

Gitterschwingungen

Kevin Edelman, Julian Stöckel
Gruppe 109

18.5.2011

Zusammenfassung

Anhand einer modellhaften, eindimensionalen Oszillatorkette sollen die grundlegenden Eigenschaften der Ausbildung von Wellen in Kristallgittern untersucht werden. Dies wird sowohl in einatomigen als auch in zweiatomigen Gittern demonstriert. Die Ergebnisse lassen sich mit einigen zusätzlichen Überlegungen auf dreidimensionale Gitter übertragen.

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbereitung	2
1.1	Theoretische Grundlagen	3
1.1.1	Wellenmechanik	3
1.1.2	Kristallgitter	3
1.1.3	Wellenausbreitung im Kristall	4
1.1.4	Einatomige lineare Kette	5
1.1.5	Zweiatomige lineare Kette	6
1.1.6	Dreidimensionale Kristalle	7
1.2	Experimentelle Grundlagen	7
1.2.1	Versuchsmodell	7
1.2.2	Messprinzip	7
1.2.3	Aufgaben	8
2	Auswertung	10
2.1	Eigenfrequenzen	11
2.2	Schallgeschwindigkeiten	12
2.3	Massenverhältnis	13
2.4	Federkonstante	13
2.5	Amplitudenverhältnisse	15
A	Gemessene Werte	17
A.1	Eigenfrequenzen	17
A.2	Amplituden	18

1 Vorbereitung

1.1 Theoretische Grundlagen

1.1.1 Wellenmechanik

Eine Ebene Welle mit der Auslenkung $s(x, t)$ wird durch die Beziehung

$$s(x, t) = s_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

beschrieben. Charakteristische Größen sind die Amplitude s_0 , der Wellenvektor bzw. im Eindimensionalen nur die Wellenzahl k sowie die Kreisfrequenz ω . Die Kreisfrequenz und die Wellenzahl sind im Allgemeinen voneinander abhängig, diesen Zusammenhang $\omega(k)$ nennt man Dispersion.

Die Geschwindigkeit, mit der sich Wellen in einem Medium ausbreiten, entspricht der Phasengeschwindigkeit, also der Geschwindigkeit, mit der sich Fronten konstanter Phase fortbewegen, und beträgt

$$c = v_{Ph} = \frac{\omega}{k} \quad (1.1)$$

Im Gegensatz dazu beschreibt die Gruppengeschwindigkeit die Ausbreitungsgeschwindigkeit zusammengesetzter Wellenpakete. Sie berechnet sich durch

$$v_{Gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

und ist offensichtlich bei einer zu k proportionalen Dispersion $\omega(k)$ gleich der Phasengeschwindigkeit.

In begrenzten Medien können sich sogenannte *stehende Wellen* ausbilden. Diese treten dann auf, wenn am Ende reflektierte Wellen konstruktiv mit der einlaufenden Welle interferieren. Das Schwingungssystem befindet sich dann in einem stationären Zustand, da sich die Amplituden nicht mehr räumlich fortbewegen sondern bildlich an der gleichen Stelle bleiben und dort nur noch zeitlich oszillieren. Im Eindimensionalen ist die Interferenz-Bedingung für eine solche stehende Welle, dass die Länge L des begrenzten Mediums ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge beträgt:

$$n \cdot \frac{\lambda}{2} \stackrel{!}{=} L$$

Die Zahl n entspricht dabei der angeregten *Eigenmode*. Für stehende Wellen kann die Wellenzahl also nur die Werte

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L} \quad (1.2)$$

annehmen.

1.1.2 Kristallgitter

Ein Kristallgitter besteht aus Einheitszellen, die räumlich periodisch im ganzen Kristall angeordnet sind. Die Symmetrie des Gitters ist dadurch gekennzeichnet, dass eine Translation entlang der Gittervektoren \vec{a}_i mit

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^3 n_i \vec{a}_i$$

mit ganzzahligen n_i den Kristall wieder in sich selbst überführt. Die Einheitszellen selbst bestehen aus verschiedenen angeordneten Atomen. Die Beschreibung dieser Anordnung innerhalb der Einheitszelle erfolgt durch die sog. Basis.

Die Fouriertransformierte des Kristallgitters wird als reziprokes Gitter bezeichnet und ist für alle Betrachtungen der Wellenausbreitung von Bedeutung, da sie den Impulsraum der im Festkörper vorhandenen Teilchen beschreibt. Innerhalb des reziproken Gitters kann man nun ebenfalls Einheitszellen definieren, wobei die primitive Wigner-Seitz-Zelle der ersten Brillouin-Zone entspricht. Diese genießt besondere Bedeutung, da viele Betrachtungen im Festkörper von der ersten Brillouin-Zone aufgrund der Translationsinvarianz auf den ganzen Kristall verallgemeinert werden können. Die Größe dieser Zone beträgt in einfachen kubischen Gittern für $i \in \{1; 2; 3\}$ mit dem Gitterabstand a

$$k_i \in \left[-\frac{\pi}{a}; \frac{\pi}{a} \right] \quad (1.3)$$

1.1.3 Wellenausbreitung im Kristall

Die Atome im Kristallgitter wechselwirken miteinander, wobei es abstoßende Kräfte durch Überlapp der Elektronenschalen und das Pauli-Verbot sowie anziehende Kräfte durch Coulomb-Wechselwirkungen oder kovalente Bindungen gibt, wobei letztere ebenfalls quantenmechanischer Natur sind. Dadurch gibt es im Paarpotential zwischen zwei Atomen stets ein Minimum im Kernabstand, das der Gleichgewichtslage entspricht. Um dieses Minimum herum können die Atome zu Schwingungen angeregt werden, welche dann durch die atomaren Wechselwirkungen auf Nachbaratome übertragen werden. Der Kristall ist also ein schwingungsfähiges System, in dem sich Wellen ausbreiten können.

Der genaue Verlauf des Potentials zwischen den Gitteratomen ist kompliziert. Da in diesem Versuch aber nur kleine Auslenkungen um die Gleichgewichtslage betrachtet werden, kann das Potential als harmonisch genähert werden, sodass wir bei allen weiteren Rechnungen die bekannten Lösungen des harmonischen Oszillators anwenden können. Bei dieser Näherung wird auch nur der Einfluss direkt benachbarter Atome in Betrachtung gezogen und die langreichweitigen Wechselwirkungen zwischen weiter entfernten Atomen vernachlässigt.

