

Hyperfeinstruktur

Kevin Edelmann, Julian Stöckel
Gruppe 109

4.5.2011

Zusammenfassung

Der Einfluss z. B. des Kernspins oder Quadrupolmoments kann in einem Atom die Entartung von elektronischen Energieniveaus aufheben und zu Aufspaltungen führen, die man Hyperfeinstruktur nennt. Ziel dieses Versuchs ist es, durch optisch angeregtes ^{205}Tl und ein Fabry-Pérot-Interferometer die Größe dieser Aufspaltung zu messen und außerdem auf den Kerndrehimpuls zurückzuschließen.

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbereitung	2
1.1	Grundlagen des Experiments	3
1.1.1	Hyperfeinstruktur	3
1.1.2	Fabry-Pérot-Interferometer	4
1.2	Zur Auswertung	4
1.2.1	Bestimmung der Spaltbreite	4
1.2.2	Bestimmung der Hyperfeinaufspaltung	5
2	Auswertung	6
2.1	Durchführung des Versuchs	7
2.2	Auswertung	7
2.2.1	Eichung mit Hilfe der Laserdiode	7
2.2.2	Bestimmung der Hyperfeinaufspaltung	8
2.2.3	Kerndrehimpuls	9

1 Vorbereitung

1.1 Grundlagen des Experiments

1.1.1 Hyperfeinstruktur

Als Hyperfeinstruktur versteht man die Aufspaltung der Energieniveaus durch Wechselwirkungen der Elektronen mit dem Spin und elektrischen Quadrupolmoment des Kerns, oder durch Korrekturen aufgrund der Beweglichkeit des Kerns. Nicht betrachtet werden Feinstruktureffekte, das sind Effekte, die aufgrund relativistischer Korrekturen und der Spin-Bahn-Kopplung die Entartung zwischen Zuständen unterschiedlichen Gesamtdrehimpulses aufheben. Diese sind in der Größenordnung $\Delta E \propto m_e c^2 \alpha^4$, die hier untersuchten Hyperfeinstruktureffekte liegen zwei Größenordnungen darunter.

Elektrisches Quadrupolmoment

Einige Atomkerne besitzen aufgrund ihrer inneren Struktur ein elektrisches Quadrupolmoment. In einem elektrischen Feld, hier dem Feld der Elektronen, findet eine Wechselwirkung zwischen dem Quadrupolmoment und dem Feldgradienten statt. Sowohl das Quadrupolmoment als auch der Feldgradient stellen Tensoren zweiter Stufe dar, denen sphärische Tensoroperatoren zugeordnet werden können. Das Störungspotential im Hamiltonoperator lässt sich damit einfach darstellen:

$$V_{\text{quad}} = -e \sum_m (-1)^m Q_m^{(2)} \underline{V}_{-m}^{(2)}$$

wobei die Q_m die sphärischen Quadrupolmomente sind und $\underline{V}$ die sphärischen Momente des Feldgradienten. Das im Experiment untersuchte Thallium besitzt kein elektrisches Quadrupolmoment, sodass wir diesen Effekt nicht sehen werden.

Isotopieeffekte

Als Isotopieeffekte bezeichnet man Verschiebungen der Spektrallinien durch die bei der naiven Berechnung der Energieniveaus als unendlich genäherte Kernmasse (im Vergleich zur Masse der Elektronen). Da dies zu Ungenauigkeiten auf der Größenordnung der Hyperfeinstruktur führt, zählt man die Korrektur dazu. Die leichte Verschiebung von Spektrallinien unterschiedlicher Isotope ermöglicht die Bestimmung der Zusammensetzung von Stoffmengen.

Wir werden mit sehr reinem Thallium 205 arbeiten, sodass wir diesen Effekt nicht in der Beobachtung erwarten, wobei die Reinheit natürlichen Grenzen unterliegt.

