Elementarteilchen

Marcel Köpke & Axel Müller
Gruppe 13

Versuchstag: 09.12.2013
Abgabedatum: 17.12.2013

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Grundlagen **3**
1.1 Der Versuch . . . 3
1.2 Das Standardmodell . . . 3
1.3 Z^0 Ereignisse . . . 4
1.4 Der Detektor . . . 5
1.5 Kategorisierung der Ereignisse . . . 6

2 Aufgabenstellung **8**
2.1 Verzweigungsverhältnis und der Anzahl der Farbladungen . . . 8
2.2 Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung . . . 9
2.3 Anzahl der Neutrinofamilien . . . 10

3 Auswertung **11**
3.1 Aufgabe 1 (Verzweigungsverhältnis und der Anzahl der Farbladungen) . . . 11
3.2 Aufgabe 2 (Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung) . . . 12
3.3 Aufgabe 3 (Anzahl der Neutrinofamilien) . . . 13

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Der Versuch

In diesem Versuch sollen verschiedene Eigenschaften von Elementarteilchen untersucht werden. Dafür werden reell aufgenommene und in einem Auswertungsprogramm aufbereitete Daten bereitgestellt, die am CERN mit dem DELPHI-Detektor ermittelt wurden. Die zu untersuchenden Z^0-Ereignisse wurden mit Elektron-Positron-Kollisionen erzeugt.

1.2 Das Standardmodell

Die bekannten Elementarteilchen werden in der modernen Teilchenphysik durch das Standardmodell beschrieben, genauso wie deren Wechselwirkungen, die elektromagnetischen Kraft und die schwache die starke Kernkraft. Dabei unterscheidet das Standardmodell zwischen:

- Leptonen: Leptonen tragen einen halbzahligen Spin und sind somit Fermionen. Zu ihnen gehören das Elektron, das Myon und das Tauon, sowie die zugehörigen Neutrinos. Das Myon und das Tauon sind jedoch instabil und zerfallen in ein Elektron
- Quarks: Das Up- und das Down-Quark sind die Bausteine von Proton (uud) und Neutron (udd). Die Teilchen der zweiten und dritten Familie, Strange-, Charm-, Top- und Bottom-Quark, sind viel schwerer als die der ersten und somit ebenfalls instabil. Die Quarks besitzen einen Spin $\frac{1}{2}$ und sind somit Fermionen.
- Eichbosonen: Die Eichbosonen sind die Austauschteilchen im Standardmodell und somit verantwortlich für die Vermittlung der auftretenden Kräfte zwischen den Teilchen. Dabei bewirkt das Photon die elektromagnetische Wechselwirkung und koppelt nur an Teilchen mit elektrischer Ladung. Das Gluon vermittelt die starke Wechselwirkung und koppelt ausschließlich an Quarks. Das W- und das Z-Boson koppeln an Fermionen und vermitteln die schwache Wechselwirkung.

Wie oben beschrieben sind die schwereren Generationen der Quarks und Leptonen instabil und zerfallen somit in Teilchen der ersten Generation. Diese Teilchen findet man also ausschließlich in Beschleunigern und kosmischer Strahlung. Zusätzlich gibt es zu jedem oben genannten Fermion noch ein Antiteilchen. Die Teilchen können bezüglich folgender Eigenschaften voneinander unterschieden und klassifiziert werden:

- Masse: Alle Teilchen, außer Photon und Gluon, besitzen nach heutigem Wissensstand eine Masse, auch wenn diese noch nicht für jedes Teilchen ermittelt werden konnte.

- elektrische Ladung: Hierbei ist zu beachten, dass Quarks zwar nur ein bzw. zwei Drittel der Elementarladung tragen, jedoch nur in solchen Konfigurationen auftreten, in denen die Summe wieder die Elementarladung ergibt. Das Elektron, das Myon und das Tauon besitzen jeweils eine negative Elementarladung, ihre Antiteilchen eine positive Elementarladung. Die zugehörigen Neutrinos sind ladungsfrei.