Da ein Kristall keine kontinuierliche endlose Massenverteilung besitzt, sondern modellhaft Punktmassen an diskreten und endlichen Gitterplätzen mit festem Ende, können sich hierin nur Wellen mit einer minimalen und einer maximalen Wellenlänge ausbilden. Die maximale Wellenlänge berechnet sich durch die Resonanzbedingung einer stehenden Welle an den Enden des Kristalls der Länge

$$\lambda_{max} = 2L$$

da für die erste stehende Mode genau eine halbe Wellenlänge zwischen den Enden des Kristalls reinpasst.

Dass die Wellenlänge ein Minimum hat, ergibt sich aus einer anderen Überlegung: Die Auslenkung der Welle kann aufgrund der diskreten Massepunkten nur an diesen Stellen definiert werden; im Raum zwischen den Atomen ist die Welle eine rein mathematische Konstruktion ohne physikalische Bedeutung. So kann jede Welle mit einer Wellenlänge von $\lambda < 2a$ ebenfalls durch eine Welle mit $\lambda > 2a$ beschrieben werden, sodass die Punktmassen nach wie vor die gleiche Auslenkung besitzen und die beiden Wellen so physikalisch ununterscheidbar sind. Alle Wellenlängen, die kleiner sind als $2a$, liefern also keinen physikalischen Beitrag.

Durch die Beschränkung der möglichen Werte für die Wellenlänge ergibt sich auch, dass sich in einem endlichen Kristall nur eine endliche Anzahl an Moden ausbilden können. So ist die größte Modenzahl und damit auch Gesamtzahl der Moden durch

$$n_{max} = \frac{2L}{\lambda_{min}} = \frac{L}{a}$$

gegeben. Dies entspricht nun gerade der Anzahl der Gitterplätze und außerdem einem Wellenvektor von

$$k_{max} = \frac{2\pi}{\lambda_{min}} = \frac{\pi}{a}$$

welcher wiederum genau der Größe der ersten Brillouin-Zone entspricht. Die erste Brillouin-Zone enthält also alle physikalisch unterscheidbaren Wellenvektoren.

In einem quantenmechanischen System sind die elastischen Wellen mit einer definierten Kreisfrequenz ω quantisiert, wobei die Energie der Anregung analog zur Herleitung der quantisierten Energie eines harmonischen Oszillators

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega$$

beträgt. Dies hat unter Anderem eine nichtverschwindende Nullpunkt-Energie zur Folge. Solche Anregungen nennt man in der Festkörperphysik *Phononen*; sie lassen sich theoretisch als spinlose Bosonen beschreiben und tragen einen Impuls $\hbar\vec{k}$. Sie sind bei der Herleitung von Wärmekapazitäten und Ähnlichem von Bedeutung. Dieser Aspekt der Gitterschwingungen wird im makroskopischen Modellversuch aufgrund der Kleinheit von \hbar allerdings untergehen.

1.1.4 Einatomige lineare Kette

Das einfachste Modell eines schwingungsfähigen Systems stellt eine eindimensionale Kette mit einem Massepunkt der Masse m in der Basis dar. Der Abstand zwischen den Massepunkten in der Ruhelage sei a . Die Wechselwirkung der Massepunkte sei auf benachbarte Gitterplätze beschränkt und als harmonisch genähert. Im Fall kleiner Auslenkungen können als Überträger der Kraft also masselose Hookesche Federn mit der Federkonstanten D angenommen werden.

Die Bewegungsgleichung eines Massepunkts j lässt sich nun als Summe der Kräfte an beiden Federn beschreiben, wobei diese wiederum von der Auslenkung aus der Ruhelage des Massepunkts j sowie der Auslenkung des rechten bzw. linken Massepunkts $j \pm 1$ abhängen. Relevant für die Dynamik des Systems sind also nur die Auslenkungen aus der Ruhelage $s_j(t)$. Die Bewegungsgleichung lautet damit

$$m\ddot{s}_j = D(s_{j+1} + s_{j-1} - 2s_j) \quad (1.4)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung erfolgt mit dem Ansatz einer harmonischen ebenen Welle. Diese ist allerdings nur durch Auslenkungen an den diskreten Massepunkten definiert und hat daher die Form

$$s_j(t) = s_0 e^{i(k \cdot a \cdot j)} \quad (1.5)$$

Nach Einsetzen von (1.5) in (1.4) erhält man nach dem Kürzen folgende Dispersionsrelation für die Wellen

$$\begin{aligned} m\omega^2 &= D [2 - (e^{ika} + e^{-ika})] \\ \Rightarrow \omega(k) &= \sqrt{\frac{4D}{m}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right| \end{aligned} \quad (1.6)$$

Da diese Relation symmetrisch und periodisch in k mit der Periode $2\pi/a$ ist, ist hieran nochmals ersichtlich, dass alle physikalisch anregbaren Kreisfrequenzen bereits im k -Intervall $[-\pi/a; \pi/a]$ enthalten sind. Die Dispersionsrelation ist überdies im positiven wie im negativen Teil dieses Intervalls aufgrund der diskret anregbaren Kreisfrequenzen nur an jeweils N diskreten Punkten

definiert. Da diese Zahl in realen Kristallen allerdings sehr hoch ist, erscheint die Dispersion dort kontinuierlich.

Im Grenzfall sehr kleiner Wellenvektoren lässt sich die Sinus-Funktion durch das erste Glied ihrer Taylor-Reihe nähern, sodass die Kreisfrequenz proportional zu k wird. Da diese Näherung für die recht langperiodischen Schallwellen gut funktioniert, entspricht die Gruppengeschwindigkeit, welche nun nicht mehr von k abhängig ist, der Schallgeschwindigkeit im Medium, welche die schnellste mögliche Wellenausbreitung darstellt. Sie beträgt

$$v_{s,1} = a\sqrt{\frac{D}{m}} \quad (1.7)$$

Bei größer werdenden Werten von k wird die Steigung der Dispersion immer kleiner und damit auch die Gruppengeschwindigkeit.

1.1.5 Zweiatomige lineare Kette

Im Gegensatz zur einatomigen Kette im vorigen Kapitel enthält das nun betrachtete Modell in der Basis zwei verschieden schwere Massepunkte mit den Massen m und M , wobei o.B.d.A. $M > m$ gelte. Die Gitterkonstante a_2 soll dem Abstand gleich schwerer Massen entsprechen, sodass sie im Vergleich zur vorigen Betrachtung verdoppelt wird. Dadurch enthält das System bei gleicher Anzahl Massepunkte nur noch halb so viele Einheitszellen.

