die Jets als aufgelöst, wobei y_{Cut} ein Erfahrungswert ist.

1.1.3 Delphi-Detektor

Der Delphi-Detektor verfügte über vier Detektorkomponenten, und war somit in der Lage, alle Elementarteilchen ausgenommen der nur schwach Wechselwirkenden Neutrinos zu detektieren.

Im Innersten des Detektors befindet sich das Strahlrohr, in dem die Kollisionen stattfinden. Das Strahlrohr ist von der Spurenkammer umgeben, die die Bahnen durchlaufender ionisierender Teilchen, wie zum Beispiel Elektronen, Hadronen und Myonen (aber keine Photonen), aufzeichnet. Die nächste Detektorebene ist ein elektromagnetisches Kalorimeter, welches die Energie von Elektronen, Positronen und Photonen misst.

Anschließend durchlaufen die verbleibenden Teilchen ein hadronisches Kalorimeter, das die Energie von Hadronen anhand ihrer inelastischen Stöße mit dem Kalorimetermaterial bestimmt.

Schließlich endet der Aufbau mit einer Myonenkammer, worin auch die Energie der Myonen vermessen wird.

1.2 Versuchsdurchführung

Da ein Experiment dieses Ausmaßes mitsamt dem Teilchenbeschleuniger schwerlich auf den Campus, geschweige denn in den Physik-Flachbau passen würde, gilt es hier nur noch, die vom Cern erhaltenen Daten auszuwerten. Es liegen 1000 Z^0-Ereignisse vor, die zunächst kategorisiert werden müssen. Hierbei sind die drei leptonischen Zerfälle von den gewöhnlichen 2-Jet und den 3 und Mehr-Jet-Ereignissen zu trennen.

1.2.1 Kategorisierung der Ereignisse

Elektron-Positron-Zerfall

Bei diesem leptonischen Zerfall des Z^0 Bosons entstehen ein Elektron und ein Positron, die in einem Winkel von 180° vom Kollisionspunkt weg fliegen, eine Spur in der Spurenkammer hinterlassen und ihre Energie im elektromagnetischen Kalorimeter abgeben.

Myonischer Zerfall

Dies ist ebenfalls ein leptonischer Zerfall, bei dem ein $\mu^+\mu^-$-Paar entsteht. Diese beiden Teilchen fliegen wie beim e^+e^--Zerfall entgegengesetzt vom Kollisionspunkt weg und hinterlassen jeweils eine Spur in der Spurenkammer. Allerdings fliegen die Myonen ungebremst durch das elektromagnetische und das hadronische Kalorimeter durch und werden erst in der äußersten Lage, der Myonenkammer, gemessen, sodass dieser Zerfall einfach vom elektronischen Zerfall zu unterscheiden ist.

Tauonischer Zerfall

Die bei diesem Zerfall entstehenden τ-Leptonen zerfallen wegen ihrer extrem kurzen Lebensdauer, noch bevor sie den Detektor erreicht haben, sodass dort nur die Zerfallsprodukte gemessen werden können. Bei den meisten möglichen Zerfallsprozessen entstehen unter anderem Neutrinos, die eine nicht vernachlässigbare Menge an Energie tragen, aber wegen ihrer äußerst schwachen Wechselwirkung mit Materie nicht vom Detektor gemessen werden. Daher wird die in den Kalorimetern gemessene Gesamtenergie erheblich kleiner sein, als die Energie, die ursprünglich bei der Kollision frei wurde.

Mögliche Zerfallsreaktionen sind zum Beispiel, wenn das eine Tauon in ein Myon zerfällt und das andere in ein Elektron. Allerdings sind auch hadronische Zerfälle möglich. Da bei der Entstehung der Neutrinos allerdings viel Energie verloren ging, werden hier nur einzelne, energiearme Spuren zu sehen sein.

Hadronische Zerfälle

Wenn das Z^0-Boson in Hadronen zerfällt, entstehen ganze Teilchenschauer in der Richtung, in die die bei der Kollision entstandenen Quarks davon gefolgen sind, und welche ihre Energie hauptsächlich im Hadronenkalorimeter abgeben. Enge, energiereiche Bündel werden als Jets aufgefasst, wobei die Einteilung und vor allem auch die Zählung der Jets subjektiv erfolgt und wegen der Möglichkeit, eng beieinander liegende Jets nicht immer auflösen zu können, fehleranfällig ist.