- Farbladung: Die Farbladung wurde eingeführt, um das Pauli-Prinzip auch auf Quarks anwenden zu können. Die verschiedenen Ladungen wurde dabei in rot, blau und grün eingeteilt, sowie deren Anti-Farben. Das Standardmodell erlaubt jedoch nur farbneutrale Teilchen, also entweder ein Teilchenpaar mit Farb- und Anti-Farbladung und Teilchen deren Summe "weiß" ergibt.

- Spin: Leptonen und Quarks tragen den Spin $\frac{1}{2}$. Die Eichbosonen den Spin 1.

Wie bereits erwähnt gehen Quarks immer gebundene Zustände ein und können diesen aufgrund des Confinements nicht verlassen. Das Confinement beschreibt die Eigenschaft von farbgeladenen Teilchen, dass sie nicht isoliert vorkommen können. Quarks und Gluonen kommen also nur in Bindungszuständen vor. Dabei unterscheidet man zwischen Quarkpaaren ($q\bar{q}$), den Leptonen, Teilchen bestehend aus drei Quarks (qqq, $\overline{qqq}$), den Baryonen und den exotischen Teilchen aus vier oder mehr Quarks. Alle zusammengesetzten Teilchen nennt man Hadronen.

1.3 Z^0 Ereignisse

Z^0 Ereignisse beschreiben die hier untersuchte Elektron-Positron-Annihilation in ein Z^0-Boson, das wiederum in ein Teilchen-Antiteilchen-Paar zerstrahlt. Dabei kann es sich sowohl um Leptonen als auch um ein Quark-AntiQuarkpaar handeln, jedoch wurden die für ein Top-Antitop-Event benötigten Energien im Experiment nicht erreicht. Im Allgemeinen zerfällt das das Z^0-Boson in zwei Teilchen, die aufgrund der Impulserhaltung in entgegengesetzte Richtung auseinanderfliegen und daher aufgrund der starken Wechselwirkung und des Confinements entsprechende Teilchenschauer, Jets genannt, erzeugen. In manchen fällen wird ein zusätzliches Gluon erzeugt, das dann in eine dritte Richtung fliegt und ebenfalls einen Schauer erzeugt. Dieses Event nennt man 3-Jet-Ereignis. Um Jets als getrennt wahrnehmen zu können, muss der Winkel, unter dem sie auseinanderlaufen groß genug sein. Aus diesem Grund wurde der Jetauflösungsparameter y eingeführt:

$$y = \frac{M_{ij}^2}{s}$$

Dabei ist M_{ij}^2 die invariante Masse und s die Schwerpunktenergie der beiden Jets. Aus der Erfahrung ergab sich, dass

$$y > 0,02$$

ein guter Wert für die Separation zweier Jets darstellt. Im Versuch wurde diese Separation jedoch nicht angewandt. Wir bestimmten subjektiv per Augenmaß um wie viele Jets es sich handelte.

1.4 Der Detektor

Wie oben beschrieben befand sich der DELPHI Detektor am LEP des CERN. Im LEP wurden Elektronen und Positronen zur Kollision gebracht und dann ihre Zerfallsprodukte untersucht. Der Delphidetektor ist radial um das Strahlrohr, in dem die Kollision stattfindet, in mehreren Schichten aufgebaut (siehe Abbildung 1.1).