Die Kraft, die auf einen Massepunkt wirkt, ergibt sich aus der gleichen Überlegung wie bei der einatomigen Kette, allerdings erhalten wir nun für jede der beiden Massen jeweils eine andere Differentialgleichung. An der Stelle j befinde sich ein Massepunkt der Masse m und an $j + 1$ ein Massepunkt der Masse M :

$$\begin{aligned} m\ddot{s}_j &= D(s_{j+1} + s_{j-1} - 2s_j) \\ M\ddot{s}_{j+1} &= D(s_{j+2} + s_j - 2s_{j+1}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dies ist nun ein System aus zwei gekoppelten DGLs, für dessen Lösung wieder ebene Wellen angesetzt werden sollen. Dabei ist zu beachten, dass für die leichten und schweren Massen Gleichungen mit verschiedenen Massen und Amplituden angesetzt werden. In (1.8) eingesetzt ergibt sich schlussendlich ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = 0$, das nur dann eine Lösung hat, wenn die Determinante der Matrix A verschwindet. Aus dieser Bedingung ergibt sich eine quadratische Gleichung für die Kreisfrequenz ω , welche zwei Lösungen aufweist:

$$\omega_{\pm}^2 = D \left[\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM} \sin^2\left(\frac{ka_2}{2}\right)} \right] \quad (1.9)$$

Diese beiden Lösungen entsprechen physikalisch zwei verschiedenen möglichen Anregungsarten für einen k -Wert: bei ω_- schwingen die leichten und schweren Massen jeweils in Phase, bei ω_+ schwingen sie gegeneinander. Diese beiden Möglichkeiten nennt man „Äste“.

Da in einem realen Kristall unterschiedlich schwere Atome aufgrund der Bindungsart oft auch unterschiedliche (Teil-)Ladungen tragen, schwingen im Fall von ω_+ elektrische Ladungsschwerpunkte gegeneinander, was Absorption oder Emission von elektromagnetischer Strahlung möglich macht. Dieser Ast heißt daher „optischer Ast“. Der andere hat ein analoges Verhalten zur Dispersion in der einatomigen Kette und weist für kleine Werte von k ebenfalls hohe Ausbreitungsgeschwindigkeiten auf, welche der Schallgeschwindigkeit entsprechen. Dieser Ast wurde aus dem Grund „akustischer Ast“ getauft.

Ein weiterer zusätzlicher Effekt der Aufspaltung in zwei verschiedene Äste ist die Tatsache, dass zwischen der maximalen anregbaren Frequenz des akustischen Astes und der minimalen Frequenz des optischen eine Frequenzlücke besteht. Es gibt in diesem Schwingungssystem also einen Frequenzbereich, der nicht mehr zu den Eigenmoden beiträgt.

Die Schallgeschwindigkeit in diesem Kristallmodell berechnet sich aufgrund der näherungsweisen Proportionalität der Dispersion für kleine k völlig analog wie im einatomigen Fall. Sie beträgt hier

$$v_{s,2} = a_2 \sqrt{\frac{D}{2(m+M)}} \quad (1.10)$$

Das Verhältnis der maximalen Amplituden $s_{0,m}, s_{0,M}$ von leichten und schweren Massepunkten beträgt mit dem Massenverhältnis $\gamma = M/m$ für eine Anregung im ω_+ - bzw. ω_- -Ast

$$\eta \equiv \frac{s_{0,m}}{s_{0,M}} = \frac{\cos\left(\frac{ka_2}{2}\right)}{1 - \frac{1+\gamma}{2\gamma} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} \sin^2\left(\frac{ka_2}{2}\right)}\right]} \quad (1.11)$$

1.1.6 Dreidimensionale Kristalle

Reelle Kristalle haben selbstverständlich eine Ausdehnung in 3 Dimensionen, was sich im Modellversuch allerdings nur schwer nachstellen ließe. Das hat zur Folge, dass der Wellenvektor dreidimensional wird. Längs einer Symmetrieachse können sich nun Longitudinalwellen und zwei senkrecht aufeinander stehende Transversalwellen ausbilden, sodass grundsätzlich auch in einatomigen Kristallen drei verschiedene Äste der Dispersion vorhanden sind, die je nach Symmetrie des Kristalls noch weiter entartet sein können. Wellen, die sich in anisotropen Kristallen nicht entlang einer Symmetrieachse ausbreiten, enthalten in jedem Fall sowohl transversale als auch longitudinale Komponenten.

Wenn im Dreidimensionalen eine p -Basis in der Einheitszelle vorliegt, gibt es insgesamt $3p$ Äste, von denen drei akustischer und die restlichen optischer Art sind. Von diesen wiederum sind 2 transversal und eine longitudinal polarisiert.

1.2 Experimentelle Grundlagen

1.2.1 Versuchsmodell

Zur Simulation eines linearen reibungsfreien Schwingungssystem steht eine Luftkissenbahn mit zwölf darauf frei beweglichen Massengleitern zur Verfügung, welche durch identische Federn miteinander verbunden sind. Zur Simulation verschieden schwerer Massepunkte können in die Gleiter Zusatzmassen eingeschraubt werden.

Die Anregung von Schwingungen erfolgt entweder per Hand oder mit dem Schrittmotor, der an einem Ende der Kette befestigt ist und diese gezielt mit speziellen Frequenzen treiben kann. Bei der Anregung per Hand können spezielle Moden bevorzugt angeregt werden, indem der entsprechende Gleiter angestoßen wird, an dem bei dieser Mode die Auslenkung maximal ist.

1.2.2 Messprinzip

Zur Analyse der Bewegungsmuster der Gleiter steht eine Kamera mit dem Namen „VideoCom“ zur Verfügung. Die Gleiter sind mit Reflektoren ausgestattet, welche periodisch von der Kamera abgegebene Lichtblitze reflektieren und so von der Kamera detektiert werden. Die Ortsauflösung

beträgt dabei auf 2 m Entfernung ca. 0,25 mm, was bei einer Amplitude von 25 cm also einem Fehler von 0,1% entspräche. Diese Fehler werden später in die Statistik eingehen, da jede Messung sowohl der Frequenz als auch der Amplituden sehr oft wiederholt und dann gemittelt wird.

Die Bildwiederholungsrate der Kamera lässt sich auf verschiedene Werte einstellen, sodass sowohl langsame als auch schnelle Bewegungen nachvollzogen werden können und die Datenmenge gleichzeitig in einem vernünftigen Verhältnis bleibt. Der Sichtwinkel der Kamera erlaubt es, 2 Gleiter gleichzeitig zu beobachten.

Die Videodaten werden dann an einen Rechner weiter geleitet, in dem diese von einem LABVIEW-Programm ausgewertet werden.