Bei der Einteilung der Jets sollten einzelne, energiearme Spuren, die im Falle eines geladenen Teilchens an der starken Bahnkrümmung erkennbar sind, vernachlässigt werden.

Kategorisiert werden die Ereignisse in 2- und 3-Jet-Ereignisse. Dabei sollen Ereignisse, in denen mehr als 3 Jets gezählt werden, als 3-Jet-Ereignisse kategorisiert werden, weil bei diesen ebenfalls mindestens ein Gluon entstanden ist und die Wahrscheinlichkeit für die Entstehung eines solchen später bestimmt werden soll.

1.2.2 Anzahl der Farbladungen der starken Wechselwirkung

Bestimmung des Verzweigungsverhältnisses

Es soll das Verzweigungsverhältnis, also das Verhältnis der Zerfallsbreiten von hadronischen zu leptonischen Zerfällen, bestimmt werden:

$$R = \frac{\Gamma_{\text{Hadr}}}{\Gamma_{\text{Lept}}} \tag{1.1}$$

Da die Zerfallsbreite Γ proportional zur Anzahl der Ereignisse ist und die entsprechenden Faktoren im Zähler und Nenner identisch sind, lässt sich dieses Verhältnis auch schreiben als Quotient der Ereignisanzahlen, wobei Leptonuniversalität angenommen werden soll, sprich $\Gamma_{\text{Lept}} = \frac{1}{3} \cdot (\Gamma_{e\bar{e}} + \Gamma_{\mu\bar{\mu}} + \Gamma_{\tau\bar{\tau}})$:

$$R = 3 \cdot \frac{N_{\text{Hadr}}}{N_{\text{Lept}}} \tag{1.2}$$

Dazu sollen zunächst 100 Ereignisse klassifiziert und dann abgeschätzt werden, wie viele man insgesamt benötigt, um R auf ca. 15% genau bestimmen zu können. Dazu kann man wie folgt vorgehen: aus dem Verhältnis hadronischer und leptonischer Zerfälle in diesen 100 Ereignissen berechnet man einen vorläufigen Wert für R. Der statistische Fehler einer Zählung von n Ereignissen ist bei einer poissonverteilten Größe $\sigma_n = \sqrt{n}$ und die Fehlerfortplanzung durch den Quotienten lautet:

$$\begin{aligned}
\sigma_R &= \sqrt{\sigma^2_{N_\mathrm{Hadr}} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial N_\mathrm{Hadr}}\right)^2 + \sigma^2_{N_\mathrm{Lept}} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial N_\mathrm{Lept}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\sigma^2_{N_\mathrm{Hadr}} \cdot \left(\frac{3}{N_\mathrm{Lept}}\right)^2 + \sigma^2_{N_\mathrm{Lept}} \cdot \left(-\frac{3 \cdot N_\mathrm{Hadr}}{N^2_\mathrm{Lept}}\right)^2} \\
&= 3 \cdot \sqrt{\sigma^2_{N_\mathrm{Hadr}} \cdot \frac{1}{N^2_\mathrm{Lept}} + \sigma^2_{N_\mathrm{Lept}} \cdot \frac{N^2_\mathrm{Hadr}}{N^4_\mathrm{Lept}}} \qquad (1.3) \\
&= 3 \cdot \sqrt{\frac{N_\mathrm{Hadr}}{N^2_\mathrm{Lept}} + \frac{N^2_\mathrm{Hadr}}{N^3_\mathrm{Lept}}}
\end{aligned}$$

Dadurch hat man einen guten Eindruck, welchen Fehler man bereits auf den Wert von R hat und kann, unter der Annahme, dass die Messungen in weiteren 100er-Intervallen nicht stark von dieser abweichen, eine vernünftige Abschätzung machen, wie viele zusätzliche 100er-Intervalle gescannt werden müssen.

