



FAKULTÄT FÜR PHYSIK
PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM FÜR FORTGESCHRITTENE
PRAKTIKUM MODERNE PHYSIK

Gruppe Nr. 108

Kurs: Mo Mi

WS 2012 / 2013

Versuch: Hyperfeinstruktur

Namen: Tobias Renz

Raphael Schmager

Assistent: Wolfram Kittler

durchgeführt am: 22. Oktober 2012

Protokollabgabe am: _____

Note gesamt + - 0

Datum: _____

anerkannt: _____

Bemerkung:

Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene 1

Hyperfeinstruktur

Protokoll von
Tobias Renz und **Raphael Schmager**

Gruppe: **108**

Durchgeführt am 22. Oktober 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Theoretische Grundlagen	2
2.1	Spektrallinien von Atomen	2
2.2	Feinstruktur	2
2.3	Hyperfeinstruktur	3
2.3.1	Magnetische HFS	3
2.3.2	Isotropie-Effekte	3
2.3.3	Quadrupol-Effekte	3
2.4	Termschema von Thallium 205	4
3	Fabry-Perot Interferometer	4
3.1	Interferenzbedingung des Fabry-Perot Interferometers	4
3.2	Auflösung des Fabry-Perot Interferometer	5
4	Messung der Hyperfeinstruktur	6
5	Durchführung	7
5.1	Allgemeines	7
5.2	Bestimmung des Plattenabstandes d	8
5.3	Hyperfeinstruktur	8
6	Auswertung	8
6.1	Bestimmung des Plattenabstandes d	8
7	Bestimmung der Wellenlängen	12
7.1	Wellenlängen des UV Lichts (Übergang: $7^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{1/2}$)	12
7.2	Wellenlängen des grünen Lichts (Übergang: $7^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{3/2}$)	15
8	Bestimmung der Hyperfeinaufspaltungen	17
8.1	Aufspaltung des UV Lichts	17
8.2	Aufspaltung des grünen Lichts	18
9	Kernspin von Thallium 205	19
10	Quellen	19
11	Anhang	20

1 Einführung

In diesem Versuch geht es darum, die Hyperfeinstrukturaufspaltung von Thallium mit einem Fabry-Perot Interferometer zu beobachten. Es werden die Interferenzmuster in verschiedenen Spektralbereichen aufgenommen.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Spektrallinien von Atomen

Betrachten wir ein Elektron im Coulombfeld eines Atomkerns so lassen sich die Energieeigenwerte des zugehörigen Hamiltonoperators bestimmen. Die Eigenwerte entsprechen den Energien des Elektrons.

Bei der Lösung des Problems muss man aufgrund von physikalischen Randbedingungen verschiedene Quantenzahlen einführen. Darunter zählt die Hauptquantenzahl n , welche die Energie charakterisiert. Des weiteren benötigt man die Drehimpulsquantenzahl l , die magnetische Quantenzahl m und die Spinquantenzahl s . Je größer man n wählt, desto entarteter wird das Energieniveau des Elektrons.

Betrachtet man nun das Spektrum eines Wasserstoff Atoms, so ist zu erwarten, dass man eine Linie je Energie beobachten kann. Für niedrige Auflösungen stimmt dies auch gut überein. Bei höherer Auflösung hingegen kann man erkennen, dass die Entartung aufgelöst ist. Man erkennt eine Aufspaltung der Energieniveaus in mehrere dicht beieinander liegenden Linien. Die Erklärung dafür liefert zunächst die Fein-, später bei noch höherer Auflösung die Hyperfeinstruktur.

2.2 Feinstruktur

Mit der Feinstruktur beachtet man beim bestimmen der Energieniveaus, dass der Hamiltonoperator nicht relativistisch ist. Da jedoch im Atom solche Effekte auftreten, kann man diesen durch Korrekturterme erweitern. Darunter zählt die relativistische Korrektur der kinetischen Energie der Elektronen sowie die Spin-Bahn-Kopplung. Letzteres lässt sich dadurch begründen, dass auf ein Elektron welches sich im elektrischen Feld um den Atomkern bewegt ein magnetisches Feld wird. Durch den Spin des Elektrons besitzt dieses ein magnetisches Moment μ_s , welches sich nun im magnetischen Feld B_L parallel oder antiparallel ausrichten kann. Je nach Ausrichtung ergeben sich zwei unterschiedliche Energien:

$$E_{FS} = \pm \frac{1}{2} \vec{\mu}_s \vec{B}_L \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{FS} = \vec{\mu}_s \vec{B}_L \quad (1)$$

Die Anzahl der Aufspaltungen beträgt $2l + 1$ bzw. $2s + 1$, je nachdem ob l oder s kleiner ist. Wobei l der Drehimpuls und s der Spin des Elektrons ist. Die Feinstrukturaufspaltung liegt im Bereich von 10^{-4} eV.

2.3 Hyperfeinstruktur

2.3.1 Magnetische HFS

Betrachtet man das Spektrum noch genauer, so lassen sich weitere Aufspaltungen erkennen. Diese sind begründet in weiteren Effekten, die im Bereich von 10^{-7} eV liegen. Man betrachtet hier zusätzlich die Wechselwirkung von Gesamtdrehimpuls J des Hüllenelektrons mit dem Kernspin I . Außerdem spielt hier die Wechselwirkung des magnetischen Kernmoments μ_I mit dem vom Elektron am Kernort erzeugten Magnetfeld B_J eine Rolle (vgl. Zeeman-Effekt). Man erhält analog zur Feinstruktur die Energieaufspaltung von:

$$\Delta E_{HFS} = \vec{\mu}_I \vec{B}_J \quad (2)$$

Die Anzahl der Aufspaltungen in Hyperfeinstrukturkomponenten beträgt $2J + 1$ oder $2I + 1$, je nach dem ob J oder I kleiner ist. J ist dabei der Gesamtdrehimpuls der Elektronen und I ist der Kernspin.

2.3.2 Isotropie-Effekte

Zur HFS zählt man noch weitere Effekte, welche jedoch keine Aufspaltung zur Folge haben. Der Isotropie-Effekt ist verantwortlich für eine Verschiebung der Energieniveaus aufgrund der unterschiedlichen Isotope, die in einem Stoff vorkommen.

Elektronen und Kern bewegen sich in einem Atom um einen gemeinsamen Schwerpunkt. Bei unterschiedlichen Isotopen mit verschiedenen Kernmassen ändert sich die reduzierte Masse, somit verschiebt sich der Schwerpunkt leicht. Das hat zur Folge, dass verschiedene Isotope leicht unterschiedliche Spektrallinien haben. Dieser **Masseneffekt** spielt hauptsächlich eine Rolle bei kleinen, leichten Atomen. Des Weiteren existiert noch der sogenannte **Volumeneffekt**. Wie der Name schon sagt, entsteht er durch das unterschiedliche Volumen der isotropen Kerne. Dies hat einen Einfluss auf das elektrische Feld des Kerns. Das Kernpotential entspricht demnach nicht mehr dem Coulombpotential.

Diese Effekte werden wir jedoch in unserem Versuch nicht beobachten können, da wir zum einen nur das Isotop Thallium 205 verwenden und zum anderen wären diese sowieso sehr gering.

2.3.3 Quadrupol-Effekte

Wie eben erwähnt besitzen die Kerne eines Atoms eine endliche Ausdehnung. Je schwerer die Atome sind, je größer sind diese. Bei der ursprünglichen Berechnung der Energieniveaus wurde jedoch der Kern als punktförmig angenommen. Das eigentliche Potential kann man jedoch durch eine Taylorentwicklung besser beschreiben. Bei großen Kernen spielt ein weiterer Term in der Multipolentwicklung des elektrischen Feldes eine Rolle. Somit ist das Quadrupolmoment nicht zu vernachlässigen.

Diese Korrektur bringt wiederum eine Energieverschiebung. Da aber Thallium 205 laut Aufgabenblatt kein solches Quadrupolmoment besitzt, muss dieser Effekt bei unserem Versuch nicht berücksichtigt werden.

2.4 Termschema von Thallium 205

In Abbildung 1 ist ein Ausschnitt aus dem Termschema des Thallium 205 abgebildet. Entsprechend den Auswahlregeln $\Delta F = 0, \pm 1$ erwartet man jeweils 3 Übergänge von $7^2S_{1/2}$ zu $6^2P_{3/2}$ und von $7^2S_{1/2}$ zu $6^2P_{1/2}$.

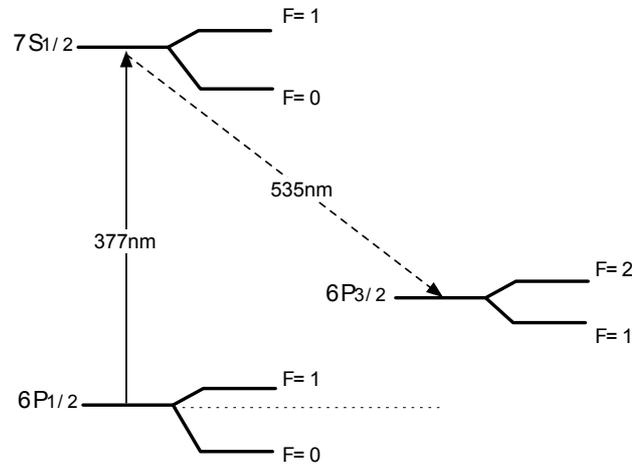


Abbildung 1: Ausschnitt des Termschemas von Thallium 205

3 Fabry-Perot Interferometer

Um die Hyperfeinstruktur von Thallium zu bestimmen, verwenden wir einen Fabry-Perot Interferometer. Die Hyperfeinaufspaltung der Linien sind aufgrund der hohen spektralen Auflösung des Interferometers möglich. In diesem Versuch untersuchen wir die Übergänge $7^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{3/2}$ ($\lambda = 535\text{nm}$) und $7^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{1/2}$ ($\lambda = 377,6\text{nm}$)

3.1 Interferenzbedingung des Fabry-Perot Interferometers

Das verwendete Fabry-Perot Interferometer besteht aus zwei planparallelen halb verspiegelten Glasplatten. Die Interferenz entsteht dadurch, dass durch Reflexion ein Strahl einen Gangunterschied Δs zum nicht reflektierten Strahl aufnimmt. Die Strahlen werden im Zwischenraum mehrfach reflektiert.