1.2.3 Aufgaben

Eigenfrequenzen

Nach Anregung verschiedener Gleiter mit der Hand sollen für die ein- und zweiatomige Basis nacheinander jeweils 4 Messungen von je 100s Messdauer aufgenommen werden. Das zur Verfügung gestellte LABVIEW-Programm wird aus den aufgenommenen Bewegungsabläufen der Gleiter live die Eigenfrequenzen berechnen. Grundlage hierfür ist eine Fourier-Analyse, mit der die Trajektorien $x(t)$ in eine Fourier-Reihe entwickelt werden. Da die Auslenkungen gerade eine Summe harmonischer Funktionen sind, gelingt dies auch mit einer endlichen Anzahl von Koeffizienten, welche genau den Eigenfrequenzen und den entsprechenden Amplituden entsprechen.

Die Eigenfrequenzen der zweiatomigen Basis sollten vor Ort gemittelt und notiert werden, weil sie für die Bearbeitung der folgenden Aufgabe wichtig sind.

Amplitudenverhältnis

Die im vorangegangenen Aufgabenteil er- und gemittelten Eigenfrequenzen sollen nun benutzt werden, um den Schrittmotor gezielt auf die entsprechenden Moden einzustellen. Dann sollen die maximalen Amplituden einer leichten leichten und einer schweren Masse aufgezeichnet werden. Dabei muss beachtet werden, dass die Eigenschwingungen mehrere Minuten brauchen, bis sie sich stabilisiert haben und höhere Anregungsmoden aufgrund der schwachen, aber immer noch vorhandenen Dämpfung abgeklungen sind. Im Versuch liegt außerdem eine Tabelle aus, aus der ersichtlich ist, welchen Wert die Anregungsamplitude des Schrittmotors für die verschiedenen Moden haben soll, um einerseits keine Resonanzkatastrophe auszulösen und andererseits dennoch gut messbare Amplituden der Gleiter zu erhalten.

Da die Wellenlängen der Eigenmoden aus der Interferenz-Bedingung der stehenden Welle

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

lauten und die Frequenz mit der Wellenlänge reziprok zusammenhängt, gehört zur kleinsten Frequenz auch die erste Mode, mit der im Versuch begonnen werden soll. Die optischen Frequenzen sind alle höher als die akustischen und sind zusätzlich durch die Frequenzlücke von diesen getrennt. Darüber hinaus entspricht der Erwartung, dass die Frequenz für die erste optische Mode die höchste aller optischen Frequenzen ist, also ist sie auch die höchste aller gemessenen Frequenzen.

Bei der Berechnung des Amplitudenverhältnisses (1.11) wurde nicht beachtet, dass die unterschiedlich schweren Massepunkte nicht an der gleichen Stelle j sondern nebeneinander liegen, eine der beiden Massen befindet sich also am Punkt $j - 1$. Daher haben die maximalen Auslenkungen allein schon aufgrund des räumlich verteilten Amplitudenmusters der stehenden Welle

unterschiedliche Werte. Um diesen Sachverhalt zu korrigieren, muss das gemessene Verhältnis durch den Quotienten der theoretischen Amplituden für eine stehende Welle dividiert werden. Dieser beträgt, wenn das leichte Teilchen an der Stelle j und das schwere an der Stelle $j \pm 1$ liegt

$$\xi(n, j) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{13}j\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{13}(j \pm 1)\right)} \quad (1.12)$$

2 Auswertung

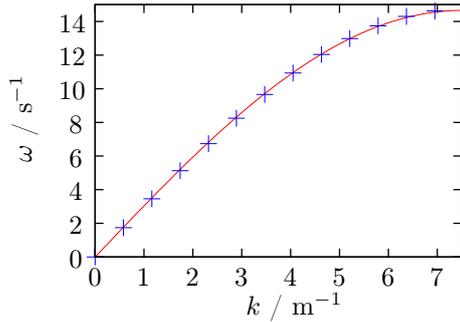


Abbildung 2.1: Einatomige Dispersion

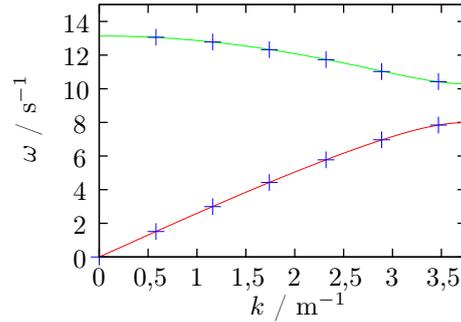


Abbildung 2.2: Zweiatomige Dispersion

2.1 Eigenfrequenzen

Die Kamera war bereits positioniert und kalibriert, sodass an der Messapparatur keine Veränderungen vorgenommen wurden. Die Kamera war so aufgestellt, dass die Gleiter mit den Indizes 8 und 9 beobachtet wurden. Die Reflektorstreifen der Nachbargleiter wurden mit Butterbrotpapier so abgedeckt, dass die Kamera sie nicht detektieren konnte und so nur die beiden intendierten Gleiter aufgenommen hat.

Die Länge des Modells, die im einatomigen Fall insgesamt 13 Einheitszellen entspricht, wurde mit einem Maßband von Federende zu Federende gemessen und beträgt $L = (5,427 \pm 0,001)$ m. Aufgrund der Kleinheit dieses Fehlers wird dieser im Folgenden vernachlässigt. Aus diesem Wert für die Länge ergeben sich bei der ein- und zweiatomige Kette folgende Werte für die Gitterkonstante und die Größe der Brillouin-Zone:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{L}{13} = 0,417 \text{ m} & a_2 &= 2a_1 = 0,835 \text{ m} \\
 k_{1,max} &\stackrel{(1.3)}{=} \frac{\pi}{a_1} = 7,53 \text{ m}^{-1} & k_{2,max} &\stackrel{(1.3)}{=} \frac{\pi}{a_2} = 3,76 \text{ m}^{-1}
 \end{aligned}$$

Die originalen Messdaten der Eigenfrequenzen sind in Anhang A.1 in den Tabellen A.1 und A.2 notiert. Für die ein- und zweiatomige Kette wurden jeweils 4 Messungen von je etwas über 100 s aufgenommen. Falls nach dieser Zeit einer der Fourier-Peaks noch nicht klar abgegrenzt war, wurde die Messzeit entsprechend verlängert, bevor die Werte gespeichert wurden. So wurde sicher gestellt, dass bei jeder Messung alle 12 Eigenfrequenzen gemessen werden konnten.