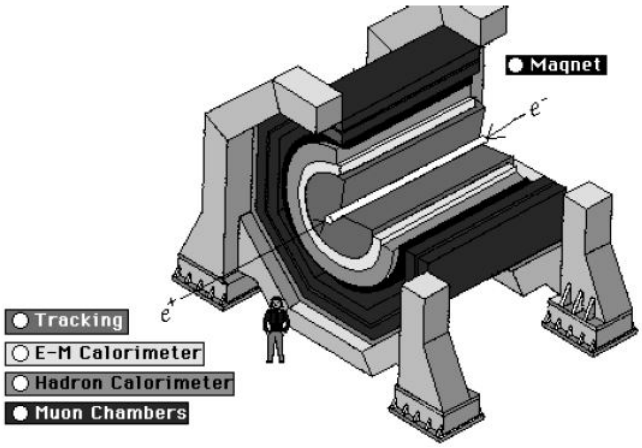

Abbildung 1.1: Quelle: blaues Buch

Mit den verschiedenen Kalorimetern (siehe Abbildung 1.2) und Magnetfeldern, die von supraleitenden Spulen erzeugt werden, können mit Hilfe des Detektors die Energie, die Spur, die Flugzeit sowie die elektrische Ladung der erzeugten Teilchen ermittelt werden. Aus Richtung, Geschwindigkeit und Energie lässt sich außerdem der Impuls der Teilchen bestimmen. Im folgenden werden einige Komponenten des Detektors, sowie ihre Funktionsweise erläutert:

- Der aus Halbleiterdetektoren bestehende Vertex Detector sowie die Spurendriftkammer ermitteln die Spur der erzeugten Teilchen und deren Impuls und erfasst fast aller erzeugten, elektrisch geladenen, Teilchen.
- Das elektromagnetische Kalorimeter erfasst die Energie elektrisch geladener Teilchen mit einer sehr hohen Präzision. Die im Absorbermaterial entstehenden Photonen werden von Szintillatoren erfasst und ausgewertet.
- Der nächste wichtige Bestandteil in radialer Richtung ist die supraleitende Spule (nicht in Grafik enthalten), die das magnetische Feld erzeugt.
- Das hadronische Kalorimeter bestimmt die Energie der Teilchen mit Hilfe der starken Kernkraft.
- Die Myonkammer erfasst die Energie und die Spuren der Myonen, die die inneren Schichten fast ohne Wechselwirkung passieren konnten.

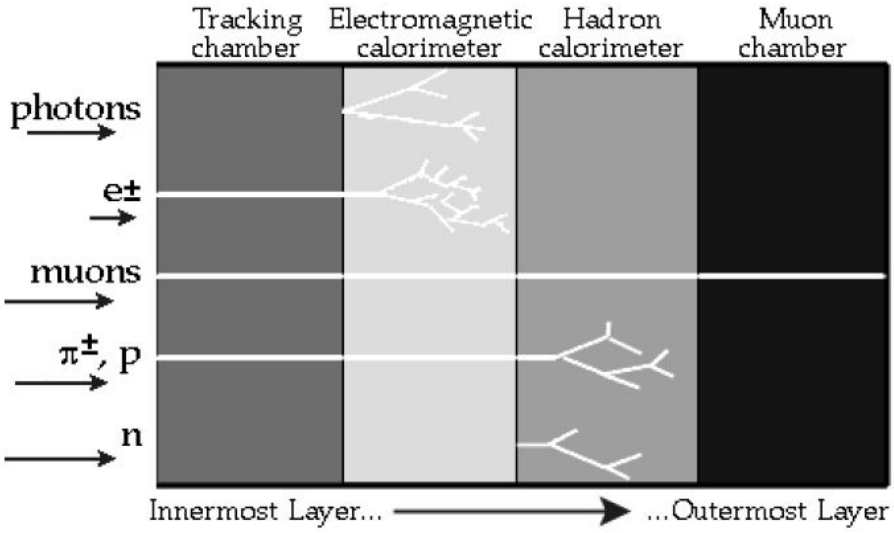

Abbildung 1.2: Quelle: blaues Buch

1.5 Kategorisierung der Ereignisse

Beim Zerfall des Z^0- Bosons gibt es verschiedene Zerfallskanäle, die im Folgenden aufgeführt werden:

Elektron-Positron-Zerfall

Bei diesem Zerfall des Z^0-Bosons entsteht wieder ein Elektron-Positron-Paar das in entgegengesetzte Richtung fliegt. Sie werden jeweils in der Spurenkammer registriert und im elektromagnetischen Kalorimeter detektiert. Wie alle geladenen Teilchen bilden sie im Magnetfeld des Detektors eine gekrümmte Flugbahn.