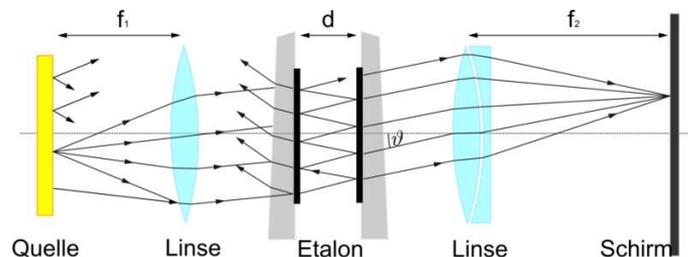


Abbildung 2: Fabry-Perot Interferometer

Der Gangunterschied, den ein Strahl für eine zusätzliche Reflexion erhält beträgt:

$$\Delta s = 2 \cdot d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \quad (3)$$

da sich im Zwischenraum Luft ($n = 1$) befindet ergibt sich:

$$\Delta s = 2 \cdot d \cdot \cos \alpha \quad (4)$$

wobei α der Einfallswinkel ist.

Konstruktive Interferenz tritt nun auf, falls der Gangunterschied ein vielfaches der Wellenlänge des verwendeten Lichtes ist:

$$n \cdot \lambda = 2 \cdot d \cdot \cos(\alpha_n) \approx 2 \cdot d \left(1 - \frac{\alpha_n^2}{2}\right) \quad (5)$$

wobei n hier nicht der Brechungsindex sondern eine natürliche Zahl ist.

Mittels einer Linse (Brennweite $f = 150\text{mm}$) werden die Strahlen gebündelt und auf einer Mattscheibe abgebildet. Auf der Scheibe sind nun Interferenzringe mit Durchmesser D erkennbar. Wird nun die Scheibe im Abstand f zur Linse positioniert besteht zwischen dem Durchmesser D_n und dem Winkel α_n folgender Zusammenhang:

$$D_n = 2 \cdot f \cdot \tan(\alpha_n) \approx 2 \cdot f \cdot \alpha_n \quad (6)$$

Unter Verwendung von Gleichung (3) ergibt sich dann folgender Zusammenhang:

$$n \cdot \lambda = 2 \cdot d \left(1 - \frac{D_n^2}{8f^2}\right) \quad (7)$$

woraus dann folgt:

$$D_n^2 = 8f^2 - n \cdot \frac{4f^2 \lambda}{d} \quad (8)$$

Trägt man also nun D_n^2 über der Ordnung n auf, so kann man aus der Steigung die Wellenlänge berechnen.

3.2 Auflösung des Fabry-Perot Interferometer

Das **spektrale Auflösungsvermögen** U ist definiert durch den Quotienten aus Wellenlänge λ und Halbwertsbreite $\Delta\lambda$:

$$U = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (9)$$

Das spektrale Auflösungsvermögen wird also größer, je kleiner die Halbwertsbreite der Interferenzpeaks für die Wellenlänge λ ist.

Eine weitere wichtige Größe ist der **freie Spektralbereich** $\delta\lambda$. Dies ist der Bereich, indem man zwei Interferenzstreifen voneinander unterscheiden kann.

Für einen Fabry-Perot Interferometer gilt ($\alpha = 0$):

$$\delta\nu = \frac{c}{2nd} \quad (10)$$

und mit

$$\delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \cdot \delta\lambda \quad (11)$$

folgt:

$$\delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2nd} \quad (12)$$

Die **Finesse** F^* des Fabry-Perot Interferometer verknüpft nun die beiden oben genannten Größen $\Delta\lambda$ und $\delta\lambda$. Sie gibt das Verhängnis zwischen freiem Spektralbereich und Halbwertsbreite an.

$$F^* = \frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\pi}{2} \sqrt{F} \quad (13)$$

Dabei ist $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$ und R der Reflexionskoeffizient der verspiegelten Glasplatten. Je größer also die Finesse ist, desto mehr Strahlenbündel interferieren miteinander. So werden die Interferenzringe mit auch mit steigender Finesse schärfer.

Damit ergibt sich dann das spektrale Auflösungsvermögen U zu:

$$U = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \cdot F^* = \frac{\pi \cdot n \cdot d}{\lambda} \sqrt{F} \quad (14)$$

Es hängt somit vom Spaltabstand d und vom Reflexionskoeffizient R ab. Durch die Abhängigkeit von $\frac{4R}{(1-R)^2}$ ist für ein hohes Auflösungsvermögen sinnvoll hoch verspiegelte Platten zu verwenden, damit die Reflektivität groß wird.

Auflösungsvermögen eines Gitters

Bei einem Gitter ist das spektrale Auflösungsvermögen abhängig von der Ordnung n des Maximums und der Anzahl N der beleuchteten Spalte gegeben.

$$U = n \cdot N \quad (15)$$

4 Messung der Hyperfeinstruktur

Der Übergang $7^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{1/2}$ sollte aufgrund der Hyperfeinaufspaltung in drei Linien aufspalten und wir sollten somit drei Wellenlängen messen können. Das Interferenzmuster sollte deshalb für jede Ordnung n drei Ringe aufweisen, wobei jeder dieser Ringe einer Wellenlänge zuzuordnen ist. Diese könnten wir bestimmen, indem wir den jeweiligen Durchmesser D_n zur Ordnung n messen und D_n^2 über n auftragen. Dies ergibt eine Geradengleichung (vgl. Gleichung (6)) aus deren Steigung die Wellenlänge bestimmt werden kann.

Da wir uns für die Aufspaltung, also die Differenzen der Wellenlängen interessieren und da die oben beschriebene Methode ungenau ist bestimmen wir die Differenz $\Delta\lambda$ (hier nicht mehr die Halbwertsbreite) folgendermaßen:

Wir betrachten nun Interferenzringe gleicher Ordnung n von verschiedenen Wellenlängen (z.B. λ_1 und λ_2) mit Durchmesser D_{1n} bzw. D_{2n} . Mit Gleichung (5) ergibt sich nun:

$$n \cdot \lambda_1 = 2 \cdot d \left(1 - \frac{D_{1n}^2}{8f^2}\right) \quad (16)$$

$$n \cdot \lambda_2 = 2 \cdot d \left(1 - \frac{D_{2n}^2}{8f^2}\right) \quad (17)$$

Löst man nun beide Gleichungen nach n auf (was kein Problem darstellen sollte) und setzt diese gleich erhält man:

$$\lambda_2 \cdot \left(1 - \frac{D_{1n}^2}{8f^2}\right) = \lambda_1 \cdot \left(1 - \frac{D_{2n}^2}{8f^2}\right) \quad (18)$$

woraus folgt:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_2 \cdot D_{1n}^2 - \lambda_1 \cdot D_{2n}^2}{8f^2} \quad (19)$$

Da die Wellenlängen λ_1 und λ_2 nahe beieinander liegen nähern wir $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, wobei λ eine mittlere Wellenlänge ist.

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda}{8f^2} (D_{1n}^2 - D_{2n}^2) \quad (20)$$

Die Aufspaltung kann somit für jede (gemessene) Ordnung berechnet werden um daraus einen Mittelwert zu bestimmen.

5 Durchführung

5.1 Allgemeines

In diesem Versuch sollte die Hyperfeinstruktur von Thallium 205 der Übergänge $7^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{1/2}$ und $7^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{3/2}$ bestimmt werden. Der Versuch wurde wie auf dem Aufgabenblatt skizziert aufgebaut.

Da die Thallium Lampe grünes Licht (Übergang $7^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{3/2}$) und UV Licht (Übergang $7^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{1/2}$) aussendet benötigen wir außerdem noch Filter, die entweder grünes Licht oder UV Licht herausfiltern. Im folgenden werden wir aber nicht über die Filter sprechen sondern über das durchgelassene Licht. Das heißt, wenn wir von UV Licht sprechen haben wir in unsren Versuchsaufbau einen Filter eingebaut, der das grüne Licht herausfiltert und somit beobachten wir das Interferenzmuster des UV Lichtes.

Die vor der Lampe aufgebaute Iris wird fast ganz geschlossen um eine möglichst gute Punktquelle zu bekommen.

Das Interferenzmuster des Fabry-Perot Interferometers wird mit Hilfe einer Kamera aufgenommen und auf dem Computer gespeichert. Mit Hilfe eines Programms, kann eine Linie durch das Interferenzmuster gezogen werden und entlang dieser Linie ein Helligkeit-Pixel Diagramm

erstellt werden.

Diese Daten werden gespeichert und dienen uns als Grundlage für unsere Auswertung. Dabei ist zu beachten, dass wir die Pixel noch mit dem auf dem Aufgabenblatt angegebenen Umrechnungsfaktor in mm umrechnen müssen.

5.2 Bestimmung des Plattenabstandes d

Zuerst müssen wir den Plattenabstand des Fabry-Perot Interferometers bestimmen. Dazu ersetzen wir die Thallium Lampe mit einem Laser ($\lambda = 650nm$) und untersuchen das Interferenzmuster. Wir messen die Durchmesser D_n zur jeweiligen Ordnung n und tragen D_n^2 über n auf. Wir erhalten eine Gerade (8) und können die Steigung bestimmen. Da die Wellenlänge bekannt ist, können wir aus der Steigung nun den Abstand d berechnen.

5.3 Hyperfeinstruktur

Um die Hyperfeinstruktur der beiden Übergänge zu bestimmen, benutzen wir die Thallium Lampe und die Filter.

Nun nehmen wir das Interferenzmuster des UV Lichts und des grünen Lichts auf und bestimmen wieder die Durchmesser zur jeweiligen Ordnung. Zunächst bestimmen wir nun über die Geradengleichung und dem in 5.2 bestimmten Spaltabstand die verschiedenen Wellenlängen der Übergänge.

Um einen besseren Wert für die Wellenlängendifferenzen $\Delta\lambda$ und somit für die Hyperfeinaufspaltung zu bekommen, verwenden wir die in 4. beschriebene Methode.