Das LABVIEW-Programm, das aus den Trajektorien der Gleiter die Eigenfrequenzen berechnet hat, hat die Frequenzen f in Hz gemessen. Da im Weiteren allerdings die Kreisfrequenzen ω von Bedeutung sind, werden diese direkt über $\omega = 2\pi f$ umgerechnet. Das gemittelte Ergebnis befindet sich in Tabelle 2.1 für die einatomige und in Tabelle 2.2 für die zweiatomige Kette. Die den einzelnen Moden entsprechenden k -Werte wurden mit Formel (1.2) berechnet und die Dispersion in den Abbildungen 2.1 für die einatomige und in Abbildung 2.2 für die zweiatomige Kette aufgetragen. Dabei wurde jeweils der Ursprung $(0, 0)$ in die Datenmenge mit aufgenommen. Der linke Rand der Grafik entspricht genau dem Rand der Brillouin-Zone.

Das Ergebnis für die Masse M der schweren Gleiter vorausnehmend und unter Verwendung der angegebenen Masse m der leichten Gleiter sowie der berechneten Gitterkonstanten wurden die theoretischen Verläufe der Dispersionen (1.6) bzw. (1.9) ebenfalls in die Abbildungen eingezeichnet. Einzig die Federhärten D wurden für jede Kurve getrennt mit Hilfe von GNUPLOT

Tabelle 2.1: Gemittelte Eigenfrequenzen, einatomige Basis

Mode n	ω / s^{-1}	Mode n	ω / s^{-1}
1	$1,7378 \pm 0,0010$	7	$10,9311 \pm 0,0026$
2	$3,4618 \pm 0,0013$	8	$12,0397 \pm 0,0023$
3	$5,1297 \pm 0,0008$	9	$12,9845 \pm 0,0024$
4	$6,7337 \pm 0,0017$	10	$13,7368 \pm 0,0030$
5	$8,2475 \pm 0,0017$	11	$14,2961 \pm 0,0037$
6	$9,6563 \pm 0,0006$	12	$14,6257 \pm 0,0010$

Tabelle 2.2: Gemittelte Eigenfrequenzen, zweiatomige Basis

Mode n	$\omega_{ak} / \text{s}^{-1}$	$\omega_{op} / \text{s}^{-1}$
1	$1,5091 \pm 0,0022$	$13,0635 \pm 0,0020$
2	$2,9948 \pm 0,0019$	$12,7786 \pm 0,0030$
3	$4,4289 \pm 0,0018$	$12,3248 \pm 0,0013$
4	$5,7721 \pm 0,0021$	$11,7286 \pm 0,0027$
5	$6,9660 \pm 0,0022$	$11,0241 \pm 0,0019$
6	$7,8353 \pm 0,0025$	$10,4260 \pm 0,0014$

an die Datenpunkte gefittet, da die in Kapitel 2.4 berechneten Werte sichtbare Abweichungen verursachten. Die so gefitteten Werte betragen

$$\begin{aligned}
 D_{\text{einatomig}} &= (27,03 \pm 0,08) \text{ N/m} \\
 D_{\text{akustisch}} &= (26,38 \pm 0,05) \text{ N/m} \\
 D_{\text{optisch}} &= (26,96 \pm 0,06) \text{ N/m}
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Diese werden dann in Kapitel 2.4 weiter diskutiert.

2.2 Schallgeschwindigkeiten

Im Bereich für kleine k ist die Dispersion sowohl im ein- als auch im zweiatomigen Fall näherungsweise linear. So lässt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwellen, welche der Steigung der Kurve im Ursprung entspricht, laut (1.1) bequem als Quotient des ersten $\omega(k)$ -Wertepaars schreiben, da sich die Differenz zum Nullpunkt genau durch diese Werte ergibt:

$$v_s = \frac{\omega}{k}$$

Der Fehler auf diesen Quotienten beträgt durch die Fortpflanzung der statistischen Abweichungen der Kreisfrequenz und unter der Annahme, dass k aufgrund der vernachlässigbaren Fehler von L nicht fehlerbehaftet ist

$$\begin{aligned}
 \sigma_{v_s} &= \frac{\partial v_s}{\partial \omega} \cdot \sigma_\omega \\
 &= \frac{1}{k} \sigma_\omega
 \end{aligned}$$

Die Schallgeschwindigkeiten und ihre Fehler betragen also den jeweiligen Fällen

$$\boxed{\begin{aligned} v_{s,1} &= (3,002 \pm 0,002) \text{ m/s} \\ v_{s,2} &= (2,604 \pm 0,004) \text{ m/s} \end{aligned}} \quad (2.2)$$

2.3 Massenverhältnis

Das theoretische Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten berechnet sich aus (1.7) und (1.10) und lautet

$$\frac{v_{s,1}}{v_{s,2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{m+M}{m}}$$

Daraus lässt sich eine Relation für das Massenverhältnis $\gamma = M/m$ aufstellen:

$$\gamma = 2 \left(\frac{v_{s,1}}{v_{s,2}} \right)^2 - 1$$

Die Fortpflanzung der Fehler der Schallgeschwindigkeiten ergibt sich durch

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^2 &= \left(\frac{\partial \gamma}{\partial v_{s,1}} \right)^2 \sigma_{v_{s,1}}^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial v_{s,2}} \right)^2 \sigma_{v_{s,2}}^2 \\ &= 16 \frac{v_{s,1}^2}{v_{s,2}^4} \cdot \sigma_{v_{s,1}}^2 + 16 \frac{v_{s,1}^4}{v_{s,2}^6} \cdot \sigma_{v_{s,2}}^2 \end{aligned}$$

Mit den Werten aus (2.2) ergibt sich damit für das Massenverhältnis

$$\boxed{\gamma = 1,652 \pm 0,008}$$

Die Vorbereitungshilfe gibt die Masse des leichten Gleiters mit $m = 0,504 \text{ kg}$ an, sodass sich die Masse des beschwerten Gleiters einfach berechnen lässt:

$$M = \gamma m \pm \sigma_\gamma m = (0,833 \pm 0,004) \text{ kg}$$

2.4 Federkonstante

Zur Berechnung der Federhärte des Modells wird die Dispersionsrelation der einatomigen Kette (1.6) und ein beliebiges Wertepaar $\omega(k)$ herangezogen. Die Federhärte beträgt damit

$$D_1 = \frac{\omega^2 m}{4 \sin^2 \left(\frac{ka_1}{2} \right)}$$

mit einer Standardabweichung von

$$\sigma_{D_1} = \frac{\omega m}{2 \sin^2 \left(\frac{ka_1}{2} \right)} \cdot \sigma_\omega$$

sodass sich unter Verwendung des ersten Wertepaars aus Tabelle 2.1 insgesamt folgender Wert ergibt:

$$\boxed{D_1 = (26,189 \pm 0,029) \text{ N/m}}$$

Die selbe Überlegung lässt sich auch mit der Dispersion (1.9) der zweiatomigen Kette durchführen. Dabei soll das erste Paar des akustischen Astes benutzt werden:

$$D_2 = \omega^2 \cdot \left[\frac{1}{m} + \frac{1}{M} - \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM} \sin^2\left(\frac{ka_2}{2}\right)} \right]^{-1} \quad (2.3)$$