Magnetische Hyperfeinstruktur

Der Spin der Kerns – falls er nicht verschwindet – sorgt für ein magnetisches Moment, das mit dem von den Elektronen erzeugten Magnetfeld wechselwirkt. Analog zum Feinstrukturterm der Spin-Bahn-Wechselwirkung beschreibt man die Wechselwirkungsenergie als Kernspin-Gesamtdrehimpuls-Kopplung:

$$H_{\text{magn}} = \text{const.} \cdot \vec{I} \vec{J}$$

wobei $\vec{I}$ den Kernspin und $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ den Gesamtdrehimpuls der Elektronen beschreibt. Das Lösungsverfahren ist analog zum Feinstrukturfall, wobei allerdings der Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie deutlich komplizierter ist und i.d.R. experimentell bestimmt werden muss. Wir erhalten also eine Energieaufspaltung von

$$\Delta E_{\text{magn}} = \langle \text{const.} \cdot \vec{I} \vec{J} \rangle = \frac{1}{2} \langle \text{const.} \rangle (F(F+1) - I(I+1) - J(J+1))$$

Dies wird der einzige Hyperfeinstruktureffekt sein, den wir bei Thallium 205 beobachten können. Mit seiner Hilfe werden wir den Kernspin bestimmen.

1.1.2 Fabry-Pérot-Interferometer

Ein Fabry-Pérot-Interferometer besteht aus zwei planparallelen, justierbaren, hochverspiegelten Glasplatten. Die Funktionsweise ist dabei recht einfach: Ein einfallender Strahl tritt zu geringem Teil in den Raum zwischen den Platten ein, der größte Teil wird wieder wegreflektiert und ist für den weiteren Verlauf des Experiments nicht interessant. Zwischen den Platten wird der Strahl hin- und herreflektiert, wobei bei jeder Reflexion ein Strahl mit geringer Intensität das Interferometer auf der Seite des Bildschirms verlässt. Der Unterschied in der Laufstrecke zwischen zwei unter einem Winkel θ transmittierten Strahlen beträgt $\delta l = 2d \cos \theta$, wobei d den Plattenabstand beschreibt. Konstruktive Interferenz tritt auf, wenn die Wellenlänge des Strahls gerade ein Vielfaches von δl ist, also bei $n\lambda = 2d \cos \theta \approx 2d(1 - \frac{1}{2}\theta^2)$. Die ausfallenden Strahlen werden mit einer Linse der Brennweite f auf einen Schirm gebündelt, womit wir den Zusammenhang zwischen Radius und Brennweite aus der Strahlenoptik verwenden können: $\frac{r}{f} = \tan \theta \approx \theta$. Setzen wir dies in die Interferenzbedingung ein, so erhalten wir

$$\lambda = \frac{2d}{n} \left(1 - \frac{r^2}{2f^2} \right) \quad (1.1)$$

Man definiert beim Fabry-Pérot-Interferometer die sog. Finesse als Verhältnis zweier benachbarter Interferenzpeaks zur Peakbreite: $\mathcal{F} = \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda}$. Mit diesem Ausdruck ergibt sich das Auflösungsvermögen des Interferometers:

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \mathcal{F} \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2d \cos \theta \pi \sqrt{R}}{\lambda(1 - R)}$$

R bezeichnet hier den Reflexionskoeffizienten der verwendeten Platten, die Auflösung wird also mit besser verspiegelten Platten besser.

1.2 Zur Auswertung

1.2.1 Bestimmung der Spaltbreite

Bevor wir quantitative Aussagen an Hand der Interferenzfiguren treffen können, müssen wir die Spaltbreite unseres Interferometers bestimmen. Hierzu dient eine 650 nm-Laserdiode, deren Licht durch einen Streufilter (Butterbrotpapier) annähernd isotrop gemacht wird. Davon nehmen wir dann ein Interferenzbild auf und können aus der bekannten Wellenlänge und den gemessenen Radien der Maxima die Spaltbreite bestimmen. Hierzu formen wir Formel (1.1) um und erhalten

$$n = \frac{2d}{\lambda} - \frac{d}{\lambda f^2} r^2,$$

also eine lineare Abhängigkeit in r^2 . Führt man also eine lineare Rekursion der Ordnungen über r^2 durch, so erhält man aus der Steigung m die Spaltbreite nach

$$d = -m \cdot \lambda f^2 \quad (1.2)$$

1.2.2 Bestimmung der Hyperfeinaufspaltung

Ein analoges Vorgehen zur Bestimmung der Hyperfeinaufspaltung ist zwar möglich, doch gibt es eine elegantere Methode, bei der der Fehler gering gehalten wird. Zu Maxima auf dem Chip kommt es, wenn alle drei zur Hyperfeinstruktur beitragenden Wellenlängen konstruktiv interferieren. Man erhält also

$$n = \frac{2d}{\lambda_a} \left(1 - \frac{r_a^2}{2f^2} \right) = \frac{2d}{\lambda_b} \left(1 - \frac{r_b^2}{2f^2} \right)$$