6 Auswertung

6.1 Bestimmung des Plattenabstandes d

Zunächst bestimmen wir nun den Plattenabstand d des Fabry-Perot Interferometers. Dazu haben wir das Interferenzmuster des Lasers aufgenommen. Dieses haben wir um die Darstellung zu verbessern invertiert:

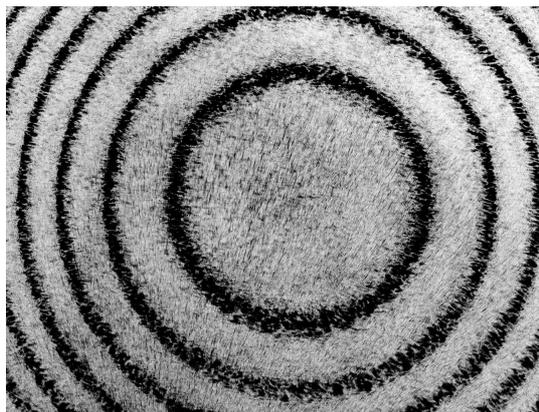


Abbildung 3: Interferenzmuster: Laser

Um die Durchmesser der Ringe zu messen, haben wir Linien so durch das Muster gelegt, dass die Linie durch den Mittelpunkt geht. Entlang dieser Linien konnten wir nun ein Helligkeit-Abstand Diagramm erstellen. Insgesamt haben wir fünf verschiedener solcher Diagramme erstellt und ausgewertet.

An dieser Stelle müssen wir hinzufügen, dass bei unserer ersten Messung die Daten der Diagramme falsch gespeichert wurden und nur ein Diagramm verwendet werden konnte. Deshalb haben wir die Messung etwas später noch einmal durchgeführt. Nun könnte es sein, dass in der Zwischenzeit der Spaltabstand verändert wurde, dies konnten wir dadurch ausschließen, dass wir das schon erstellte Diagramm mit den Neuen verglichen haben und keine merklichen Abweichungen feststellen konnten.

Ein solches Diagramm ist im folgenden dargestellt, die Anderen werden aus Gründen der Übersichtlichkeit hier nicht abgedruckt.

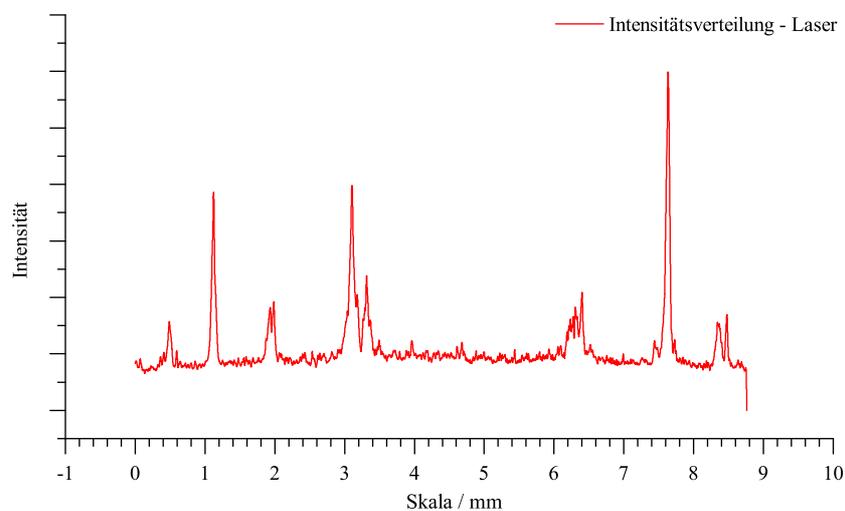


Abbildung 4: Bestimmung der Durchmesser

Bei den meisten Diagrammen waren die Maxima nicht auf beiden Seiten gleich gut oder nicht bis zur gleichen Ordnung erkennbar. Deshalb haben wir den Mittelpunkt des ersten Maxima links und rechts vom Mittelpunkt als Nullpunkt gewählt und von dort aus die Abstände in nur eine Richtung gemessen. Somit erhalten wir natürlich nur den Radius (R_n) der jeweiligen Ordnung.

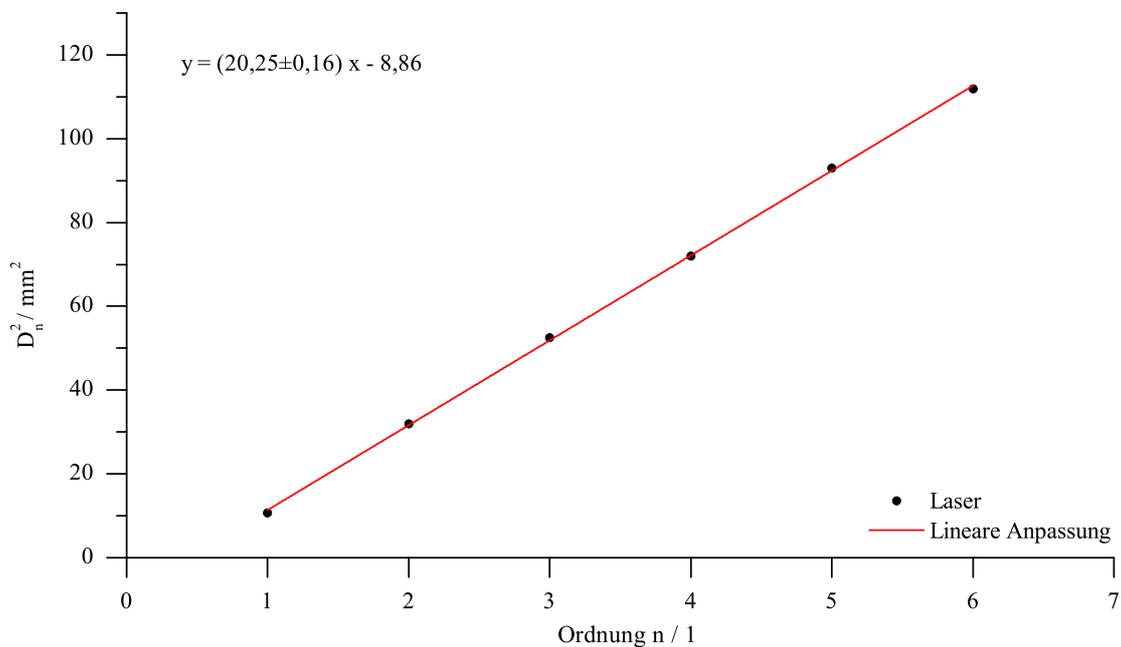
Folgende Messwerte haben wir aufgenommen: An den Messwerten sieht man, dass bei manchen Diagrammen mehr Ordnungen als bei anderen Diagrammen aufgenommen wurde. Dies lag daran, wie die Linie in das Interferenzmuster gelegt wurde.

Um die Daten gut auswerten zu können, haben wir aus allen fünf Messungen den Mittelwert für den jeweiligen Durchmesser gebildet. Durch Ablesungenauigkeit bekommen wir noch einen systematischen Fehler ΔD_n für den Durchmesser D_n . Diesen haben wir für diese Messung und auch für alle nachfolgenden Messungen zu $\Delta D_n = 0,1\text{mm}$ gewählt.

	Messung					Mittelwert	statistischer Fehler
	1	2	3	4	5		
D_1 / mm	3,42	3,32	3,2	3,16	3,24	3,27	0,09
D_2 / mm	5,72	5,7	5,6	5,62	5,62	5,65	0,05
D_3 / mm			7,22	7,28	7,24	7,25	0,02
D_4 / mm			8,4	8,54	8,52	8,49	0,06
D_5 / mm			9,64		9,64	9,64	0
D_6 / mm			10,58			10,58	0

Tabelle 1: Messung mit dem roten Laser

Nun tragen wir D_n^2 über n auf und erhalten folgende Gerade:

Abbildung 5: Bestimmung des Abstandes d

Die Geradengleichung ist:

$$D_n^2 = 8f^2 - n \cdot \frac{4f^2\lambda}{d} \quad (21)$$

Man erkennt, dass unsere Gerade eine positive Steigung m hat, aber laut Geradengleichung eine negative Steigung haben sollte. Dies liegt daran, dass die Ordnungen nach außen hin niedriger werden, wir sie somit gerade andersherum definiert haben. Da sich der Betrag der Steigung aber nicht ändert benutzen wir für die nachfolgende Rechnungen einfach $|m|$ und erhalten somit das richtige Ergebnis.

Die Steigung hat bei uns folgenden Wert:

$$m = (20, 25 \pm 0, 16)mm^2 \quad (22)$$

Daraus lässt sich nun der Abstand d berechnen:

$$d = \frac{4f^2\lambda}{m} = 2,89mm \quad (23)$$

mit $f = 150mm$ und $\lambda = 650nm$.

Nun muss noch der zugehörige Fehler berechnet werden.

Unser Steigung hat einen statistischen Fehler σ_m , der sich mittels Fehlerfortpflanzung auf unseren Abstand d überträgt.

$$\sigma_{1d} = \sqrt{\left(\frac{4f^2\lambda}{m^2} \cdot \sigma_m\right)^2} = \frac{\sigma_m \cdot d}{m} = 0,02mm \quad (24)$$

Da unser Durchmesser aber auch Fehler belastet ist, müssen wir diesen auch noch berücksichtigen.

$$d = \frac{n\lambda}{2} \left(1 - \frac{D_n^2}{8f^2}\right)^{-1} \quad (25)$$

Unser Durchmesser besitzt einen systematischen Δ_D und einen statistischen Fehler σ_D welcher sich beides auf den Durchmesser wie folgt überträgt:

$$\Delta d = \sqrt{\left(\frac{n\lambda D_n}{8f^2(1 - \frac{D_n^2}{8f^2})^2} \cdot \Delta D_n\right)^2} = \left(\frac{dD_n}{4f^2} - \frac{2d}{D_n}\right) \Delta D_n \approx 0,1mm \quad (26)$$

$$\sigma_{2d} = \sqrt{\left(\frac{n\lambda D_n}{8f^2(1 - \frac{D_n^2}{8f^2})^2} \cdot \sigma D_n\right)^2} = \left(\frac{dD_n}{4f^2} - \frac{2d}{D_n}\right) \sigma D_n \approx 0,09mm \quad (27)$$

da sich der Durchmesser D_n und n ändert wären die Fehler für jeden Messwert unterschiedlich, deshalb wurde für den Durchmesser ein mittlerer Durchmesser verwendet. Beim statistischen σD_n Fehler wurde der höchste Wert verwendet.