Myonischer Zerfall

Wie beim Elektron-Positron-Zerfall fliegt das Myon-Paar in entgegengesetzte Richtung und wird in der Spurenkammer registriert. Aufgrund der schwachen elektromagnetischen Wechselwirkung, resultierend aus der größeren Masse im Vergleich zum Elektron, wird es jedoch erst ganz außen im Myondetektor detektiert.

τ-Leptonen Zerfall

Die τ-Leptonen verhalten sich gleich wie Elektron-Positron- und Myon-Paare, zerfallen jedoch aufgrund ihrer großen Masse und damit verbundenen kurzen Lebensdauer bevor sie den Detektor erreichen. Daher können lediglich die Zerfallsprodukte ermittelt werden. Dies können andere Leptonen aber auch Quark-AntiQuarkpaare sein (siehe Abbildung

1.3). Da bei dem Zerfall ein Teil der Energie von Neutrinos getragen wird, diese aber nicht detektiert werden, wird die gemessene Energie der Zerfallsprodukte kleiner sein, als die des τ-Paares.

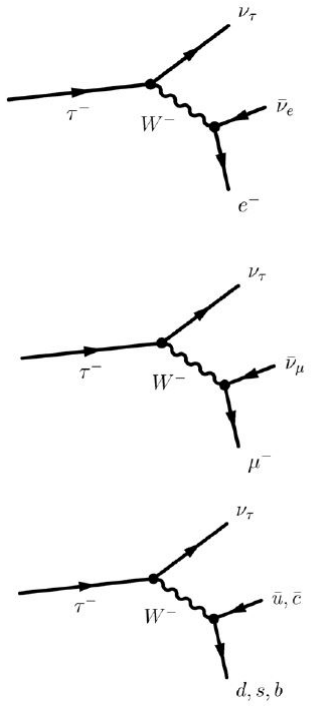

Abbildung 1.3: Quelle: blaues Buch

Hadronischer Zerfall

Beim hadronischen Zerfall des Z^0-Bosons entstehen zunächst Quark-Antiquarkpaare, die auseinanderfliegen. Aufgrund des Confinements erzeugen sie jedoch größere Teilchenschauer, die in den Hadronenkalorimetern erfasst werden. Wie oben beschrieben werden die Bündel als Jets aufgefasst und es kann aufgrund von Gluonenemission auch zu Mehr-Jet-Ereignissen kommen. Im Versuch sollen aber alle Mehr-Jet-Ereignisse zu den 3-Jet-Ereignissen dazugezählt werden.

2 Aufgabenstellung

Am PC sollen nun aufbereiteten Daten betrachtet und kategorisiert werden. Hierbei sollen die Events in einen der drei leptonischen Zerfälle, einen 2-Jet-Zerfall oder einen 3-Jet-Zerfall eingeteilt werden.

2.1 Verzweigungsverhältnis und der Anzahl der Farbladungen

Zunächst soll das Verhältnis der Zerfallsbreiten von hadronischen zu leptonischen Events bestimmt werden:

$$R = \frac{\Gamma_{Hadr}}{\Gamma_{Lept}}$$

Die Zerfallsbreite ist proportional zur Anzahl der bestimmten Events und außerdem gilt für die gemittelte leptonische Zerfallsbreite bei der Annahme von Leptonuniversalität $\Gamma_{Lept} = \frac{1}{3} \cdot (\Gamma_{e^-e^+} + \Gamma_{\mu^-\mu^+} + \Gamma_{\tau^-\tau^+})$ und somit:

$$R = 3 \cdot \frac{N_{Hadr}}{N_{Lept}}$$

Um die Gesamtzahl benötigter Ereignisse abschätzen zu können, sollen zunächst 100 Events untersucht werden. Anschließend soll anhand des Ergebnisses ermittelt werden, wie viele Events benötigt werden, um eine relative Genauigkeit $\frac{\Delta R}{R}$ von 15% zu erreichen. Dazu geht man von einer poissonverteilten Fehlergröße $\sigma_n = \sqrt{n}$ wobei n die Zahl der gemessenen Events darstellt. Eine Fehlerfortpflanzung ergibt:

$$\begin{aligned}
\sigma_R &= \sqrt{\sigma^2_{N_{Hadr}} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial N_{Hadr}}\right)^2 + \sigma^2_{N_{Lept}} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial N_{Lept}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\sigma^2_{N_{Hadr}} \cdot \left(\frac{3}{N_{Lept}}\right)^2 + \sigma^2_{N_{Lept}} \cdot \left(-\frac{3 \cdot N_{Hadr}}{N^2_{Lept}}\right)^2} \\
&= 3 \cdot \sqrt{\sigma^2_{N_{Hadr}} \cdot \frac{1}{N^2_{Lept}} + \sigma^2_{N_{Lept}} \cdot \frac{N^2_{Hadr}}{N^4_{Lept}}} \\
&= 3 \cdot \sqrt{\frac{N_{Hadr}}{N^2_{Lept}} + \frac{N^2_{Hadr}}{N^3_{Lept}}}
\end{aligned}$$

Geht man nun davon aus, dass sich der Fehler in den folgenden Messungen nicht ändern wird, kann man etwa die benötigten Events abschätzen. Im Folgenden soll nun die Anzahl

der Farbladungen ermittelt werden. Der Zusammenhang für diese Anzahl N_C ist gegeben durch:

$$\Gamma_{Hadr} = N_C \cdot (N_u \cdot \Gamma_{u\bar{u}} + N_d \cdot \Gamma_{d\bar{d}})$$

Hierbei sind N_u und N_d die Anzahl up- bzw. downartiger Quarks, die entstehen können. Da die Top-Quarks energetisch nicht möglich sind gilt:

$$\begin{aligned} N_u &= 2 \\ N_d &= 3 \end{aligned}$$

$\Gamma_{u\bar{u}}$ und $\Gamma_{d\bar{d}}$ sind die partiellen Zerfallsbreiten für Up- bzw. Down-Quarks. Hierbei gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma_{u\bar{u}} &= 98,88\text{Mev} \\ \Gamma_{d\bar{d}} &= 127,48\text{Mev} \end{aligned}$$

Γ_{Hadr} lässt sich aus dem oben ermittelten Wert für R und dem Literaturwert für $\Gamma_{Lept} = 83,83MeV$ berechnen:

$$\Gamma_{Hadr} = R \cdot \Gamma_{Lept}$$

Somit erhält man für die Anzahl der Farbladungen:

$$N_C = \frac{R \cdot \Gamma_{Lept}}{N_u \cdot \Gamma_{u\bar{u}} + N_d \cdot \Gamma_{d\bar{d}}}$$

Hier erwarten wie einen Wert von $N_C = 3$. Für den Fehler erhält man:

$$\sigma_{N_C} = \sigma_R \cdot \frac{\partial N_C}{\partial R} = \sigma_R \cdot \frac{\Gamma_{Lept}}{N_u \cdot \Gamma_{u\bar{u}} + N_d \cdot \Gamma_{d\bar{d}}}$$

2.2 Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung

Mit Hilfe der folgenden, im blauen Buch[1] angegebenen Formel, kann man mit dem Verhältnis der Anzahl der 3-Jet-Ereignisse im Vergleich zur Anzahl aller hadronischer Ereignisse die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{N_3\,(y > y_{cut})}{N_{Hadr}} &\approx C\,(y > y_{cut})\,\alpha_S\,(m_Z) \\ &\Longleftrightarrow \alpha_S \approx \frac{N_3}{N_{Hadr} \cdot C} \end{aligned}$$