Daraus erhält man

$$\Delta\lambda = \lambda_b - \lambda_a = \frac{1}{2f^2} (\lambda_b r_b^2 - \lambda_a r_a^2) \approx \frac{\Lambda}{2f^2} (r_b^2 - r_a^2) \quad (1.3)$$

wobei Λ den Mittelwert der Wellenlängen λ_a und λ_b bezeichnet. Diese Näherung ist gerechtfertigt, da für die Hyperfeinaufspaltung $\Delta\lambda \ll \lambda$ sehr gut gilt.

2 Auswertung

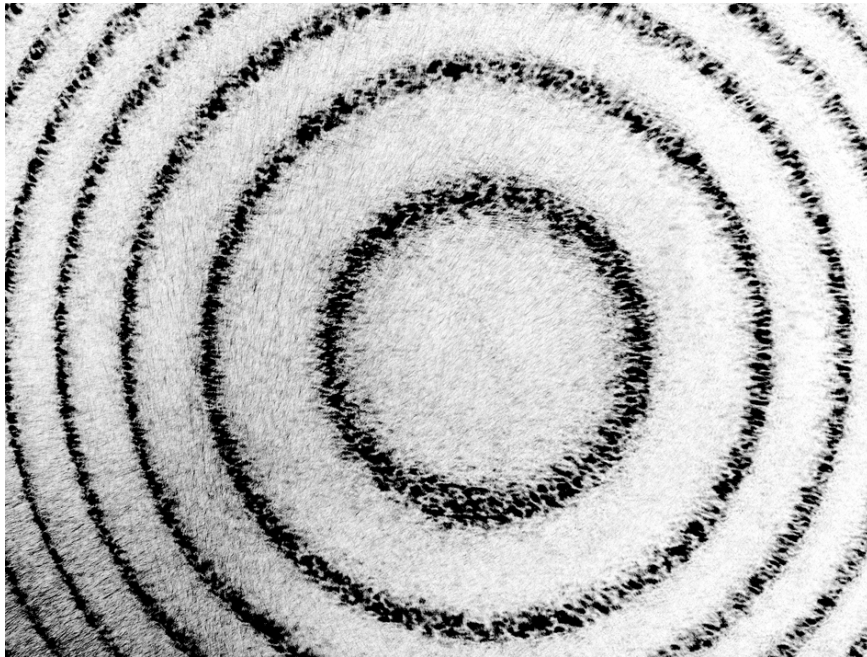


Abbildung 2.1: Das Interferenzmuster der Laserdiode

2.1 Durchführung des Versuchs

Die Durchführung des Versuchs erwies sich als recht einfach. Wir fanden die Apparatur bereits justiert vor, sodass lediglich Aufnahmen der Hyperfeinlinien im grünen und UV-Spektralbereich gemacht werden mussten, sowie eine Aufnahme des „Spektrums“ einer Laserdiode zur Eichung. In jede der Aufnahmen wurden vier Linien eingefügt und der Helligkeitsverlauf entlang der Linie digital vermessen. Um Anisotropien der Aufnahme entgegen zu wirken, waren die Linien jeweils um $\pi/4$ rotiert.