Insgesamt ergibt sich nun für den Abstand d folgender Wert:

$$d = (d \pm \Delta d \pm (\sigma_{1d} + \sigma_{2d})) = (2,89 \pm 0,10 \pm 0,11)mm \quad (28)$$

7 Bestimmung der Wellenlängen

7.1 Wellenlängen des UV Lichts (Übergang: $7^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{1/2}$)

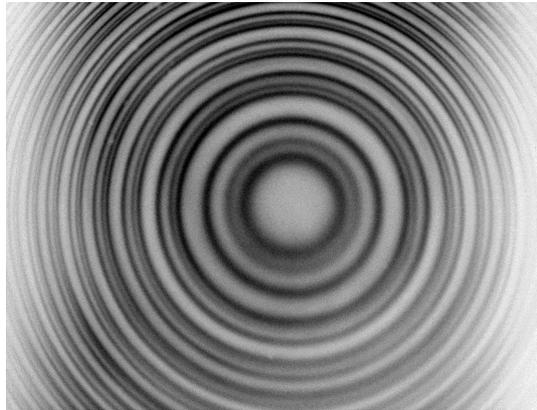


Abbildung 6: Interferenzmuster UV

Um die drei Wellenlängen des UV Lichts zu bestimmen, gehen wir analog zu 6.1 vor. Wir haben wieder verschiedene Helligkeit-Abstand Diagramme erstellt und daraus die Durchmesser D_n der verschiedenen Wellenlängen ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) bestimmt. Zu beachten ist, dass λ_1 dem inneren der drei Ringe entspricht.

Im folgenden sind unsere Messwerte dargestellt und auch gleich die Mittelwerte der Durchmesser berechnet worden.

λ_1	Messung				Mittelwert	statistischer Fehler
	1	2	3	4		
D_1 / mm	1,48	1,5	1,48	1,52	1,50	0,02
D_2 / mm	3,64	3,62	3,58	3,64	3,62	0,03
D_3 / mm	4,94	4,9	4,82	4,9	4,89	0,05
D_4 / mm	5,96	5,88	5,8	5,9	5,89	0,07
D_5 / mm	6,82	6,68	6,6	6,72	6,71	0,09
D_6 / mm				7,44	7,44	0
D_7 / mm				8,1	8,10	0
D_8 / mm				8,7	8,70	0

Tabelle 2: Messung bei UV - λ_1

λ_2	Messung				Mittelwert	statistischer Fehler
	1	2	3	4		
D_1 / mm	2,04	1,96	2,02	2,04	2,02	0,04
D_2 / mm	3,86	3,88	3,84	3,88	3,87	0,02
D_3 / mm	5,12	5,08	4,98	5,08	5,07	0,06
D_4 / mm	6,14	6,02	6,66	6,02	6,21	0,31
D_5 / mm	6,96	6,8	6,74	6,86	6,84	0,09
D_6 / mm				7,56	7,56	0
D_7 / mm				8,22	8,22	0
D_8 / mm				8,8	8,80	0

Tabelle 3: Messung bei UV - λ_2

λ_3	Messung				Mittelwert	statistischer Fehler
	1	2	3	4		
D_1 / mm	2,74	2,7	2,7	2,74	2,72	0,02
D_2 / mm	4,3	4,28	4,24	4,24	4,27	0,03
D_3 / mm	5,46	5,326	5,32	5,4	5,38	0,07
D_4 / mm	6,36	6,28	6,16	6,32	6,28	0,09
D_5 / mm	7,18	7,02	6,94	7,1	7,06	0,10
D_6 / mm				7,78	7,78	0
D_7 / mm				8,42	8,42	0
D_8 / mm				8,96	8,96	0

Tabelle 4: Messung bei UV - λ_3

Nun tragen wir wieder D_n^2 über n auf und erhalten somit für jede der drei Wellenlängen eine Gerade, welche in nachfolgender Abbildung dargestellt sind.

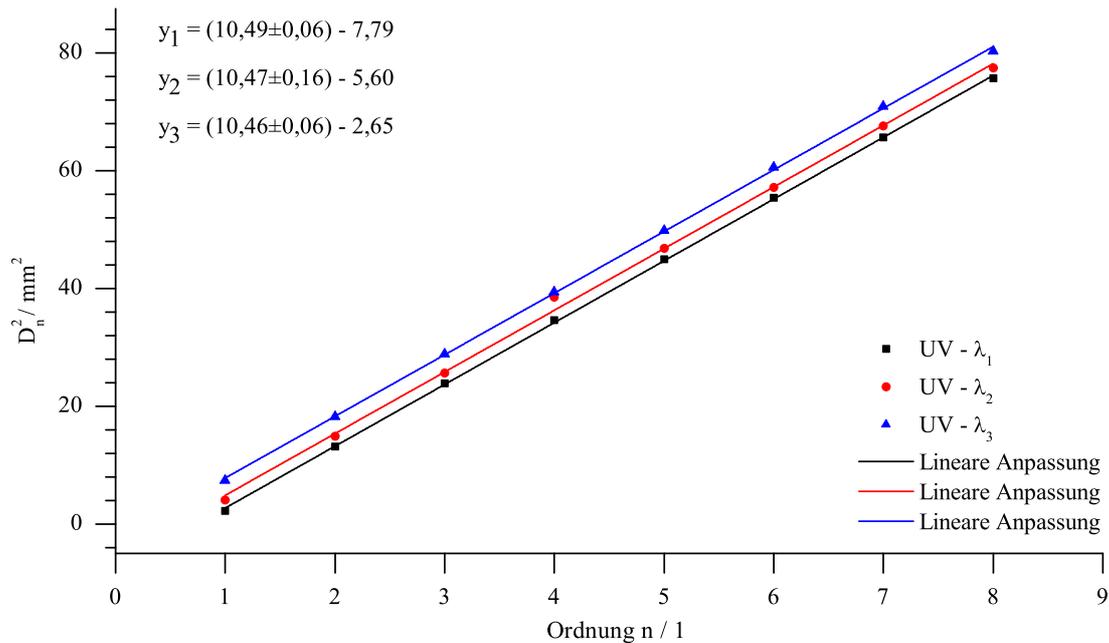


Abbildung 7: Bestimmung der Wellenlänge

Aus den Steigungen m können nun die Wellenlängen wie folgt berechnet werden:

$$\lambda_i = \frac{m_i d}{4f^2} \quad (29)$$

Für unsere Wellenlängen ergeben sich folgende Wert:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 336,84 \text{ nm} \\ \lambda_2 &= 336,20 \text{ nm} \\ \lambda_3 &= 335,88 \text{ nm} \end{aligned} \quad (30)$$

Nun muss noch der zugehörige Fehler berechnet werden.

Die Steigung hat einen statistischen Fehler, welcher sich wie folgt auf die Wellenlänge überträgt:

$$\sigma_{1\lambda_i} = \frac{\lambda \cdot \sigma m}{m} \quad (31)$$

Außerdem ergibt sich durch die Fehler belasteten Größen d und D_n weitere Fehler:

$$\Delta\lambda = \sqrt{\left(\frac{2}{n}\left(1 - \frac{D_n^2}{8f^2}\right) \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\frac{dD_n}{2nf^2} \cdot \Delta D_n\right)^2} \approx \sqrt{\left(\frac{\lambda \cdot \Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\lambda D_n}{4f^2} \Delta D_n\right)^2} \quad (32)$$

$$\sigma_{2\lambda} = \sqrt{\left(\frac{2}{n}\left(1 - \frac{D_n^2}{8f^2}\right) \cdot \sigma d\right)^2 + \left(\frac{dD_n}{2nf^2} \cdot \sigma D_n\right)^2} \approx \sqrt{\left(\frac{\lambda \cdot \sigma d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\lambda D_n}{4f^2} \sigma D_n\right)^2} \quad (33)$$

Für unsere Wellenlängen ergeben sich somit folgende Werte:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (336,84 \pm 11,6 \pm 14,66) \text{ nm} \\ \lambda_2 &= (336,20 \pm 11,6 \pm 19,86) \text{ nm} \\ \lambda_3 &= (335,88 \pm 11,6 \pm 14,68) \text{ nm} \end{aligned} \quad (34)$$

Damit ergibt sich eine mittlere Wellenlänge $\bar{\lambda}$, welche für eine spätere Aufgabe benötigt wird zu:

$$\bar{\lambda} = (336,30 \pm 11,6 \pm 20,21)nm \quad (35)$$

Die Wellenlänge diesen Übergang ist auf dem Aufgabenblatt mit $\lambda = 377,6nm$ angegeben. Man sieht, dass unsere Werte doch relativ stark davon abweichen.

Mit den nun berechneten Wellenlänge könnte die Hyperfeinaufspaltung durch Bildung der Differenzen gebildet werden, aber bei dem großen Fehler für die Wellenlänge würde dies kein sinnvolles Ergebnis liefern. Die Hyperfeinaufspaltung wird 8. berechnet.