Bei der Berechnung des statistischen Fehlers in der Auswertung wird die Näherung $\sigma_n = \sqrt{n}$ natürlich nicht mehr verwendet, sondern die Abweichungen aus den Zählraten in den verschiedenen Intervallen gewonnen.[1]

Leptonuniversalität

Da die Kopplungskonstanten für alle Leptonen gleich und ihre Massen im Verhältnis zu der des Z^0-Bosons klein sind, sollten die Zerfallsbreiten der einzelnen Lepton-Zerfälle ebenfalls gleich sein. Dies lässt sich einfach verifizieren, indem man die Anzahlen der jeweiligen Zerfälle vergleicht, welche ähnliche Zahlenwerte ausweisen sollten:

$$N_{e\bar{e}} \approx N_{\mu\bar{\mu}} \approx N_{\tau\bar{\tau}}$$

Anzahl der Farbladungen

Der Zusammenhang zwischen der Zerfallsbreite Γ_Hadr und der Anzahl N_C der Farbladungen ist

$$\Gamma_\mathrm{Hadr} = N_C \cdot \left(N_u \cdot \Gamma^{SM}_{u\bar{u}} + N_d \cdot \Gamma^{SM}_{d\bar{d}}\right)$$

wobei die Größen folgende Bedeutungen und Werte haben:

- N_u, N_d: Anzahl an „Up“- bzw. „Down“-artigen Quarks, die beim Z^0-Zerfall entstehen können. Da nur die Entstehung eines Top-Quarks nicht möglich ist, gilt $N_u = 2$ und $N_d = 3$.

[1] Anmerkung im Nachhinein: dieses Vorgehen ist natürlich nicht korrekt. Der Fehler einer statistischen Zählvariablen ist immer durch ihre Wurzel gegeben – die Einteilung in Bins dagegen ist willkürlich, wie später auch deutlich werden wird. Wieso diese Fehlerrechnung dennoch durchgegangen ist, weiß wohl nur der Tutor.

- Die theoretischen partiellen Zerfallsbreiten für Up- bzw. Down-Quarks $\Gamma_{u\bar{u}}^{SM} = 98{,}88\,\mathrm{MeV}$ und $\Gamma_{d\bar{d}}^{SM} = 127{,}48\,\mathrm{MeV}$

Die noch unbekannte Größe Γ_{Hadr} lässt sich mit dem Ergebnis des Aufzweigungsverhältnisses und dem Literaturwert für $\Gamma_{\mathrm{Lept}} = 83{,}83\,\mathrm{MeV}$ berechnen zu:

$$\Gamma_{\mathrm{Hadr}} = R \cdot \Gamma_{\mathrm{Lept}}$$

Entsprechend eingesetzt und aufgelöst ergibt das für die Anzahl Farbladungen:

$$N_C = \frac{R \cdot \Gamma_{\mathrm{Lept}}}{N_u \cdot \Gamma_{u\bar{u}}^{SM} + N_d \cdot \Gamma_{d\bar{d}}^{SM}} \tag{1.4}$$

wobei ein Wert von $N_C = 3$ erwartet wird. Der Fehler auf unsere Messung beträgt unter der Annahme, dass die Fehler der verwendeten Literaturgrößen vernachlässigt werden können, einfach

$$\sigma_{N_C} = \sigma_R \cdot \frac{\partial N_C}{\partial R} = \sigma_R \cdot \frac{\Gamma_{\mathrm{Lept}}}{N_u \cdot \Gamma_{u\bar{u}}^{SM} + N_d \cdot \Gamma_{d\bar{d}}^{SM}} \tag{1.5}$$

1.2.3 Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung

Im Skript ist die Formel

$$\frac{N_3(y > y_{\mathrm{cut}})}{N_{\mathrm{had}}} \approx C(y > y_{\mathrm{cut}}) \cdot \alpha_S(m_Z) \quad \Leftrightarrow \alpha_S \approx \frac{N_3}{N_{\mathrm{had}} \cdot C} \tag{1.6}$$

gegeben. Man kann also aufgrund der Häufigkeit der 3-Jet-Ereignisse im Verhältnis zur Gesamtzahl der hadronischen Ereignisse auf die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung schliessen. Dies rührt daher, dass die Wahrscheinlichkeit für die Entstehung eines Gluons im Kraftfeld der auseinander fliegenden Quarks, welches für den dritten Jet verantwortlich ist, proportional zur Wechselwirkungskonstante der starken Kernkraft ist. Die Konstante C beträgt laut Vorbereitungshilfe $C = 2{,}72$.