In dieser Relation sind sowohl ω als auch M fehlerbehaftet, sodass die gaußsche Fehlerfortpflanzung durch

$$\begin{aligned} \sigma_{D_2}^2 &= \left(\frac{\partial D_2}{\partial \omega}\right)^2 \sigma_\omega^2 + \left(\frac{\partial D_2}{\partial M}\right)^2 \sigma_M^2 \\ &= \frac{4\omega^2}{\zeta_2^2} \cdot \sigma_\omega^2 + \left(\frac{\partial D_2}{\partial M}\right)^2 \sigma_M^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

gegeben ist. Für die Ableitung nach M werden folgende Hilfsausdrücke verwendet:

$$\begin{aligned} \zeta_1(M) &= \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM} \sin^2\left(\frac{ka_2}{2}\right) \\ \zeta_2(M) &= \frac{1}{m} + \frac{1}{M} - \sqrt{\zeta_1(M)} \end{aligned}$$

Damit lässt sich Gleichung (2.3) schreiben als

$$D_2 = \frac{\omega^2}{\zeta_2(M)}$$

sodass sich für die partielle Ableitung nach M schrittweise durch Anwendung der Kettenregel ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_2}{\partial M} &= -\frac{\omega^2}{\zeta_2(M)^2} \cdot \frac{\partial \zeta_2}{\partial M} \\ &= -\frac{\omega^2}{\zeta_2(M)^2} \cdot \left[-\frac{1}{M^2} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta_1(M)}} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial M} \right] \\ &= -\frac{\omega^2}{\zeta_2(M)^2} \cdot \left[-\frac{1}{M^2} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta_1(M)}} \cdot \left(-\frac{2}{mM^2} \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{ka_2}{2}\right) \right) - \frac{2}{M^3} \right) \right] \end{aligned}$$

In Gleichung (2.4) eingesetzt ergibt sich somit der Gesamtfehler. Der mit dieser Methode letztendlich berechnete Wert beträgt

$$\boxed{D_2 = (26,21 \pm 0,11) \text{ N/m}}$$

Eine andere Möglichkeit, die Federkonstante zu berechnen, besteht in der Umformung der Schallgeschwindigkeit (1.7):

$$D_3 = \frac{mv_{s,1}^2}{a_1^2}$$

Auf diese Größe ergibt sich dabei ein Fehler von

$$\sigma_{D_3} = \frac{2mv_{s,1}}{a_1^2} \cdot \sigma_{v_{s,1}}$$

und damit ein Gesamtwert von

$$D_3 = (26,062 \pm 0,028) \text{ N/m}$$

Die auf verschiedene Weisen berechneten Federhärten D_1 , D_2 und D_3 unterscheiden sich nur geringfügig und befinden sich im Fall der durch die Dispersionen berechneten Geschwindigkeiten innerhalb der jeweiligen Standardabweichungen. Lediglich der durch die Schallgeschwindigkeit berechnete Wert befindet sich außerhalb davon, was auf den kleinen Fehler hinweist, der durch die lineare Dispersionsnäherung in Kauf genommen wurde.

Auffällig ist, dass die an die gesamte Dispersion gefitteten Federhärten aus (2.1) etwas größer sind, als die hier berechneten Werte. Da in diesem Kapitel allerdings nur einzelne Wertepaare zur Berechnung herangezogen und der Fit an die Dispersionsrelation alle Wertepaare berücksichtigt hat, ist diese Abweichung von einigen Prozentpunkten nicht verwunderlich. Tendenziell scheinen dabei Moden mit höherer Frequenz zu einer größeren berechneten Federhärte zu führen, was auf nichtlineare Effekte der Federn oder andere unerkannte, aber geringfügige systematische Fehler hindeutet.

2.5 Amplitudenverhältnisse

Nachdem mit Hilfe des Schrittmotors die jeweilige Eigenmode angeregt und einige Minuten gewartet wurde, bis diese sich eingestell hat und andere angeregte Moden in Form von Schwebungen langsam ausgeklungen waren, wurden die Amplituden eines schweren und eines leichten Gleiters insgesamt 20 Mal gemessen und automatisch aufgezeichnet. Da die Software immer nur lokale Betragsmaxima gesucht hat, musste der erste Wert grundsätzlich verworfen werden: die aktuelle Amplitude am Anfang der Messung stellt in der Umgebung bis zum nächsten Maximum in der Hälfte aller Fälle ein lokales Maximum dar und wurde daher auch als solches aufgezeichnet, obwohl sich dieser Wert meistens auf einer abfallenden oder ansteigenden Flanke befand. Daher enthalten die Tabellen A.3 und A.4, in denen die ursprünglichen Messwerte für die akustischen bzw. optischen Moden dargestellt sind, nur 19 Messwerte pro Messung und Gleiter.

Die so ermittelten Amplituden enthalten Fehler, z. B. durch immer noch vorhandene und in den Messwerten teilweise deutlich erkennbare Schwebungen sowie die Ungenauigkeit der Kamera. Diese Fehler sind aufgrund der Vielzahl an Messungen statistischer Natur, sodass sich auf übliche Weise ein Mittelwert und eine Standardabweichung davon berechnen lassen, welche in Tabelle A.5 für die einzelnen Moden dargestellt sind.

Im Versuch war der beobachtete leichte Gleiter derjenige mit dem Index $j = 9$, der schwere hatte den Index $j - 1 = 8$. Dies ist in den Korrekturfaktor ξ aus (1.12) einzusetzen und die gemessenen Amplitudenverhältnisse durch diesen zu teilen. Aus den Amplitudenmittelwerten

Tabelle 2.3: Amplitudenverhältnisse der versch. Moden

Mode n	η_{ak}	η_{op}
1	$0,991 \pm 0,003$	$-1,66 \pm 0,05$
2	$0,966 \pm 0,006$	$-1,68 \pm 0,02$
3	$0,921 \pm 0,012$	$-1,85 \pm 0,04$
4	$0,838 \pm 0,011$	$-2,02 \pm 0,02$
5	$0,643 \pm 0,010$	$-2,79 \pm 0,09$
6	$0,290 \pm 0,002$	$-5,24 \pm 0,20$

