

Hyperfeinstruktur

Versuch Nr. 2
Vorbereitung - 3. Dezember 2012

Ausgearbeitet von Martin Günther und Nils Braun

1 Die Feinstruktur

Um Energien von Elektronen im Feld eines Atomkerns zu berechnen, setzt man zunächst die Schrödingergleichung mit der Annahme eines punktförmigen Kerns an (Coulomb-Potential). Dies ist insofern gerechtfertigt, dass der Kern viel kleiner ist als die "Elektronenwolke" ist und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen in der Nähe des Kerns damit vernachlässigbar wird.

Die Rechnung führt auf Bindungsenergien, die nur von der Hauptquantenzahl n in der Form $E_n = E_\infty/n^2$ abhängen. Alle weiteren Effekte werden störungstheoretisch betrachtet und führen zu Energiekorrekturen und der stückweisen Aufhebung der Entartung:

Die Spin-bahn-kopplung beschreibt die Wechselwirkung zwischen dem Spinmagnetischen Moment des Elektrons und dem Magnetfeld, das es aufgrund seiner Bewegung um den geladenen Kern erfährt. Die Energiekorrektur ist somit proportional zu $\vec{L} \cdot \vec{S}$

relativistische Korrekturen aus der Dirac-gleichung berücksichtigen z.B. die Erhöhung der relativistischen Masse, wenn Elektronen dem Kern näher kommen und dadurch höhere kinetische Energien erreichen. Dies führt zu einer Absenkung aller Terme, abhängig vom Bahndrehimpuls L .

Nach der Berücksichtigung dieser beiden Korrekturen ist die Entartung des Gesamtdrehimpulses J aufgehoben (d.h. die Energie hängt nur von n und J ab). Diese *Feinstrukturaufspaltung* ist aber etwa um den Faktor 10000 kleiner als die Abstände zwischen den Hauptniveaus.

Ein weiterer Korrekturterm aus der Quantenelektrodynamik führt zum *Lamb-shift*, der auch die L -Entartung aufhebt. Hierbei werden die ständig auftretenden Vakuumfluktuationen berücksichtigt, bei denen sich virtuelle Teilchen-Antiteilchen-Paare bilden und sofort wieder vernichten.

2 Die Hyperfeinstruktur

Das eigentliche Thema dieses Experiments ist die Hyperfeinstrukturaufspaltung, die nochmals um den Faktor 200 kleiner ist als die Feinstruktur. Hierbei spielen folgende Effekte eine Rolle:

magnetische Hyperfeinstruktur

Die magnetische Hyperfeinstruktur rührt von einer Wechselwirkung des Kernmagnetischen Moments $\vec{\mu}_I$ und des von den Elektronen erzeugten Magnetfeldsⁱ $\vec{B}_J = -B_J/|\vec{J}| \cdot \vec{J}$ am Ort des Kerns her (vgl. Spin-bahn-kopplung bei der Feinstruktur). Der entsprechende Energiekorrekturterm beträgt

$$E_{HFS} = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_J$$

ⁱDas Minuszeichen berücksichtigt die negative Ladung der Elektronen, sodass der Faktor B_J positiv ist.

Das magnetische Moment des Kerns ist gegeben durch

$$\vec{\mu}_I = g_I \frac{e}{2m_p} \vec{I}$$

mit dem Protonenspin I und dem gyromagnetischen Verhältnis $g_I = 5.585$ der Protonen. Durch die Hyperfeinstruktur koppeln der Drehimpuls der Elektronen und der Kernspin zum Gesamtdrehimpuls

$$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$$

und wir erhalten

$$E_{HFS} = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_J = g_I \frac{eB_J}{2m_p |\vec{J}|} \vec{I} \cdot \vec{J} = \frac{A}{2} (F(F+1) - J(J+1) - I(I+1))$$

mit der *Hyperfeinstrukturkonstante*

$$A = \frac{g_I e B_J}{2m_p \sqrt{J(J+1)}}$$

die im Allgemeinen noch von J abhängt. Bei einem festen Zustand (also festen I und J) gibt es dann

$$I + J - |I - J| + 1 = \begin{cases} 2J + 1 & : I \geq J \\ 2I + 1 & : I < J \end{cases}$$

Hyperfeinniveaus.

Quadrupolhyperfeinstruktur

Neben dem magnetischen Moment des Kerns spielen auch noch die elektrischen Momente eine Rolle. Das "Monopolmoment" wurde schon durch das Coulomb-gesetz beschrieben. Ein Dipolmoment kann es nicht geben, da der Kern nur positive und neutrale Teilchen enthält.

Eine asymmetrische Ladungsverteilung im Kern (z.B. bei elliptischen Kernen) kann aber durchaus zu einem Quadrupolmoment führen. Aufgrund der kürzeren Reichweite von Quadrupolfeldern betrifft dies ebenfalls vor allem Elektronen, die eine größere Aufenthaltswahrscheinlichkeit in Kernnähe haben (also hauptsächlich die S-Terme). Laut Vorbereitungshilfe ist die Quadrupolhyperfeinstruktur bei der verwendeten Ti^{205} Probe zu vernachlässigen.