2.2 Auswertung

2.2.1 Eichung mit Hilfe der Laserdiode

Das vom Laser aufgenommene Bild ist in Abbildung 2.1 zu sehen. Die vorgeschlagene Auswertemethode in den Helligkeitsdaten nach Maxima zu suchen stellte sich als ungenau und problematisch dar, da die Position des Maximums bei geglätteten Kurven einiger Interpretation unterliegt. Stattdessen wurde das im Praktikum aufgenommene Bild mit Hilfe von INKSCAPE vermessen. Die daraus erhaltenen Daten liegen in Tabelle 2.1 vor. Aus der Rekursion der Ordnung über r^2

Tabelle 2.1: Vermessungsdaten des Laserbildes

Ordnung	Durchmesser / px	Radius / mm	Radius ² / mm ²
1	$483,5 \pm 4,8$	$1,558 \pm 0,015$	$2,42 \pm 0,04$
2	$877,3 \pm 16,0$	$2,83 \pm 0,05$	$8,0 \pm 0,2$
3	$1127,5 \pm 1,73$	$3,651 \pm 0,006$	$13,33 \pm 0,04$

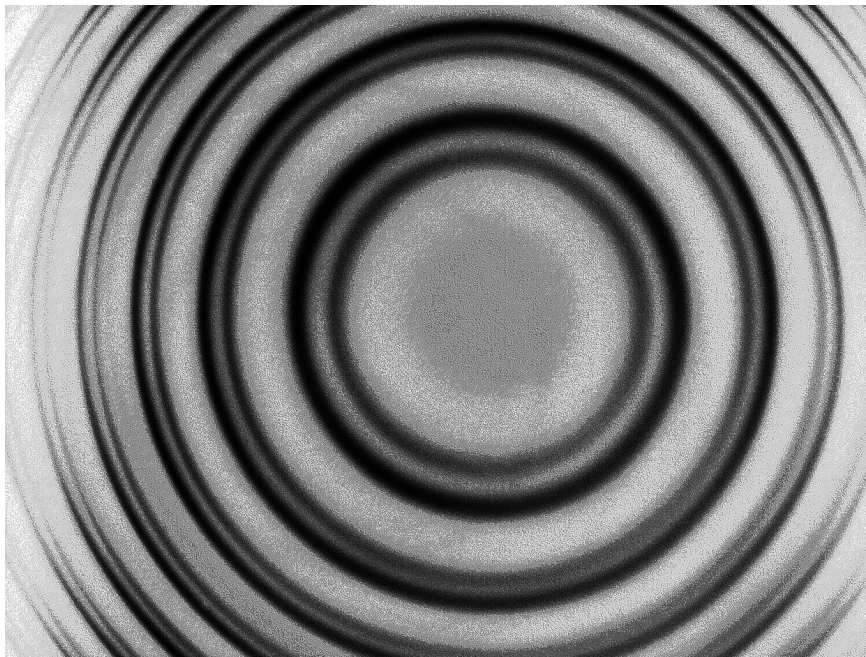


Abbildung 2.2: *Das Interferenzmuster der grünen Hyperfeinstruktur*

erhalten wir eine Steigung von $-0,183 \pm 0,002$ und damit einen Plattenabstand von

$$d = 2,68 \pm 0,03 \text{ mm}$$

Dieser Wert ist zwar etwas geringer als die in der Vorbereitungshilfe angegebenen 3 mm, erscheint uns aber realistisch, da die Apparatur ja vom Betreuer justiert war.

2.2.2 Bestimmung der Hyperfeinaufspaltung

Bei den Hyperfeinaufspaltungen sind wir analog zur Spaltbreitenbestimmung vorgegangen, um die Durchmesser zu bestimmen. Die zugehörigen Bilder sind in Abbildung 2.2 (Grün) und 2.3 (UV) zu sehen. Zunächst wurde mit den erhaltenen Daten eine Rekursion wie bei der Spaltbestimmung durchgeführt, um die Wellenlängen zu bestimmen. Wir erhielten für die grünen Linien

$$\lambda_1 = 541 \pm 6 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = 543 \pm 6 \text{ nm}$$

wobei bei der Fehlerfortpflanzung der Fehler auf die Steigung vernachlässigt wurde, da er jeweils $\ll 1\%$ war. Es ist deutlich zu sehen, dass bei dieser Berechnungsmethode der Fehler größer ist als die Hyperfeinaufspaltung. Für die ultravioletten Linien erhalten wir:

$$\lambda_1 = 348 \pm 3 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = 347 \pm 3 \text{ nm}$$

$$\lambda_3 = 343 \pm 4 \text{ nm}$$

Unsere Ergebnisse sind jeweils recht nahe an den Literaturwerten. Das Verwenden der in der Vorbereitungshilfe angegebenen Spaltbreite von 3 mm verbessert zwar die Ergebnisse bei den UV-Linien, doch wird die Situation bei den grünen Linien drastisch verschlechtert, sodass von dieser