Die Konstante C wurde im blauen Buch mit dem Wert

$$C = 2,72$$

angegeben. Grund für das Verhältnis ist, dass die Wahrscheinlichkeit für die Produktion eines Gluons proportional zur starken Kopplungskonstante ist. Für den statistischen Fehler gilt:

$$\sigma_{\alpha_S} = \sqrt{\sigma_{N_3}^2 \cdot \left(\frac{1}{N_{Hadr} \cdot C}\right)^2 + \sigma_{N_{Hadr}}^2 \cdot \left(\frac{N_3}{N_{Hadr}^2 \cdot C}\right)^2}$$

[1] Blaues Buch; J. Wolf, F.K. Schmidt: Einführung in das Kernphysikalische Praktikum

2.3 Anzahl der Neutrinofamilien

Der Delphi kann alle entstehenden Teilchen detektieren außer die Neutrinos. Daher weicht die theoretische Zerfallsbreite von der gemessen ab. Diese Breite entspricht den Neutrinos. Die theoretische Wirkungsquerschnitt beim Zerfall in Hadronen berechnet sich wie folgt:

$$\sigma_{Hadr} = \frac{12 \cdot \pi \Gamma_{Lept} \Gamma_{Hadr} \cdot 0,737}{m_Z^2 \cdot \Gamma_{tot}^2}$$

Der Faktor $0,737$ muss multipliziert werden, weil durch Photoemission der Wirkungsquerschnitt um $26,3\%$ verringert wird und somit die Schwerpunktenergie nicht beim exakten Maximum des Querschnitts ermittelt wird. Für die totale Zerfallsbreite gilt dann:

$$\Gamma_{tot} = \sqrt{\frac{12 \cdot \pi \cdot \Gamma_{Lept} \Gamma_{Hadr} \cdot 0,737}{m_Z^2 \cdot \sigma_{Hadr}}}$$

Für die Masse des Z^0 gilt: $m_Z = 91,187\text{GeV}$. Für den hadronischen Wirkungsquerschnitt erhält man mit Hilfe der Luminosität für 1000 Ereignisse von $L = 28,48\frac{1}{nb} \hat{=} 1,1109 \cdot 10^{13}\text{MeV}^2$:

$$\sigma_{Hadr} = \frac{N_{Hadr}}{L}$$

Die partielle Zerfallsbreite der Hadronen lässt sich wie oben beschrieben mit dem Verzweigungsverhältnis ausdrücken:

$$\Gamma_{Hadr} = R \cdot \Gamma_{Lept}$$

Somit gilt für die Gesamtzerfallsbreite also:

$$\Gamma_{tot} = \sqrt{\frac{12 \cdot \pi \cdot \Gamma_{Lept}^2 \cdot R \cdot L \cdot 0,737}{m_Z^2 \cdot N_{Hadr}}}$$

Damit ergibt sich für die nicht detektierte Zerfallsbreite der Neutrinos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{und} &= \Gamma_{tot} - \Gamma_{Hadr} - 3\Gamma_{Lept} \\ &= \Gamma_{Lept} \cdot \left(\sqrt{\frac{12 \cdot \pi \cdot R \cdot L \cdot 0,737}{m_Z^2 \cdot N_{Hadr}}} - R - 3 \right) \end{aligned}$$

Diese nicht detektierte Zerfallsbreite ist der Beitrag aller Neutrinofamilien womit der Zahl bestimmt werden kann:

$$N_\nu = \frac{\Gamma_{und}}{\Gamma_{\nu\bar{\nu}}} = \frac{\Gamma_{Lept}}{\Gamma_{\nu\bar{\nu}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{12 \cdot \pi \cdot R \cdot L \cdot 0,737}{m_Z^2 \cdot N_{Hadr}}} - R - 3 \right)$$