Isotopiehyperfeinstruktur

Die Isotopiehyperfeinstruktur entsteht nicht in einzelnen Atomen, sondern wenn die Probe verschiedene Isotope desselben Elements enthält. Durch die unterschiedliche Nukleonenzahl haben die Kerne verschiedene Massen und Volumen.

Der Kernmasseneffekt führt zu einer Energieerhöhung aufgrund der unterschiedlich starken Mitbewegung des Kerns und den daraus resultierenden Änderungen in den Bahnradien. Bei schweren Kernen tritt er schwächer auf, da die relative Massenänderung beim hinzufügen weiterer Neutronen dann sehr klein ist.

Der Kernvolumeneffekt wird von der steigenden Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen in größeren Kernen verursacht. Dies führt ebenfalls zu einer Energieerhöhung bei größeren (und damit schwereren) Kernen.

”Dieselben” Spektrallinien verschiedener Isotope haben dadurch leicht unterschiedliche Wellenlängen und können als Mutiplett spektroskopiert werden.

Da unsere Probe isotonenrein ist, muss dieser Effekt ebenfalls nicht diskutiert werden.

3 Das Fabry-Pérot-Interferometer

Zur genauen Messung der Wellenlängen benutzen wir ein Fabry-Pérot-Interferometer. Zwischen den beiden parallelen, verspiegelten Scheiben wird der Lichtstrahl hin- und her reflektiert und kann konstruktiv interferieren, wenn der Plattenabstand ein Vielfaches der Wellenlänge beträgt.

Die Airy-Formel

Für eine genauere Betrachtung bestimmen wir die Transmissionsfunktion des Interferometers, indem wir Teilstrahlen betrachten, die verschieden oft reflektiert wurden. Es seien r und t die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten der Scheiben. Der unreflektierte Strahl hat nach dem Durchgang durch die erste Scheibe noch die Amplitude tA_0 . Wenn der Strahl nach $2n$ Reflexionen wieder bei der zweiten Platte ankommt, hat er also die Amplitude $tr^{2n}A_0$ und ist gegenüber dem ursprünglichen Strahl (mit $n = 0$) um $2n\frac{2\pi d}{\lambda}$ phasenverschoben. Nach dem Durchgang durch die zweite Platte hat der gesamte Strahl also die Amplitude

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} A_0 t^2 r^{2n} e^{2in\frac{2\pi d}{\lambda}} \right| = \left| A_0 t^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(r^2 e^{i\frac{4\pi d}{\lambda}} \right)^n \right| = \left| \frac{A_0 t^2}{1 - r^2 e^{i\frac{4\pi d}{\lambda}}} \right|$$

und die Intensität

$$I = I_0 \left| \frac{t^2}{1 - r^2 e^{i\frac{4\pi d}{\lambda}}} \right|^2 = I_0 \frac{t^4}{1 + r^4 - 2r^2 \cos\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)} = I_0 \frac{t^4}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)}$$

Dies ist die sogenannte Airy-Formel. Man erkennt, dass die Intensität Maxima hat, wenn der Plattenabstand d ein Vielfaches der Wellenlänge istⁱⁱ.

ⁱⁱWenn wir die Absorption vernachlässigen, also $r^2 + t^2 = 1$ gilt, ist das Interferometer in diesem Fall komplett

Dispersionsbereich, Finesse und Auflösungsvermögen

Beim Fabry-Pérot-interferometer ist der Plattenabstand d viel größer als die Wellenlänge λ (diese Näherung wird in allen folgenden Gleichungen gefordert). In diesem Fall gilt in sehr guter Näherung

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \approx \pi \left(\frac{2d}{\lambda_0} - (\lambda - \lambda_0) \frac{2d}{\lambda_0^2} \right) = \pi \left(\frac{2d}{\lambda_0} - \frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda} \right)$$

und benachbarte Maxima haben im Spektrum den Abstand $\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{2d}$ der auch *Dispersionsbereich* des Spektroskops genannt wird.

Um die Spektrallinien gut zu trennen, sollten die Maxima sehr schmal werden. Das Verhältnis von Dispersionsbereich und Halbwertsbreite $\delta\lambda$ der Peaks wird *Finesse* genannt und hängt nur von der Reflektivität der Spiegel ab:

$$F = \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda} \approx \frac{\pi r^2}{1 - r^2}$$

Für gut spiegelnde Flächen ($r \approx 1$) kann die Finesse große Werte annehmen, was zu sehr scharfen Linien führt.

Das *spektrale Auflösungsvermögen*, also der minimale Abstand (im Verhältnis zur Wellenlänge) zweier Spektrallinien, die sich noch trennen lassen, beträgt

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{2dF}{\lambda}$$

Das spektrale Auflösungsvermögen lässt sich also auch steigern, wenn man den Luftspalt des Interferometers vergrößert. Dies bringt allerdings Probleme mit sich: Zuerst einmal muss d in der Größenordnung der Kohärenzlänge bleiben, damit überhaupt Interferenz auftritt. Außerdem überlappen sich benachbarte Maxima verschiedener Ordnungen, sobald der Dispersionsbereich kleiner als die auftretenden Wellenlängendifferenzen wird (siehe "Auswertung von Wellenlängendifferenzen"). Daher sollte die Finesse und damit die Reflektivität der Spiegel so weit wie möglich erhöht werden.