7.2 Wellenlängen des grünen Lichts (Übergang: $7^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{3/2}$)

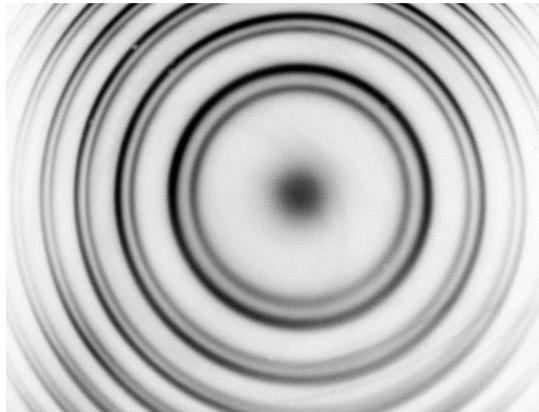


Abbildung 8: Interferenzmuster Grün

Um die Wellenlängen des grünen Lichts zu bestimmen gehen wir ganz analog zu 7.1 vor. Im folgenden unsere Messwerte:

λ_1	Messung				Mittelwert	statistischer Fehler
	1	2	3	4		
D_1 / mm	3,44	3,44	3,5	3,46	3,46	0,03
D_2 / mm	3,98	5,38	5,44	5,4	5,05	0,71
D_3 / mm	6,92	6,76	6,8	6,86	6,84	0,07
D_4 / mm	8,04	7,9	7,9	8,08	7,98	0,09
D_5 / mm	9,12	8,92	8,92	9,08	9,01	0,11
D_6 / mm		9,76		10,02	9,89	0
D_7 / mm				10,88	10,88	0

Tabelle 5: Messung bei Grün - λ_1

λ_2	Messung				Mittelwert	statistischer Fehler
	1	2	3	4		
D_1 / mm	4,1	4,12	4,12	4,14	4,12	0,02
D_2 / mm	5,88	5,84	5,82	5,92	5,87	0,04
D_3 / mm	7,22	7,14	7,14	7,24	7,19	0,05
D_4 / mm	8,34	8,24	8,22	8,32	8,28	0,06
D_5 / mm	9,34	9,16	9,16	9,3	9,24	0,09
D_6 / mm		10,02		10,24	10,13	0,16
D_7 / mm				11,06	11,06	0

Tabelle 6: Messung bei Grün - λ_2

Auch hier tragen wir wieder D_n^2 über n auf und erhalten folgende Geraden:

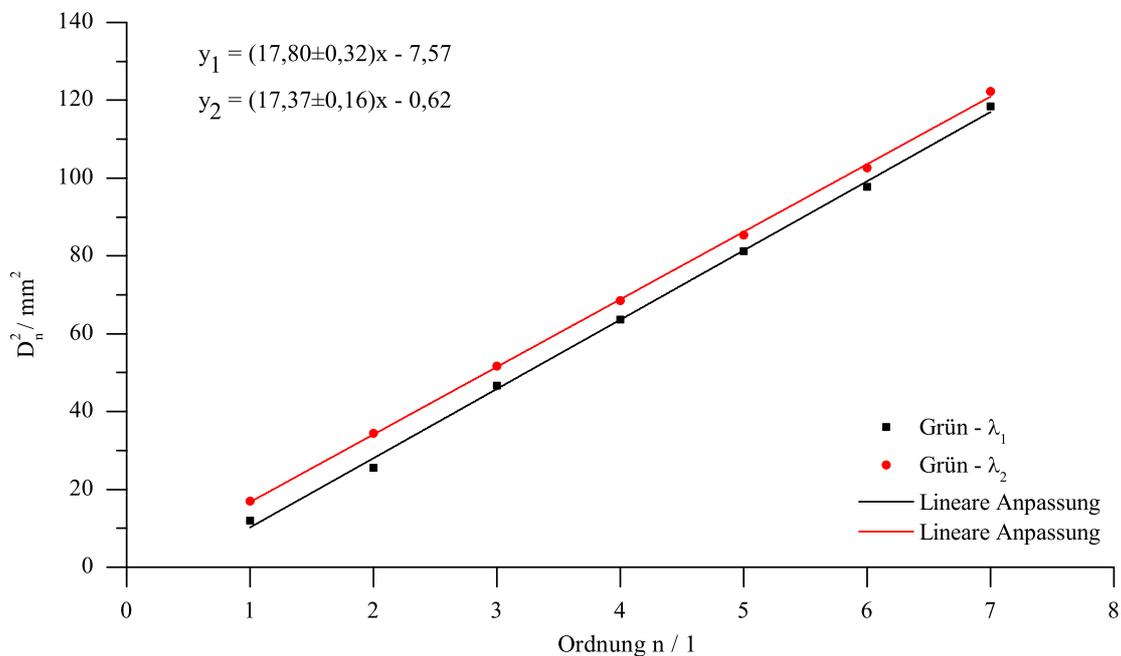


Abbildung 9: Bestimmung der Wellenlänge

Nun können wir auch hier wieder die Wellenlängen λ_1 und λ_2 berechnen. Den Fehler berechnen wir analog zu 7.1 und erhalten folgende Wert:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (571,58 \pm 19,77 \pm 32,04) \text{nm} \\ \lambda_2 &= (557,77 \pm 19,3 \pm 30,88) \text{nm} \end{aligned} \quad (36)$$

Wie schon bei dem UV Licht weichen auch die Werte für das grüne Licht stark vom eigentlichen Wert $\lambda = 535 \text{nm}$ ab. Woher diese große Abweichungen kommen ist uns nicht ersichtlich.

Auch hier macht es aufgrund des großen Fehlers keinen Sinn die Differenz und somit die Hyperfeinstruktur zu bilden.

8 Bestimmung der Hyperfeinaufspaltungen

Wie man sehen kann, war diese Methode zur Bestimmung der Wellenlänge ungeschickt. Besser lässt sich die Hyperfeinaufspaltung mit Formel 20 berechnen:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\bar{\lambda}_i}{8f^2}(D_{1n}^2 - D_{2n}^2) \quad (37)$$

wobei λ_i der jeweilige Mittelwert der Wellenlänge bei UV bzw. grünem Licht ist.

8.1 Aufspaltung des UV Lichts

Setzen wie die vorhandenen Größen in unsere Formel ein so erhalten wir für jede Ordnung zwei $\Delta\lambda$'s. Eins für die Differenz zwischen λ_2 und λ_1 und das zweite für $\lambda_3 - \lambda_2$. Die Werte sind in folgender Tabelle eingetragen.

Ordnung	$\Delta\lambda_{UV_{1-2}} / \text{\AA}$	$\Delta\lambda_{UV_{2-3}} / \text{\AA}$
1	-0,034	-0,062
2	-0,034	-0,061
3	-0,033	-0,061
4	-0,073	-0,016
5	-0,034	-0,057
6	-0,034	-0,063
7	-0,037	-0,062
8	-0,033	-0,053
Mittelwert:	-0,039	-0,054
Stdabw.:	0,014	0,016

Tabelle 7: Hyperfeinaufspaltung - UV

Damit lässt sich nun leicht der Mittelwert, sowie der dazugehörige statistische Fehler bestimmen.

Der systematische Fehler ergibt sich durch:

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta\lambda) &= \sqrt{\left(\frac{\partial(\Delta\lambda)}{\partial\bar{\lambda}}\Delta\bar{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Delta\lambda)}{\partial D_{jm}}\Delta D_{jm}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Delta\lambda)}{\partial D_{(j+1)m}}\Delta D_{(j+1)m}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{(D_{jm}^2 - D_{(j+1)m}^2)}{8f^2}\Delta\bar{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\lambda}}{4f^2}D_{jm}\Delta D_{jm}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\lambda}}{4f^2}D_{(j+1)m}\Delta D_{(j+1)m}\right)^2} \\ &\approx \sqrt{\left(\frac{\bar{\lambda}}{4f^2}D_{jm}\Delta D_{jm}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\lambda}}{4f^2}D_{(j+1)m}\Delta D_{(j+1)m}\right)^2} \end{aligned} \quad (38)$$

In der letzten Zeile wurde der Term mit dem Fehler der gemittelten Wellenlänge vernachlässigt. Da dieser im Bereich von wenigen Nanometern liegt. Sinnvollerweise berechnen wir nun je nur einen Fehler für die Mittelwerte der beiden $\Delta\lambda_i$. Dazu wird nach oben abgeschätzt, in dem wir den größten Fehler der D_m 's verwenden. Mit:

$$\begin{aligned}\Delta D_{1m}^{max} &= 0,09mm \\ \Delta D_{2m}^{max} &= 0,31mm \\ \Delta D_{3m}^{max} &= 0,10mm\end{aligned}\tag{39}$$

folgt für die systematischen Fehler:

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta\lambda_{UV_{1-2}}) &= 0,038\text{\AA} \\ \Delta(\Delta\lambda_{UV_{2-3}}) &= 0,041\text{\AA}\end{aligned}\tag{40}$$

Diese Fehler liegen im Bereich der Wellenlängen der Hyperfeinaufspaltung. Wir vermuten, dass dieser große Fehler apparaturbedingt ist.

Es ergeben sich nun die folgenden Wellenlängen Abstände:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_{UV_{1-2}} &= (-0,039 \pm 0,038 \pm 0,014)\text{\AA} \\ \Delta\lambda_{UV_{2-3}} &= (-0,054 \pm 0,041 \pm 0,016)\text{\AA}\end{aligned}\tag{41}$$

Vergleicht man dies mit den Literaturwerten, so lassen sich doch deutliche Abweichungen erkennen. Bei $\Delta\lambda_{UV_{1-2}}^{lit} = 0,057\text{\AA}$ liegt unser Wert noch im berechneten Fehlerbereich. Dies entspricht einer Abweichung von: -31,48%. Betrachtet man den zweiten Abstand mit $\Delta\lambda_{UV_{2-3}}^{mess} = 0,054\text{\AA}$ so weicht dieser vom Literaturwert $\Delta\lambda_{UV_{2-3}}^{Lit} = -0,054\text{\AA}$ um ganze -48,16% ab. Der Literaturwert liegt hier fast außerhalb des Fehlerbereichs.

8.2 Aufspaltung des grünen Lichts

Analog zur Aufspaltung des UV's Lichts berechnen wir nun die Wellenlängendifferenzen der Hyperfeinstrukturaufspaltung. Da wir hier nur zwei Wellenlängen beobachten konnten, gibt es hier nur eine Differenz:

Ordnung	$\Delta\lambda_{Gr_{1-2}} / \text{\AA}$
1	-0,156
2	-0,279
3	-0,153
4	-0,153
5	-0,131
6	-0,15
7	-0,123
Mittelwert:	-0,164
Stdabw.:	0,052

Tabelle 8: Hyperfeinaufspaltung - Grün

Nun berechnen wir den systematischen Fehler wie oben durch Abschätzung nach oben. Man erhält: $\Delta(\Delta\lambda_{Gr_{1-2}}) = 0,158\text{\AA}$. Auch dieser Fehler ist sehr groß (fast so groß wie der Wert selbst).