Im blauen Buch wurde der theoretische Wert für $\Gamma_{\nu\bar{\nu}}$, der aus dem Standardmodell resultiert, angegeben mit:$\Gamma_{\nu\bar{\nu}} = 166,1MeV$. Für den Fehler dieser Größe ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma_{N_\nu} &= \sqrt{\sigma_R^2 \cdot \left(\frac{\partial N_\nu}{\partial R}\right)^2 + \sigma_{N_{Hadr}}^2 \cdot \left(\frac{\partial N_\nu}{\partial N_{Hadr}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Gamma_{Lept}}{\Gamma_{\nu\bar{\nu}}}\right)^2 \cdot \left(\sigma_R^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{6 \cdot \pi \cdot L \cdot 0,737}{m_Z^2 \cdot N_{Hadr} \cdot R}} - 1 \right)^2 + \sigma_{N_{Hadr}}^2 \cdot \frac{6 \cdot \pi \cdot L \cdot R \cdot 0,737}{m_Z^2 \cdot N_{Hadr}^3} \right)} \end{aligned}$$

3 Auswertung

Im Versuch ermittelten wir die Anzahl der leptonischen und hadronischen Ereignisse. Damit erhalten wir folgende Übersicht der Ereignishäufigkeiten:

Ereignisse	Häufigkeiten N	Fehler $\sqrt{N}$
$e^+ e^-$	21	4,58
$\mu^+ \mu^-$	12	3,46
$\tau^+ \tau^-$	14	3,74
Leptonen-Gesamt	47	6,86
—	—	—
3 Jets	105	10,25
2 Jets	246	15,68
Hadronen-Gesamt	351	18,73
—	—	—
Gesamt	398	19,95

Ereignisse	Set 1-100	Set 101-200	Set 201-300	Set 301-400
$e^+ e^-$	8	1	3	9
$\mu^+ \mu^-$	4	3	2	3
$\tau^+ \tau^-$	6	5	1	2
Leptonen-Gesamt	18	9	6	14
—	—	—	—	—
3 Jets	29	26	27	23
2 Jets	53	64	67	62
Hadronen-Gesamt	82	90	94	85
—	—	—	—	—
Gesamt	100	99	100	99

Tabelle 3.1: Häufigkeiten der Events

3.1 Aufgabe 1 (Verzweigungsverhältnis und der Anzahl der Farbladungen)

Wie in Abschnitt 2.1 beschrieben berechnet sich das Verzweigungsverhältnis wie folgt:

$$R = 3 \cdot \frac{N_{Hadr}}{N_{Lept}} \pm \sigma_R$$

$$
\begin{aligned}
&= 3 \cdot \frac{351}{47} \pm \sigma_R \\
&= 22,4 \pm 1,2
\end{aligned}
$$

Für die statistische Ungenauigkeit erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\sigma_R &= 3 \cdot \sqrt{\frac{N_{Hadr}}{N_{Lept}^2} + \frac{N_{Hadr}^2}{N_{Lept}^3}} \\
&= 3 \cdot \sqrt{\frac{351}{47^2} + \frac{351^2}{47^3}} \\
&= 1,2
\end{aligned}
$$

Der Fehler beträgt damit also nur $5,4\%$ und liegt damit unter den geforderten 15%. Daraus lässt sich jetzt die Anzahl der Farbladungen bestimmen:

$$
\begin{aligned}
N_C &= \frac{R \cdot \Gamma_{Lept}}{N_u \cdot \Gamma_{u\bar{u}} + N_d \cdot \Gamma_{d\bar{d}}} \pm \sigma_{N_C} \\
&= \frac{22,4 \cdot 83,83\text{MeV}}{2 \cdot 98,88\text{MeV} + 3 \cdot 127,48\text{Mev}} \pm \sigma_{N_C} \\
&= 3,2 \pm 0,2
\end{aligned}
$$

Für die Ungenauigkeit erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{N_C} &= \sigma_R \cdot \frac{\Gamma_{Lept}}{N_u \cdot \Gamma_{u\bar{u}} + N_d \cdot \Gamma_{d\bar{d}}} \\
&= 1,2 \cdot \frac{83,83\text{MeV}}{2 \cdot 98,88\text{MeV} + 3 \cdot 127,48\text{Mev}} \\
&= 0,2
\end{aligned}
$$

Wie man sieht liegt der Literaturwert $N_C = 3$ innerhalb der ermittelten Fehlergrenzen.