In unserem Fall ($d \approx 3\text{mm}$ und $\lambda \approx 535\text{nm}$ bzw. $\lambda \approx 377,6\text{nm}$) beträgt der Dispersionsbereich

$$\Delta\lambda = 0.048\text{nm} \text{ bzw. } 0.024\text{nm}$$

was immer noch größer als die Hyperfeinstrukturaufspaltung (im Bereich von 0,01nm) ist.

"durchsichtig".

Interferenzringe

Wenn der Strahl mit dem Winkel α schräg durch das Interferometer tritt, muss der Plattenabstand d in der Airy-formel durch die optische Weglänge $\frac{d}{\cos \alpha}$ zwischen den Platten ersetzt werden.

Für kleine Winkel erhält man dann die Interferenzbedingung

$$n = \frac{2d}{\lambda \cos \alpha} \approx \frac{2d}{\lambda} + \alpha^2 \frac{d}{\lambda} \approx \frac{2d}{\lambda} + r^2 \frac{d}{\lambda f^2} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

oder umgestellt

$$r^2 = \frac{\lambda f^2}{d} n - 2f^2$$

Die parallelen Strahlen werden nach dem Interferometer durch eine Linse auf einen Schirm (in unserem Fall einen CCD-Chip) fokussiert. Es bilden sich konzentrische Kreise an den Stellen, an denen die Interferenzbedingung erfüllt ist. Für eine spektroskopische Messung braucht man also nicht den Plattenabstand verändern (was in der nötigen Genauigkeit praktisch unmöglich ist), sondern misst die Radien r der Ringe, die mit der Brennweite f der Linse über

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{r}{f}$$

zusammenhängen.

Die Herleitung der Airy-Formel gilt natürlich nur, falls die Platten überall genau den gleichen Abstand haben. Falls sie nicht ganz parallel sind, führt dies innerhalb der Strahlenbündel zu verschiedenen Interferenzbedingungen. Die Maxima verbreitern sich dadurch zusätzlich. Mit den drei Mikrometerschrauben und Piezokristallen muss man die Platten daher so ausrichten, dass die Ringe möglichst scharf zu sehen sind.

Auswertung von Wellenlängendifferenzen

Das Verhältnis $d/\lambda f^2$ lässt sich also direkt aus der Steigung der Gerade durch die Punkte (n, r_n^2) ermitteln. Da man den Plattenabstand d nicht direkt in der nötigen Genauigkeit messen kann, eicht man den Versuchsaufbau z.B. mit einem Laser bekannter Wellenlänge.

Man kann die Differenzen aber auch noch genauer bestimmen. Für zwei Ringe, die zu unterschiedlichen Wellenlängen gehören, gilt

$$r_2^2 - r_1^2 = \frac{f^2}{d} (\lambda_2 n_2 - \lambda_1 n_1)$$

Da die Ordnung $n \approx \frac{2d}{\lambda} \gg 1$ der Ringe sehr groß wird, kann man weiter vereinfachen:

$$r_2^2 - r_1^2 = \frac{f^2}{d} (n_2(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_1(n_1 - n_2)) \approx \frac{2f^2}{\lambda} (\lambda_2 - \lambda_1) + \frac{f^2}{d} \lambda (n_1 - n_2)$$

Da wir die exakten Ordnungen nicht kennen, muss der Dispersionsbereich größer als die zu erwartenden Wellenlängendifferenzen sein. In diesem Fall kann man von $n_1 - n_2$ ausgehen.

Um die auftretenden Ringe möglichst eindeutig zu identifizieren, ist es außerdem zweckmäßig, mit einem Vorfilter den relevanten Frequenzbereich einzuschränken.

Vergleich mit anderen Spektrometertypen

Mit einfachen Prismenspektrometern kann man spektrale Auflösungsvermögen von etwa 10^4 erreichen. Beim optischen Gitter beträgt das Auflösungsvermögen $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = nN$ wobei n die Ordnung des Maximums und N die Anzahl der beleuchteten Spalte ist. Hier sind Größenordnungen von $nN \approx 10^5$ zu erreichen.

Beim Fabry-Pérot-Interferometer wird die Auflösung hauptsächlich vom Verhältnis zwischen Plattenabstand und Wellenlänge bestimmt, das alleine schon in der Größenordnung von 10^7 liegt. Mit entsprechend guten Spiegeln lässt sich dies noch um bis zu drei Zehnerpotenzen verbessern. Obwohl der Aufbau immer noch vergleichsweise einfach ist, erlaubt dieser Interferometertyp also eine wesentlich genauere Messung.

Quellen

de.wikipedia.org

Vorbereitungshilfe

Haken, Wolf: Atom- und Quantenphysik, 7.Auflage, Springer 2000

Meschede: Gerthsen Physik, 23.Auflage, Springer 2006