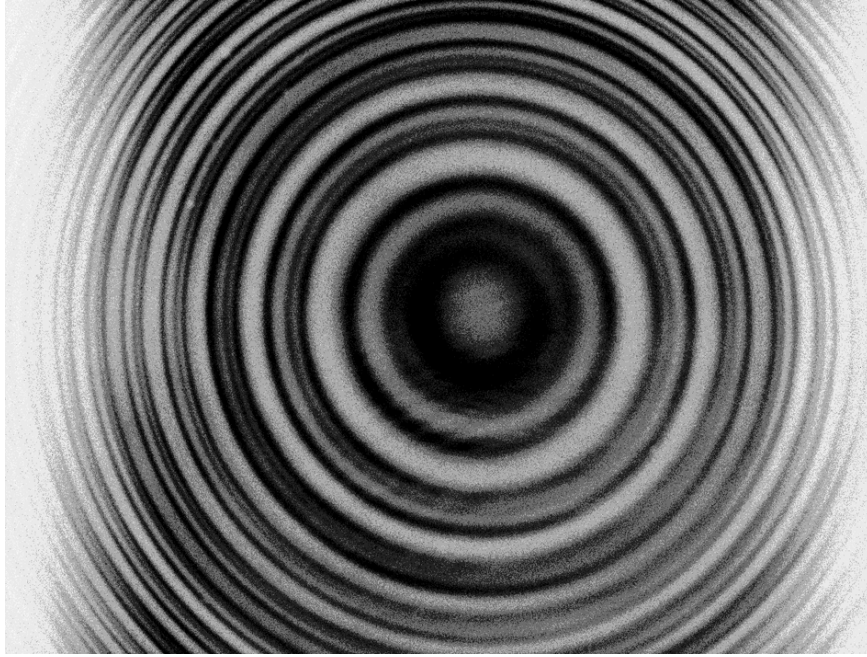


Abbildung 2.3: *Das Interferenzmuster der ultravioletten Hyperfeinstruktur*

Praktik abgesehen wurde. Um die Hyperfeinaufspaltungen zu berechnen, verwenden wir nun den zweiten Berechnungsansatz. Für die grünen Linien ist die mittlere Wellenlänge $\bar{\lambda} = 542 \pm 8 \text{ nm}$. Damit erhalten wir eine Hyperfeinaufspaltung von

$$\Delta\lambda = 14,9 \pm 0,2 \text{ pm}$$

Für die Hyperfeinaufspaltungen im UV-Bereich finden wir

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{12} &= 4,04 \pm 0,06 \text{ pm} \\ \Delta\lambda_{23} &= 6,5 \pm 0,1 \text{ pm} \\ \Delta\lambda_{13} &= 10,6 \pm 0,2 \text{ pm} \end{aligned}$$

was sehr gut mit der Erwartung $\lambda_{12} + \lambda_{23} = \lambda_{13}$ übereinstimmt. Der verlangte Vergleich mit dem gegebenen Termschema konnte nicht durchgeführt werden, da den Experimentatoren die in der Grafik verwendete Notation unbekannt war und hierzu auch keine Literatur angegeben war. Weitere Literaturwerte ließen sich auch mit ausgedehnter Recherche im Internet nicht beschaffen, sodass der Vergleich ausfallen muss.

2.2.3 Kerndrehimpuls

Es wurden drei Hyperfeinstrukturlinien beobachtet. Dies weist auf einen Kernspin von $\frac{1}{2}$ hin. Für solch ein $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ -System kommt es eigentlich zu einer Aufspaltung in vier Niveaus, allerdings ist einer der Übergänge unterdrückt, da er die Drehimpulserhaltung verletzen würde. Somit erwarten wir für einen Spin- $\frac{1}{2}$ -Kern eine dreifache Hyperfeinaufspaltung.