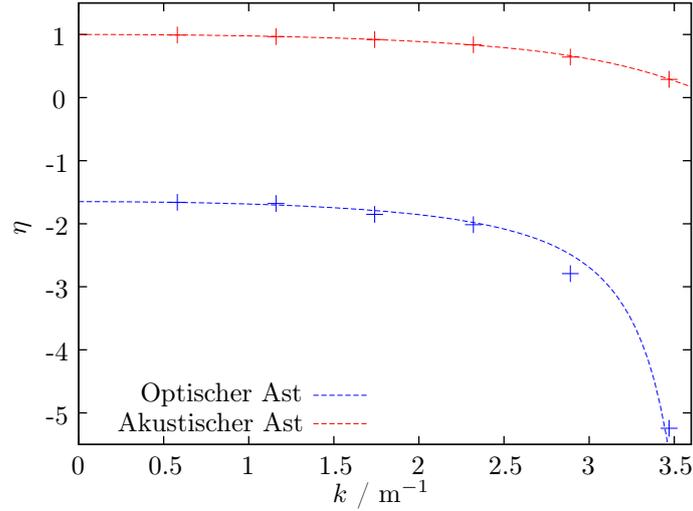


Abbildung 2.3: Gemessene Amplitudenverhältnisse über dem k -Vektor

und ihren Standardabweichungen berechnen sich das Verhältnis und der Fehler darauf durch

$$\eta = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{s_m}{s_M}$$

$$\Rightarrow \sigma_\eta^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial s_m} \right)^2 \sigma_{s_m}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial s_M} \right)^2 \sigma_{s_M}^2$$

$$= \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{1}{s_m^2} \cdot \sigma_{s_m}^2 + \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{s_m^2}{s_M^4} \cdot \sigma_{s_M}^2$$

Die Zahlenwerte und so berechneten Standardabweichungen befinden sich in Tabelle 2.3. Die Verhältnisse der optischen Moden tragen dabei ein negatives Vorzeichen, um zu verdeutlichen, dass die unterschiedlich schweren Massen hier gegenphasig schwingen. Die Werte sind außerdem in Abhängigkeit vom entsprechenden k -Vektor in Abbildung 2.3 dargestellt. Die Abweichungen sind in dieser Abbildung nicht enthalten, da die meisten wegen ihrer Kleinheit nicht erkennbar gewesen wären. In dieser Abbildung wurde ebenfalls der erwartete Verlauf aus Formel (1.11) mit den gemessenen Werten für a_2 und γ eingezeichnet. Es wurden für diese Kurve also keinerlei Parameter gefittet, in sofern ist es erstaunlich, wie gut die theoretischen mit den gemessenen Daten übereinstimmen.

A Gemessene Werte

A.1 Eigenfrequenzen

Tabelle A.1: Eigenfrequenzen der einatomigen Kette in Hz

Mode	Messung 1		Messung 2		Messung 3		Messung 4	
	Gleiter 1	Gleiter 2						
1	0,276448	0,276447	0,276509	0,276510	0,276812	0,276815	0,276523	0,276527
2	0,550649	0,550653	0,551056	0,551054	0,551160	0,551159	0,550969	0,550965
3	0,816490	0,816504	0,816215	0,816206	0,816476	0,816470	0,816505	0,816446
4	1,071729	1,071727	1,071354	1,071350	1,071673	1,071676	1,072073	1,072074
5	1,312354	1,312349	1,312894	1,312890	1,312877	1,312878	1,312395	1,312412
6	1,536789	1,536789	1,536945	1,536947	1,536818	1,536816	1,536730	1,536958
7	1,740379	1,740377	1,739418	1,739432	1,739724	1,739736	1,739494	1,739383
8	1,916620	1,916621	1,915989	1,916018	1,916320	1,916427	1,915738	1,915717
9	2,067166	2,067164	2,066389	2,066381	2,066278	2,066289	2,066448	2,066276
10	2,186471	2,186500	2,186348	2,186346	2,185540	2,185598	2,186912	2,186483
11	2,275771	2,275783	2,274702	2,274682	2,274781	2,274794	2,275850	2,275964
12	2,327852	2,327850	2,327655	2,327659	2,327965	2,327900	2,327588	2,327541

Tabelle A.2: Eigenfrequenzen der zweiatomigen Kette in Hz

Mode	Messung 1		Messung 2		Messung 3		Messung 4		
	Gleiter 1	Gleiter 2							
Akustisch	1	0,239948	0,239948	0,240161	0,240162	0,240716	0,240716	0,239909	0,239908
	2	0,476751	0,476768	0,476177	0,476137	0,476893	0,476892	0,476721	0,476722
	3	0,705102	0,705121	0,704929	0,704934	0,704428	0,704427	0,705030	0,705015
	4	0,918345	0,918343	0,918849	0,918845	0,919074	0,919076	0,918347	0,918346
	5	1,108315	1,108305	1,109205	1,109196	1,108559	1,108562	1,108605	1,108599
	6	1,246659	1,246672	1,247352	1,247365	1,247432	1,247422	1,246655	1,246668
Optisch	1	2,079300	2,079281	2,078675	2,078665	2,079450	2,079443	2,079078	2,079051
	2	2,033334	2,033343	2,034028	2,034022	2,034401	2,034392	2,033387	2,033366
	3	1,961844	1,961836	1,961538	1,961535	1,961537	1,961583	1,961248	1,961352
	4	1,866190	1,866194	1,866373	1,866366	1,866900	1,866893	1,867196	1,867198
	5	1,754366	1,754350	1,754870	1,754914	1,754719	1,754683	1,754208	1,754168
	6	1,659109	1,659128	1,659187	1,659197	1,659467	1,659476	1,659611	1,659608

A.2 Amplituden

Tabelle A.3: Amplituden der akustischen Moden in mm

1. Mode		2. Mode		3. Mode	
Gleiter 1	Gleiter 2	Gleiter 1	Gleiter 2	Gleiter 1	Gleiter 2
188,097293	215,620451	158,828763	116,671340	32,356494	68,337988
188,365811	215,620451	158,828763	116,671340	32,222234	68,337988
188,365811	215,754710	158,694504	116,402821	32,222234	68,337988
188,365811	215,888970	158,694504	116,268562	32,222234	68,203729
188,365811	215,888970	158,425985	116,268562	32,087975	68,069470
188,500070	216,023229	158,291726	116,268562	32,222234	67,935211
188,500070	216,157488	158,291726	116,134303	32,222234	67,935211
188,634330	216,157488	158,023207	116,000043	32,222234	67,800951
188,634330	216,291747	157,888948	115,865784	32,222234	67,800951
188,634330	216,426007	157,754689	115,731525	32,222234	67,532433
189,037108	216,560266	157,486170	115,731525	32,087975	67,532433
189,037108	216,828785	157,351911	115,731525	31,953716	67,263914
189,171367	216,963044	157,217651	115,597265	31,953716	67,263914
189,171367	216,963044	157,217651	115,597265	31,953716	66,995395
189,171367	216,694525	157,217651	115,463006	31,819456	66,995395
189,171367	216,963044	157,083392	115,328747	31,685197	66,726877
189,305626	216,963044	156,680614	115,060228	31,550938	66,726877
189,305626	216,963044	156,680614	115,060228	31,550938	66,592617
189,439886	216,963044	156,546355	114,925969	31,416678	66,592617