Der statistische Fehler des Ergebnisses berechnet sich zu

$$\sigma_{\alpha_s} = \sqrt{\sigma_{N_3}^2 \cdot \left(\frac{1}{N_{\mathrm{had}} \cdot C}\right) \cdot \sigma_{N_{\mathrm{had}}}^2 \cdot \left(\frac{N_3}{N_{\mathrm{had}}^2 \cdot C}\right)} \tag{1.7}$$

1.2.4 Anzahl der Neutrinofamilien

Da der Delphi-Detektor alle entstehenden Teilchen außer Neutrinos nachweisen kann, findet man die Neutrinozerfallsbreite im Experiment als „unsichtbare“ Zerfallsbreite, d.h. als zur theoretischen Zerfallsbreite fehlenden Wert. Die theoretische Zerfallsbreite lässt sich aus der in der Vorbereitungshilfe gegebenen Formel

$$\sigma_{\mathrm{had}} = \frac{12 \cdot \pi \cdot \Gamma_{l\bar{l}} \Gamma_{\mathrm{had}}}{m_Z^2 \Gamma_{\mathrm{tot}}^2}$$

bestimmen. Vorher muss dieser Wirkungsquerschnitt allerdings um 26,3% verringert werden, weil durch Photonenabstrahlung die Schwerpunktsenergie verringert und dadurch nicht mehr genau beim Maximum des Wirkungsquerschnittes gemessen wird:

$$\sigma_{\mathrm{had}} = \frac{12 \cdot \pi \cdot \Gamma_{l\bar{l}} \Gamma_{\mathrm{had}} \cdot 0{,}737}{m_Z^2 \Gamma_{\mathrm{tot}}^2}$$

Da wir an der totalen Zerfallsbreite interessiert sind, wird diese Gleichung nach selbiger aufgelöst:

$$\Gamma_{\text{tot}} = \sqrt{\frac{12 \cdot \pi \cdot \Gamma_{l\bar{l}}\Gamma_{\text{had}} \cdot 0{,}737}{m_Z^2 \sigma_{\text{had}}}}$$

Die Größe m_Z beträgt dabei laut Vorbereitungshilfe übrigens $m_Z = 91187\,\text{MeV}$.

Einen experimentellen Wert für den Wirkungsquerschnitt erhält man mit

$$\sigma_{\text{had}} = \frac{N_{\text{had}}}{L}$$

wobei die Luminosität bei 1000 gezählten Versuchen $L = 28{,}48\,\text{nb}^{-1}$ beträgt und für N_{had} die Gesamtanzahl an hadronischen Ereignissen eingesetzt werden soll und nicht der Mittelwert aus den einzelnen Intervallen.

Die partielle Zerfallsbreite Γ_{had} lässt sich nach (1.1) nun mit dem Verzweigungsverhältnis schreiben als

$$\Gamma_{\text{had}} = R \cdot \Gamma_{l\bar{l}}$$

wobei $\Gamma_{l\bar{l}} = 83{,}83\,\text{MeV}$ als Literaturwert aus der ersten Aufgabe bekannt ist. Insgesamt beträgt die totale Zerfallsbreite also:

$$\Gamma_{\text{tot}} = \sqrt{\frac{12 \cdot \pi \cdot \Gamma_{l\bar{l}}^2 \cdot R \cdot L \cdot 0{,}737}{m_Z^2 \cdot N_{\text{had}}}}$$

Womit sich die „unsichtare“ Zerfallsbreite berechnen lässt:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{inv}} &= \Gamma_{\text{tot}} - \Gamma_{\text{had}} - 3\Gamma_{l\bar{l}} \\ &= \Gamma_{l\bar{l}} \cdot \left(\sqrt{\frac{12 \cdot \pi \cdot R \cdot L \cdot 0{,}737}{m_Z^2 \cdot N_{\text{had}}}} - R - 3 \right)\end{aligned}$$

Sie ist der Beitrag aller N_ν Neutrinofamilien zur Zerfallsbreite, demnach kann man die Zahl der Neutrinogenerationen mit Hilfe des theoretischen Werts der Zerfallsbreite für eine Neutrinogeneration berechnen:

$$\begin{aligned}N_\nu &= \frac{\Gamma_{\text{inv}}}{\Gamma_{\nu\bar{\nu}}^{\text{SM}}} \\ &= \frac{\Gamma_{l\bar{l}}}{\Gamma_{\nu\bar{\nu}}^{\text{SM}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{12 \cdot \pi \cdot R \cdot L \cdot 0{,}737}{m_Z^2 \cdot N_{\text{had}}}} - R - 3 \right)\end{aligned} \tag{1.8}$$

Wobei $\Gamma_{\nu\bar{\nu}}^{SM} = 166{,}1\,\text{MeV}$ ebenfalls aus der Literatur als bekannt vorausgesetzt wird.