3.2 Aufgabe 2 (Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung)

Wie in Abschnitt 2.2 beschrieben erhalte wir für die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung:

$$
\begin{aligned}
\alpha_S &\approx \frac{N_3}{N_{Hadr} \cdot C} \pm \sigma_{\alpha_S} \\
&= \frac{105}{351 \cdot 2,72} \\
&= 0,11 \pm 0,01
\end{aligned}
$$

Für die statistische Unsicherheit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha_S} &= \sqrt{\sigma_{N_3}^2 \cdot \left(\frac{1}{N_{Hadr} \cdot C}\right)^2 + \sigma_{N_{Hadr}}^2 \cdot \left(\frac{N_3}{N_{Hadr}^2 \cdot C}\right)^2} \\
&= \sqrt{10,25^2 \cdot (\frac{1}{351 \cdot 2,72})^2 + 18,73^2 (\frac{105}{351^2 \cdot 2,72})^2} \\
&= 0,012
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_S &\approx \frac{N_3}{N_{Hadr} \cdot C} \pm \sigma_{\alpha_S} \\
&= \frac{105}{351 \cdot 2,72} \\
&= 0,11 \pm 0,012
\end{aligned}$$

Der Literaturwert des Particle Data Books liegt bei $\alpha_S = 0,1184 \pm 0,0007$. Damit liegt der Literaturwert wieder innerhalb unserer Fehlergrenzen.

3.3 Aufgabe 3 (Anzahl der Neutrinofamilien)

Da wir keine 1000 Ereignisse analysiert haben gilt für die Luminosität:

$$L = \frac{1,1109 \cdot 10^{13}}{\frac{398}{1000}} \mathrm{MeV}^2 = 4,4214 \cdot 10^{12} \mathrm{MeV}^2$$

Somit erhalten wir wie in Abschnitt 2.3 beschrieben:

$$\begin{aligned}
N_\nu &= \frac{\Gamma_{Lept}}{\Gamma_{\nu\bar{\nu}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{12 \cdot \pi \cdot R \cdot L \cdot 0,737}{m_Z^2 \cdot N_{Hadr}}} - R - 3\right) \pm \sigma_{N_\nu} \\
&= \frac{83,83\mathrm{MeV}}{166,1\mathrm{MeV}} \cdot \left(\sqrt{\frac{12 \cdot 3,14 \cdot 22,4 \cdot 4,4214 \cdot 10^{12}\mathrm{MeV}^2 \cdot 0,737}{(91187,6\mathrm{MeV})^2 \cdot 351}} - 22,4 - 3\right) \pm \sigma_{N_\nu} \\
&= 2,7 \pm 0,6
\end{aligned}$$

Für die Unsicherheit erhalten wir:

$$\sigma_{N_\nu} = \sqrt{\left(\frac{\Gamma_{Lept}}{\Gamma_{\nu\bar{\nu}}}\right)^2 \cdot \left(\sigma_R^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{6 \cdot \pi \cdot L \cdot 0,737}{m_Z^2 \cdot N_{Hadr} \cdot R}} - 1\right)^2 + \sigma_{N_{Hadr}}^2 \cdot \frac{6 \cdot \pi \cdot L \cdot R \cdot 0,737}{m_Z^2 \cdot N_{Hadr}^3}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{83,83\text{MeV}}{166,1\text{MeV}}\right)^2 \cdot \left(1,2^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{6 \cdot 3,14 \cdot 4,4214 \cdot 10^{12}\text{MeV}^2 \cdot 0,737}{(91187,6\text{MeV})^2 \cdot 351 \cdot 22,4}} - 1\right)^2\right)\right. \\
&\ldots \quad \left. +18,73^2 \frac{6 \cdot 3.14 \cdot 4,4214 \cdot 10^{12}\text{MeV}^2 \cdot 22,4 \cdot 0,737}{(91187,6\text{MeV})^2 \cdot 351^3}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= 0,6
\end{aligned}
$$

Der Literaturwert beträgt $N_\nu = 3$ und liegt somit wieder innerhalb unserer Fehlergrenzen.