4. Mode		5. Mode		6. Mode	
Gleiter 1	Gleiter 2	Gleiter 1	Gleiter 2	Gleiter 1	Gleiter 2
75,319473	134,393569	71,694471	26,986121	17,185192	103,916705
75,319473	134,259309	71,694471	26,851862	16,916673	103,916705
75,319473	134,125050	71,291693	26,717603	17,185192	103,916705
75,050954	134,125050	71,291693	26,851862	17,185192	103,648187
75,050954	133,990791	71,157434	26,717603	17,185192	103,782446
75,050954	133,856531	71,157434	26,449084	16,916673	103,782446
74,782435	133,588013	71,157434	26,583343	17,185192	103,648187
74,513917	133,185235	70,620397	26,449084	17,185192	103,782446
74,245398	132,782457	70,620397	26,314825	17,185192	103,782446
74,379657	132,916716	70,620397	26,449084	17,050932	103,648187
74,379657	132,648198	70,083360	26,314825	16,916673	103,916705
74,245398	132,379679	70,083360	26,180565	16,916673	103,782446
73,842620	132,111160	70,083360	26,314825	16,916673	103,782446
73,708361	131,708383	69,680582	26,314825	16,916673	104,185224
73,439842	131,574123	69,680582	26,314825	16,782414	104,050965
73,439842	131,171345	69,680582	26,046306	16,916673	104,050965
73,305583	131,037086	69,412063	26,180565	17,185192	104,319483
73,439842	131,037086	69,412063	26,180565	17,050932	104,319483
73,305583	130,902827	69,143544	25,912047	17,050932	104,050965

Tabelle A.4: Amplituden der optischen Moden in mm

1. Mode		2. Mode		3. Mode	
Gleiter 1	Gleiter 2	Gleiter 1	Gleiter 2	Gleiter 1	Gleiter 2
13,409721	9,234997	31,373687	13,156708	10,626571	11,132599
13,409721	9,108490	31,373687	13,283214	10,626571	11,132599
13,662735	9,361503	31,500194	13,662735	10,500065	10,879585
13,915748	9,488010	31,753208	13,283214	11,006092	11,512119
13,662735	9,361503	31,500194	13,283214	10,626571	11,132599
13,915748	9,488010	31,626701	13,283214	10,626571	11,385612
13,915748	9,614517	31,120674	13,156708	10,753078	11,259105
13,915748	9,488010	31,626701	13,536228	10,500065	11,006092
14,168762	9,741024	31,753208	13,283214	10,626571	11,132599
14,168762	9,614517	31,626701	13,283214	10,753078	11,385612
13,915748	9,614517	31,626701	13,409721	10,753078	11,385612
14,421776	9,867531	31,879714	13,409721	10,373558	10,879585
14,421776	9,614517	31,753208	13,283214	10,626571	11,132599
14,421776	9,614517	31,753208	13,409721	10,753078	11,132599
14,168762	9,741024	31,879714	13,409721	10,753078	11,259105
14,168762	9,741024	31,753208	13,409721	10,500065	11,132599
14,042255	9,741024	31,500194	13,662735	10,626571	11,132599
14,295269	9,741024	31,626701	13,156708	10,626571	11,006092
13,915748	9,741024	31,626701	13,283214	10,753078	11,259105

4. Mode		5. Mode		6. Mode	
Gleiter 1	Gleiter 2	Gleiter 1	Gleiter 2	Gleiter 1	Gleiter 2
39,343616	29,096565	64,644977	5,566299	18,849514	6,325340
39,343616	29,223072	64,644977	5,692806	19,482048	6,198833
39,217109	29,602592	64,518470	5,819313	19,102527	6,451847
39,470123	29,349578	64,012443	5,566299	19,482048	6,831367
39,343616	29,223072	64,391963	5,692806	19,482048	6,451847
39,090602	28,970058	64,391963	5,566299	19,355541	6,704861
39,596629	29,349578	64,265456	5,819313	19,355541	6,072327
39,343616	29,096565	64,265456	5,439793	19,355541	6,704861
39,090602	28,970058	64,644977	5,186779	19,355541	6,831367
38,964095	29,096565	64,518470	5,566299	18,849514	6,578354
39,090602	29,602592	64,391963	5,819313	19,355541	6,704861
38,964095	28,970058	64,391963	5,439793	19,229034	6,704861
38,964095	29,349578	64,518470	5,439793	19,735061	6,831367
38,964095	28,717044	64,644977	5,819313	19,608555	6,451847
39,470123	28,970058	64,138949	5,439793	19,608555	6,451847
38,964095	28,717044	64,138949	5,439793	19,608555	6,704861
39,470123	28,843551	64,391963	5,439793	19,735061	6,198833
38,837589	28,843551	64,391963	5,566299	19,735061	6,831367
38,837589	28,717044	64,265456	5,313286	19,355541	6,451847

Tabelle A.5: Gemittelte Amplituden der einzelnen Moden in mm

Mode	Akustisch		Optisch	
	$s_{0,m}$	$s_{0,M}$	$s_{0,m}$	$s_{0,M}$
1	$188,80 \pm 0,41$	$216,40 \pm 0,51$	$14,00 \pm 0,31$	$9,57 \pm 0,20$
2	$157,75 \pm 0,76$	$115,83 \pm 0,53$	$31,61 \pm 0,19$	$13,35 \pm 0,15$
3	$32,01 \pm 0,28$	$67,53 \pm 0,62$	$10,65 \pm 0,14$	$11,17 \pm 0,17$
4	$74,32 \pm 0,74$	$132,73 \pm 1,23$	$39,18 \pm 0,24$	$29,09 \pm 0,27$
5	$70,45 \pm 0,82$	$26,43 \pm 0,29$	$64,40 \pm 0,19$	$5,56 \pm 0,18$
6	$17,04 \pm 0,14$	$103,91 \pm 0,21$	$19,40 \pm 0,26$	$6,55 \pm 0,24$