Wenn man davon ausgeht, dass die Fehler der Literaturwerte vernachlässigbar sind, und daher die einzigen fehlerbehafteten Größen das Verzweigungsverhältnis und die Anzahl der hadronischen Zerfälle sind, beträgt der Fehler

$$\begin{aligned}\sigma_{N_\nu}^2 &= \sigma_R^2 \cdot \left(\frac{\partial N_\nu}{\partial R}\right)^2 + \sigma_{N_{\text{had}}}^2 \cdot \left(\frac{\partial N_\nu}{\partial N_{\text{had}}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\Gamma_{l\bar{l}}}{\Gamma_{\nu\bar{\nu}}^{SM}}\right)^2 \cdot \left[\sigma_R^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{6 \cdot \pi \cdot L \cdot 0{,}737}{m_Z^2 \cdot N_{\text{had}} \cdot R}} - 1 \right)^2 + \sigma_{N_{\text{had}}}^2 \cdot \frac{6 \cdot \pi \cdot L \cdot R \cdot 0{,}737}{m_Z^2 \cdot N_{\text{had}}^3} \right]\end{aligned} \tag{1.9}$$

2 Auswertung

2.1 Messdaten

Aufgrund der schnellen Fortschritte bei der Kategorisierung der Ereignisse wurden alle 1000 Events bearbeitet. Dabei wurden, nach 100er-Block gruppiert, folgende Häufigkeiten gezählt:

Tabelle 2.1: *Gezählte Häufigkeiten*

Serie	2-Jet	3-Jet	e^+e^-	$\mu^+\mu^-$	$\tau^+\tau^-$	Σ
1	51	28	6	4	7	96
2	54	32	2	3	5	96
3	60	29	5	2	2	98
4	54	32	7	5	1	99
5	51	35	5	3	3	97
6	57	25	5	8	1	96
7	46	36	7	2	5	96
8	59	27	6	2	3	97
9	56	32	4	3	4	99
10	58	25	8	3	5	99

In einigen Fällen konnten Ereignisse nicht kategorisiert werden, weil vom Detektor zu wenige Spuren aufgenommen wurden, um Rückschlüsse auf den Zerfallsprozess ziehen zu können. Diese Events wurden nicht mitgezählt, weshalb die Summe der Zählungen in keinem Block 100 ist.

Da die Anzahl der Leptonzerfälle in diesen Intervallen recht klein ist und die Werte daher statistisch stark schwanken, werden für die weiteren Berechnungen jeweils zwei Blöcke zusammen gerechnet, um größere Zahlen und kleinere Abweichungen zu erhalten.

Tabelle 2.2: *Kumulierte Häufigkeiten*

Serie	2-Jet	3-Jet	e^+e^-	$\mu^+\mu^-$	$\tau^+\tau^-$	Σ
1	105	60	8	7	12	192
2	114	61	12	7	3	197
3	108	60	10	11	4	193
4	105	63	13	4	8	193
5	114	57	12	6	9	198

Mithilfe von OpenOffice.org wurde auf diese Häufigkeiten ein Mittelwert und die Standardabweichung berechnet, siehe Tabelle 2.3. Dass die Gesamtanzahlen in den einzelnen Blöcken leicht unterschiedlich sind, wurde vernachlässigt, weil es sich hier nur um wenige Prozent Unterschied handelt und am Ende ein Fehler im Bereich von ca. 10% erwartet wird.