So folgt für den Differenz der Wellenlängen der Hyperfeinstrukturaufspaltung bei grünem Licht:

$$\Delta\lambda_{Gr_{1-2}} = (-0,164 \pm 0,158 \pm 0,052)\text{\AA} \quad (42)$$

9 Kernspin von Thallium 205

Zum Schluss dieses Versuchs können wir nun den Kernspin von Thallium bestimmen.

Für den Übergang $7^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{1/2}$ waren drei Übergänge sichtbar. Dies ist nur möglich, falls der Kernspin $I = \frac{1}{2}$ beträgt. Der erwartete vierte Übergang ist aufgrund der Auswahlregeln nicht erlaubt.

Für den Übergang $7^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{3/2}$ erwartet man nun auch drei Übergänge, wobei nur zwei sichtbar waren. Dies liegt daran, dass zwei Wellenlängen sehr nahe beieinander liegen und somit bei unserem Versuchsaufbau nicht zu unterscheiden sind.

Deshalb ist der Kernspin von Thallium $I = \frac{1}{2}$.

Der Ausschnitt aus dem Termschema ist in Abbildung 1 dargestellt.

10 Quellen

- <http://www.wissenschaft-online.de/abo/lexikon/physik/961> - 16.10.2012, 20:30Uhr
- Abbildung 1 - <http://www.phys.nthu.edu.tw/~ywliu/thesis/weiling.pdf> - 18.10.2012, 18:30Uhr
- Abbildung 2 - http://w3-o.hm.edu/fb06/professoren/maier/PraktikumPh4/Anleitungen/FPI_WS0910.pdf
- Vorlesung: Experimentalphysik III, Nienhaus WS11/12

11 Anhang

Im folgenden sind die Grafiken aus denen wir die Radien/Durchmesser bestimmt haben, angefügt. Zunächst für die Lasermessung:

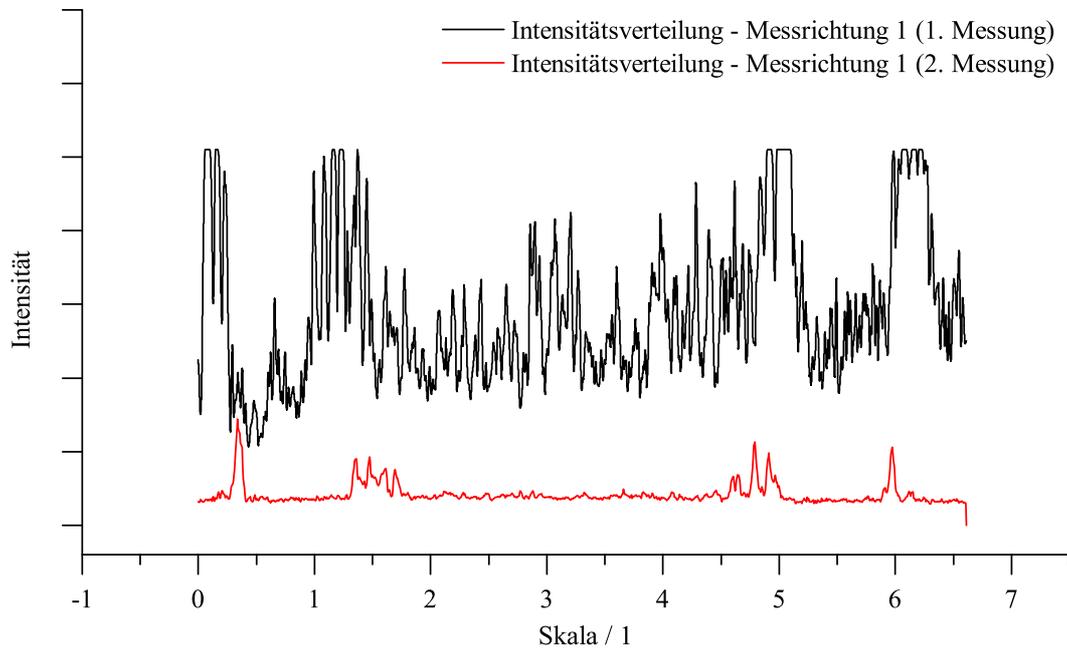


Abbildung 10: Histogramm Laser, Messung 1

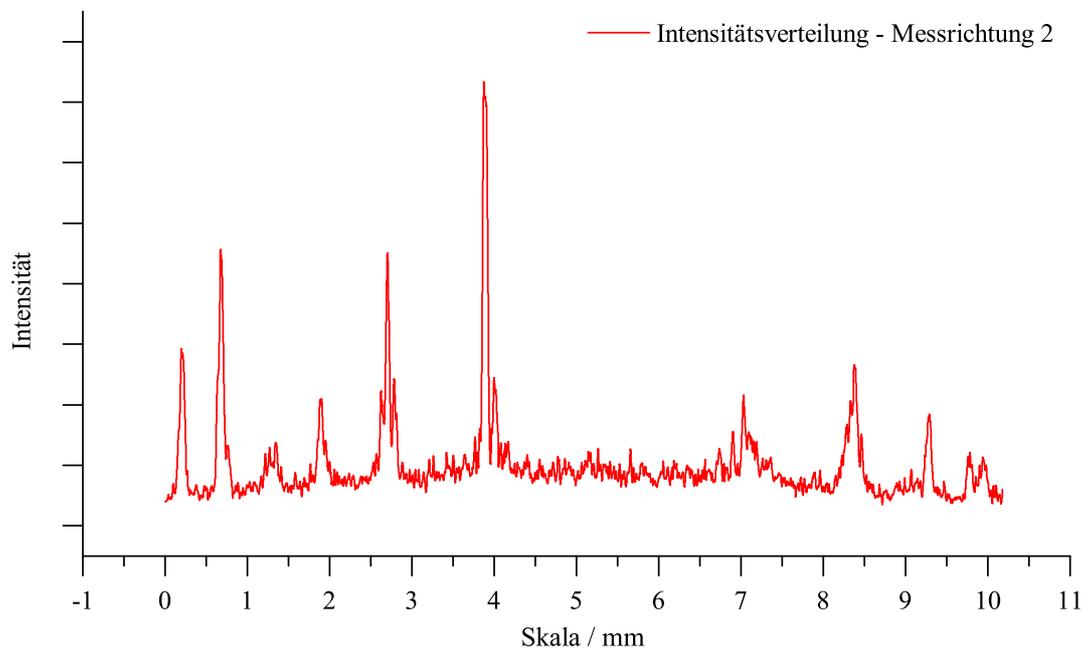


Abbildung 11: Histogramm Laser, Messung 2

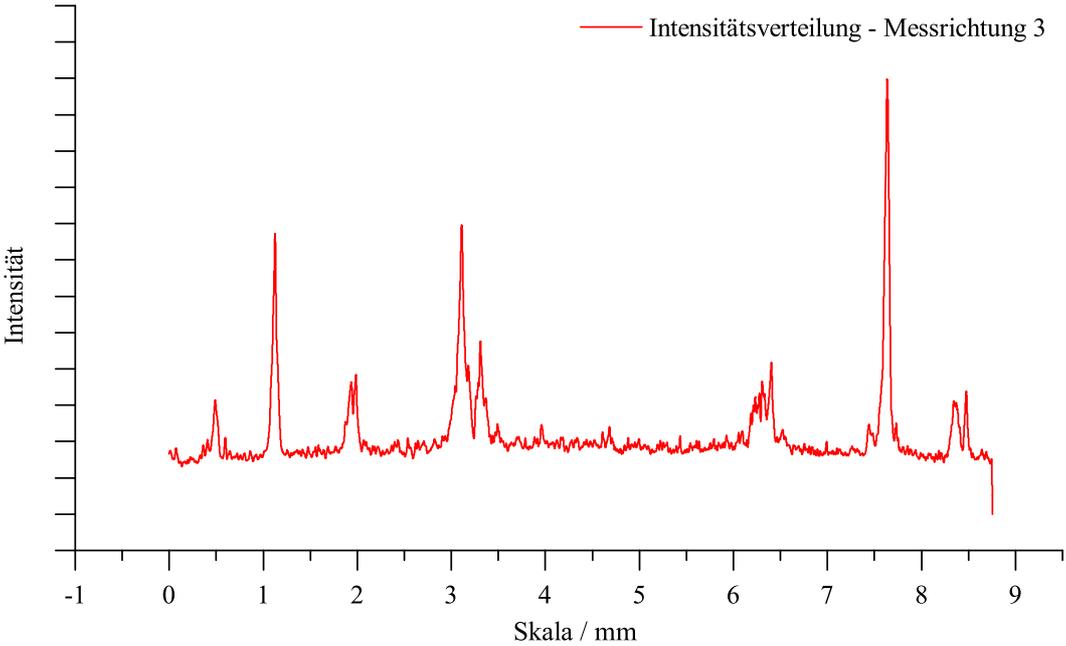


Abbildung 12: Histogramm Laser, Messung 3

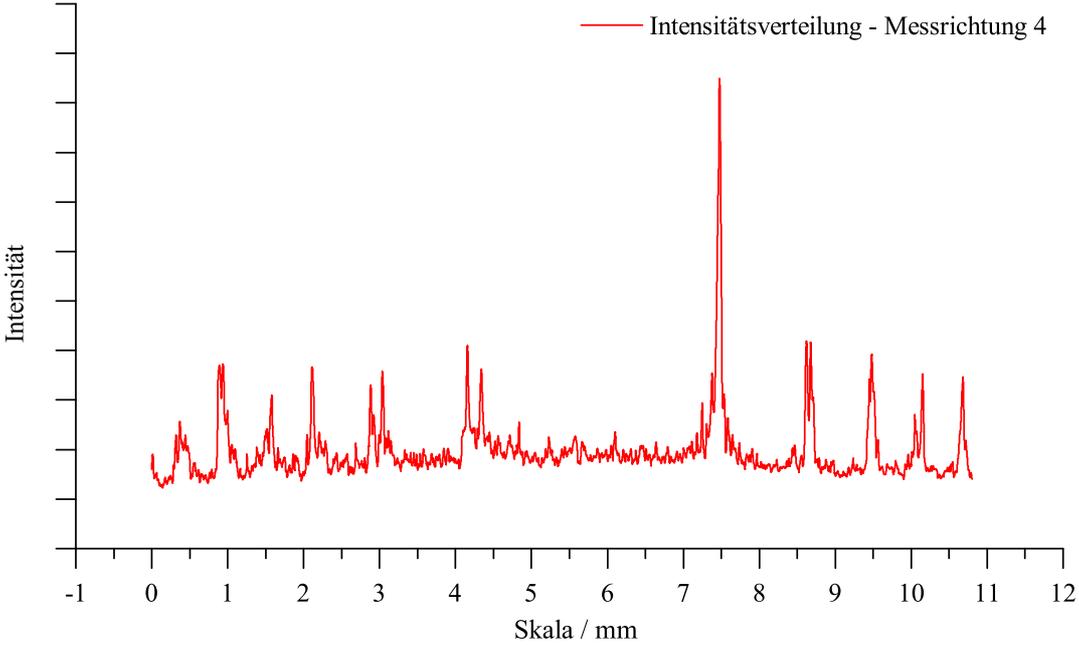


Abbildung 13: Histogramm Laser, Messung 4

Weiter folgen die Schaubilder zur Messung bei grünem Licht:

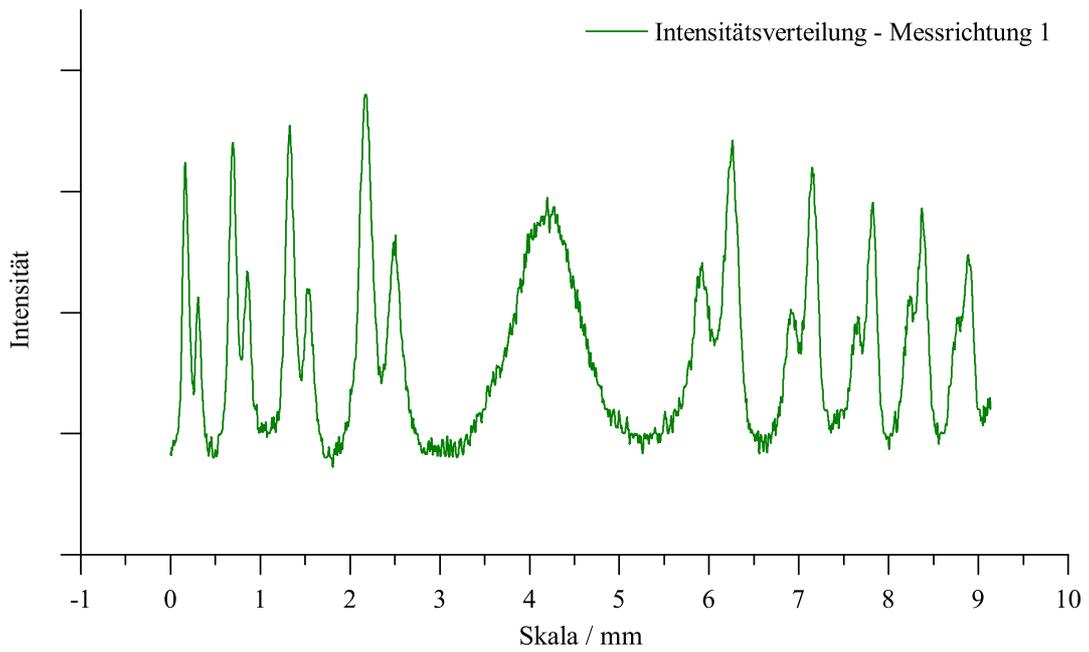


Abbildung 14: Histogramm grünes Licht, Messung 1

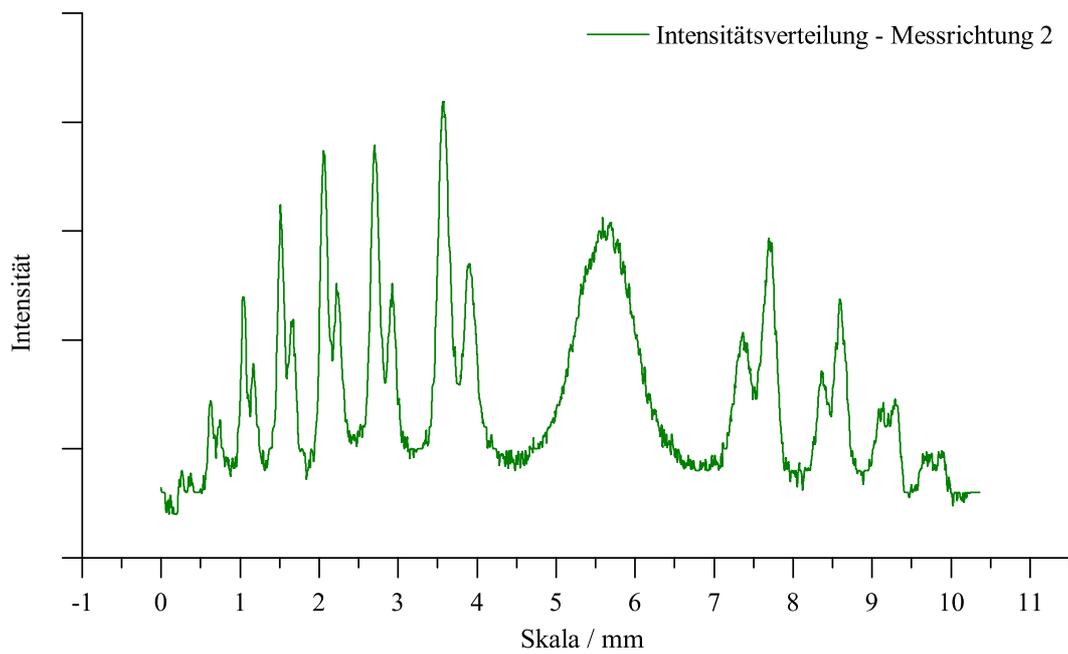


Abbildung 15: Histogramm grünes Licht, Messung 2

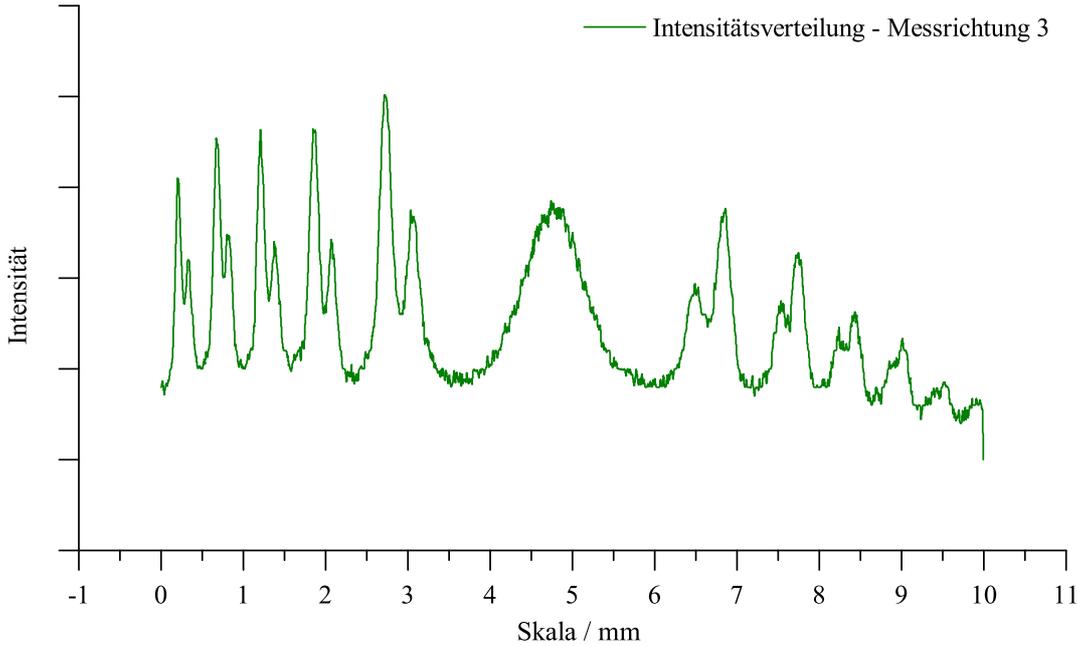


Abbildung 16: Histogramm grünes Licht, Messung 3

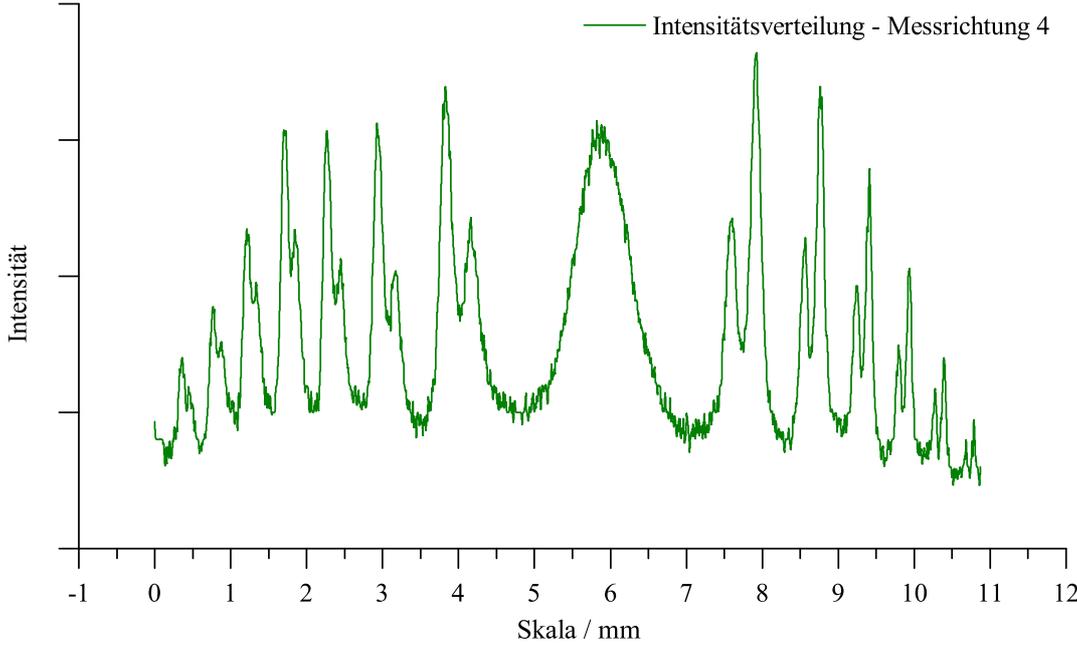


Abbildung 17: Histogramm grünes Licht, Messung 4

Und zuletzt noch die Messung bei UV Licht:

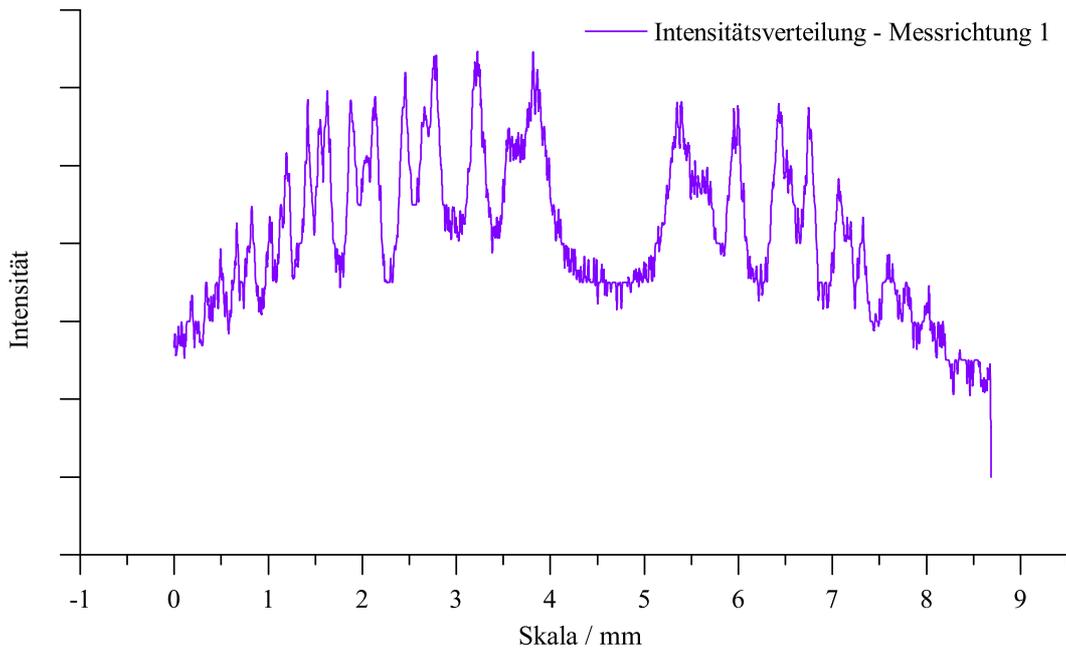


Abbildung 18: Histogramm UV Licht, Messung 1

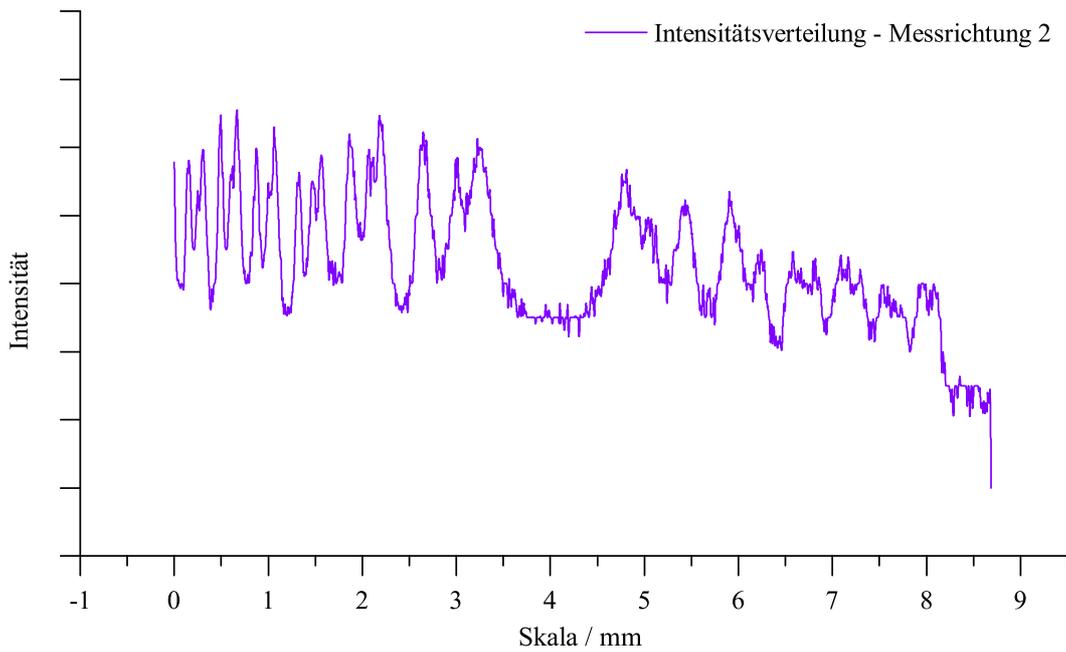


Abbildung 19: Histogramm UV Licht, Messung 2

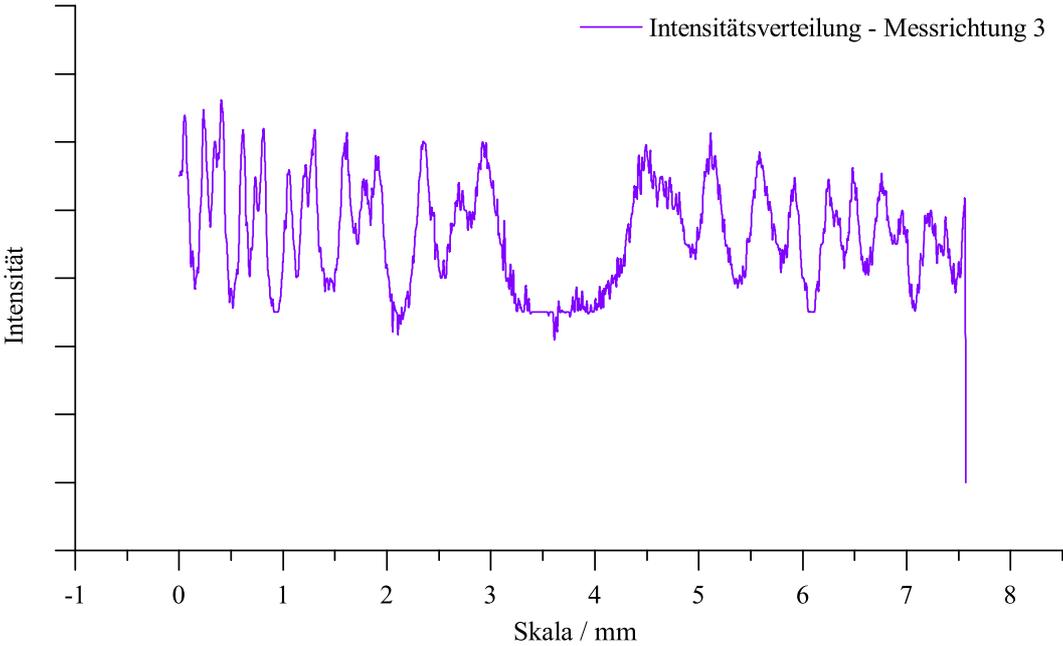


Abbildung 20: Histogramm UV Licht, Messung 3

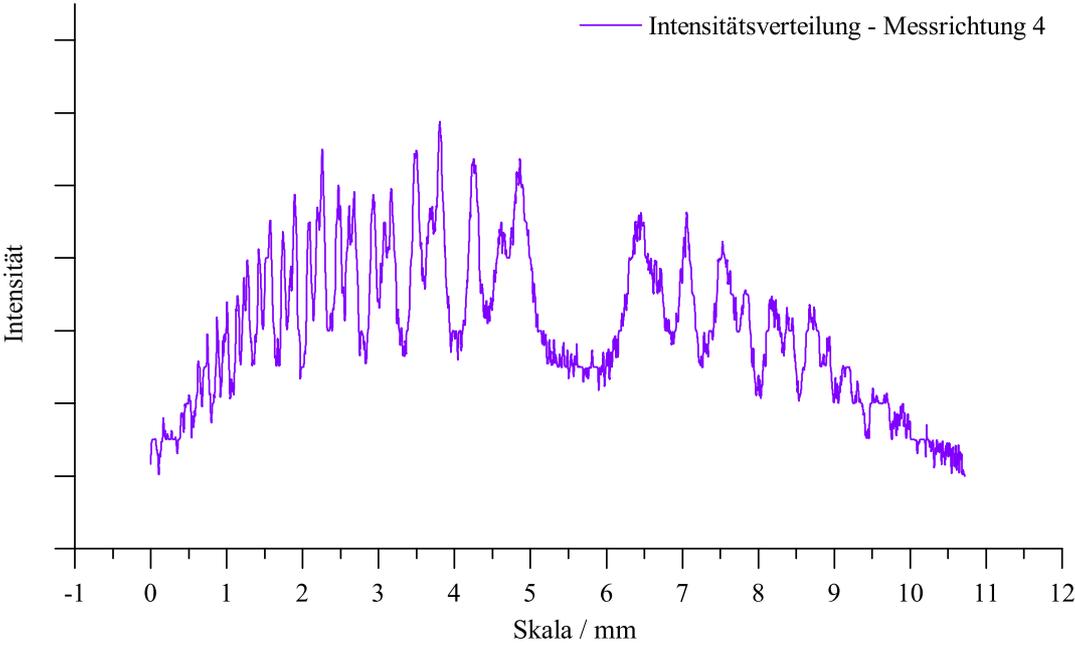


Abbildung 21: Histogramm UV Licht, Messung 4