Die Einflüsse systematischer Fehler sind in diesem Rahmen nicht quantitativ beschreibbar, da uns zum Einen die systematischen Fehler des Delphi-Detektors nicht bekannt sind und zum Anderen die Verwechslung von Ereignissen beim Kategorisieren nicht quantitativ erfasst werden kann. Es wird vereinfachend angenommen, dass sich solche Fehler im statistischen Fehler niederschlagen. Ereignisse, die prinzipiell schwieriger zu erkennen sind, wie zum Beispiel tauonische Zerfälle des Z^0-Bosons, könnten allerdings durchaus systematisch zum Beispiel mit 2-Jets oder Elektronen-Ereignissen verwechselt worden sein, was nicht mehr als statistische Schwankung einginge.

Tabelle 2.3: *Mittelwerte und Standardabweichungen*

	2-Jet	3-Jet	e^+e^-	$\mu^+\mu^-$	$\tau^+\tau^-$
$\bar{x}$	109,2	60,2	11	7	7,2
σ_x	4,55	2,17	2	2,55	3,7

2.2 Anzahl der Farbladungen

2.2.1 Verzweigungsverhältnis

Für das Verzweigungsverhältnis werden die Mittelwerte aller hadronischen und aller leptonischen Ereignisse addiert und nach Formel (1.2) deren Verhältnis berechnet:

$$\begin{aligned} N_{\text{Hadr}} &= N_{\text{2Jet}} + N_{\text{3Jet}} = 169{,}4 \\ N_{\text{Lept}} &= N_{e\bar{e}} + N_{\mu\bar{\mu}} + N_{\tau\bar{\tau}} = 25{,}2 \\ &\Rightarrow R \approx 20{,}17 \end{aligned}$$

Für die Fortpflanzung der statistischen Fehler bedeutet das:

$$\begin{aligned} \sigma^2_{N_{\text{Hadr}}} &= \sigma^2_{N_{\text{2Jet}}} + \sigma^2_{N_{\text{3Jet}}} \approx 27{,}99 \\ \sigma^2_{N_{\text{Lept}}} &= \sigma^2_{N_{e\bar{e}}} + \sigma^2_{N_{\mu\bar{\mu}}} + \sigma^2_{N_{\tau\bar{\tau}}} \approx 24{,}19 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Mit Formel (1.3) kann damit dann der statistische Fehler auf das Verzweigungsverhältnis R berechnet werden:

$$\sigma_R = 3{,}98 \tag{2.2}$$

Das Gesamtergebnis für das Verzweigungsverhältnis beträgt also

$$\boxed{R = 20{,}17 \pm 3{,}98}$$

Das entspricht einem statistischen Fehler von ca. 19,7% und ist etwas höher als erwartet, was an den nach wie vor recht großen Schwankungen in den Zählungen der Leptonzerfälle liegt.

2.2.2 Leptonuniversalität

Unseren Zählungen zufolge entstanden bei den Z^0-Zerfällen zwar etwas mehr Elektronen als Myonen und Tauonen, aber die Durchschnittsanzahlen 11, 7 und 7,2 liegen in der gleichen Größenordnung und die Bereiche der Standardabweichung überschneiden sich, sodass der Unterschied durch die statistischen Schwankungen plausibel ist. Außerdem sind Ereignisse, bei denen ein Elektron-Positron-Paar erzeugt wurde, im Gegensatz zu den beiden anderen leptonischen Zerfällen sehr leicht zu erkennen und nicht mit einem 2-Jet verwechselbar. Es ist also denkbar, dass Myon- und Tau-Ereignisse übersehen wurden oder zum Beispiel Tau-Ereignisse, bei denen beide τ in jeweils ein Elektron zerfallen sind, für einen Elektronenzerfall gehalten wurden und deshalb in dieser Zählung so viele Elektronen auftauchen.

Im Rahmen der Genauigkeit kann die Leptonuniversalität also bestätigt werden.

2.2.3 Anzahl der Farbladungen

Den Formeln (1.4) und (1.5) aus der Vorbereitung zufolge beträgt mit unserem Wert für das Verzweigungsverhältnis der Wert für die Anzahl der Farbladungen und der statistische Fehler auf diese Größe:

$$\boxed{N_C = 2{,}91 \pm 0{,}57}$$

Dieser Wert entspricht sehr gut der erwarteten Größe von $N_C = 3$.

2.3 Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung

Um die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung zu berechnen, verwenden wir die Formel (1.6):

$$\alpha_S \approx \frac{N_3}{N_{\text{had}} \cdot C} = \frac{N_3}{(N_3 + N_2) \cdot C} = \frac{60{,}2}{(60{,}2 + 109{,}2) \cdot 2{,}72} = 0{,}1307$$

Als Fehler auf unserem Wert erhalten wir nach (1.7):

$$\begin{aligned}
\sigma_{alpha} &= \sqrt{\sigma_{N_3}^2 \left(\frac{1}{N_{\text{had}} \cdot C}\right)^2 + \sigma_{N_{\text{had}}}^2 \left(\frac{N_3}{N_{\text{had}}^2 \cdot C}\right)^2} \\
&= \sqrt{2{,}17^2 \cdot \left(\frac{1}{169{,}4 \cdot 2{,}72}\right)^2 + 27{,}99 \left(\frac{60{,}2}{169{,}4^2 \cdot 2{,}72}\right)^2} \\
&= 0.006
\end{aligned}$$

Wir erhalten also eine starke Wechselwirkungskonstante von

$$\boxed{\alpha_s = 0{,}131 \pm 0.006}$$

die etwas höher liegt, als die im Particle Data Book (2010) verzeichnete von $\alpha_{s_{PDB}} = 0.118$ Dennoch liegen wir nur um ca. 10% über dem Literaturwert, was unter anderem daran liegen könnte, dass wir fehlerhaft kategorisierte Tauon-Zerfälle und systematische Fehler der Messmethode am Delphi-Detektor nicht berücksichtigt haben.

2.4 Anzahl der Neutrinofamilien

Beim Einsetzen der Werte in Formel (1.8) muss darauf geachtet werden, dass alle Einheiten in MeV umgerechnet werden. Bei der Luminosität, welche in der Einheit nb^{-1} gegeben ist, ist diese Umrechnung ebenfalls möglich, da alle Einheiten in natürlichen Einheiten gegeben sind. Es gilt also:

$$10^{-15}\,\text{m} = \frac{1}{197{,}5\,\text{MeV}}$$

$$\Rightarrow 1\,\text{m}^2 = \frac{10^{30}}{3{,}9 \cdot 10^4\,\text{MeV}^2}$$

mit

$$1\,\text{nb}^{-1} = \frac{10^9}{10^{-28}\,\text{m}^2} = \frac{10^{37}}{\text{m}^2}$$

ergibt sich dann als Umrechnungsfaktor

$$\begin{aligned}
1\,\text{nb}^{-1} &= \frac{10^{37}}{10^{30}} \cdot 3{,}9 \cdot 10^4\,\text{MeV}^2 \\
&= 3{,}9 \cdot 10^{11}\,\text{MeV}^2
\end{aligned}$$

Wenn man damit die Einheit der Luminosität ersetzt, ergibt sich nach (1.8) für die Anzahl der Neutrinogenerationen:

$$N_\nu = 3{,}31$$

Um den Fehler auf diese Größe zu erhalten, wird Formel (1.9) angewendet. Die Standardabweichungen der fehlerbehafteten Größen ergeben sich zu

- $\sigma_R = 3{,}98$ aus Rechnung (2.2) und
- $\sigma_{N_{\mathrm{had}}} = 5 \cdot \sqrt{27{,}99} = 26{,}45$ aus (2.1) sowie der Betrachtung, dass hier die Gesamtanzahl der hadronischen Zerfälle eingesetzt wurde und daher der Fehler auf ein Intervall mit 5 multipliziert werden muss, um den Fehler auf die Gesamtzahl zu erhalten.

Daraus resultiert also ein Fehler von

$$\begin{aligned}\sigma_{N_\nu}^2 &= \left(\frac{83{,}83}{166{,}1}\right)^2 \cdot \left[3{,}98^2 \cdot \left(4{,}22 \cdot 10^{-2}\right)^2 + 26{,}45^2 \cdot 6{,}16 \cdot 10^{-4}\right] \\ &= 0{,}12 \\ \\ \Rightarrow \sigma_{N_\nu} &= 0{,}34\end{aligned}$$

Unser Ergebnis für die Anzahl der Neutrinogenerationen lautet also

$$\boxed{N_\nu = 3{,}31 \pm 0{,}34}$$

Was sehr gut dem erwarteten Wert von $N_\nu = 3$ entspricht.