

P3 WS 2011/2012

Optische Pinzette

Thomas Keck und Marco A. Harrendorf
t.keck@online.de, marco.harrendorf@googlemail.com

Gruppe: 106

Karlsruhe Institut für Technologie, Bachelor Physik

Versuchstag: 23.01.2012

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie zur elektromagnetischen Kraft	3
1.1 Bewegungsgleichung im klassischen elektromagnetischen Feld	3
1.2 Elektromagnetisches Feld eines Lasers	4
1.3 Wechselwirkung des Körpers mit dem elektromagnetischen Feld	5
1.4 Abschätzung der Größenordnung der Kraft	6
1.5 Wirkende Kraft in z-Richtung	7
1.6 Fazit	7
2 Theorie zur Bewegung kleiner Körper in einer Lösung	7
2.1 Brownsche Bewegung	7
2.2 Reibungskraft einer laminaren Flüssigkeit	8
2.3 Versuchsaufbau	9
3 Versuchsauswertung	11
3.1 Einstellen des Laser-Fokus	11
3.2 Anordnung von Polystyrol-Kügelchen	12
3.3 Seife als Beispiel für das klassische Verhalten von Fetten	12
3.4 Untersuchung von Schimmel mit der optischen Pinzette	12
3.5 Die Haltekraft	12
3.5.1 Untersuchung der Brownschen Bewegung	12
3.5.2 Bestimmung der maximalen Haltekraft	15
3.6 Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Bewegung von freien und gefangenen Teilchen	15
3.6.1 Laserstrom $I = 30 \text{ mA}$	16
3.6.2 Laserstrom $I = 35 \text{ mA}$	19
3.7 Unsicherheitsbetrachtung	22
3.8 Auswirkung von Farbstoffen im fokalen Punkt des Lasers	22
Literatur	24

1 Theorie zur elektromagnetischen Kraft

Im nachfolgenden Theorieteil wird aus den Axiomen der klassischen Mechanik und Elektrodynamik die Wirkungsweise der optischen Pinzette abgeleitet.

1.1 Bewegungsgleichung im klassischen elektromagnetischen Feld

Ein Körper erfährt durch die Kraft F entsprechend der klassischen Mechanik eine Impulsänderung:

$$F = \frac{d}{dt} P_M$$

Nach der klassischen Elektrodynamik kennt man die Lorentzkraft:

$$F = q(E + v \times B)$$

$$F = \int dV (\rho E + j \times B)$$

Dabei erstreckt sich das Integral über das Volumen des Körpers, welcher die Ladungsträgerdichte ρ und die Stromdichte j besitzt. Mithilfe der Maxwellgleichungen können ρ und j ersetzt werden. Dabei wird für das Objekt angenommen, dass die Dielektrizität und die Permeabilität des Materials isotrop und linear ist:

$$\rho = \epsilon\epsilon_0 \nabla \cdot E$$

$$j = \frac{1}{\mu\mu_0} \nabla \times B - \epsilon\epsilon_0 \frac{d}{dt} E$$

$$F = \int dV \left(\epsilon\epsilon_0 E (\nabla \cdot E) + \frac{1}{\mu\mu_0} (\nabla \times B) \times B - \epsilon\epsilon_0 \frac{d}{dt} E \times B \right)$$

Wir betrachten die auftretenden Terme nun einzeln nacheinander. Der letzte Term kann mithilfe der Produktregel und des Induktionsgesetzes umgeschrieben werden. Dabei wird die Energiestromdichte S und die Lichtgeschwindigkeit c (im Medium) eingeführt:

$$S = \frac{1}{\mu\mu_0} E \times B$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0}}$$

$$\epsilon\epsilon_0 \frac{d}{dt} E \times B = \epsilon\epsilon_0 \frac{d}{dt} (E \times B) - \epsilon\epsilon_0 E \times \frac{d}{dt} B$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{S}{c^2} + \epsilon\epsilon_0 E \times (\nabla \times E)$$

Für die doppelten Kreuzprodukte kann man folgende mathematische Identität verwenden:

$$\begin{aligned}
 A \times (\nabla \times B) &= (\nabla B) \cdot A - (A \cdot \nabla) B \\
 F &= \int dV \left(\epsilon \epsilon_0 E (\nabla \cdot E) - \frac{1}{\mu \mu_0} \left(\underbrace{\nabla B \cdot B}_{=0} - (B \cdot \nabla) B \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{d}{dt} \frac{S}{c^2} - \epsilon \epsilon_0 ((\nabla \cdot E) E - (E \cdot \nabla) E) \right) \\
 F &= \int dV \left(\frac{1}{\mu \mu_0} (B \cdot \nabla) B - \frac{d}{dt} \frac{S}{c^2} + \epsilon \epsilon_0 (E \cdot \nabla) E \right)
 \end{aligned}$$

Nun wird noch der Impuls des Elektromagnetischen Feldes P_F im Volumen des Körpers definiert. Auf die Definition des Maxwell'schen Spannungstensors wird verzichtet:

$$P_F = \int dV \frac{S}{c^2}$$

Unsere Bewegungsgleichung für einen Körper in einem elektromagnetischen Feld nimmt damit folgende Form an:

$$\frac{d}{dt} (P_M + P_F) = \int dV \left(\frac{1}{\mu \mu_0} (B \cdot \nabla) B + \epsilon \epsilon_0 (E \cdot \nabla) E \right) \quad (1)$$

1.2 Elektromagnetisches Feld eines Lasers

Ein Laser liefert sehr kohärentes Licht, welches in sehr guter Näherung durch eine ebene Welle beschrieben werden kann. Der Laserstrahl breitet sich o.B.d.A. in z-Richtung aus und habe einen Radius von r . Die Ausdehnung r und Position x_{extern} und y_{extern} werden durch eine zweidimensionale Gaußglocke moduliert:

$$\begin{aligned}
 E &= E_0 \sin(kz - \omega t) \exp\left(-\frac{1}{2r^2} \left((x - x_{extern})^2 + (y - y_{extern})^2 \right)\right) e_x \\
 B &= \frac{E_0}{c_0} \sin(kz - \omega t) \exp\left(-\frac{1}{2r^2} \left((x - x_{extern})^2 + (y - y_{extern})^2 \right)\right) e_y
 \end{aligned}$$

Mit der Dispersionsrelation:

$$\omega = k \cdot c_0$$

E und B erfüllen dabei nur näherungsweise die Wellengleichung, die durch die Maxwellgleichungen bestimmt wird. Für einen auf das Objekt fokussierten Laserstrahl sind die anderen Terme jedoch vernachlässigbar, da sie mit r abfallen. Für die Energiestromdichte erhält man damit

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{E_0^2}{c_0 \mu_0} \sin^2(kz - \omega t) \exp\left(-\frac{1}{r^2} \left((x - x_{extern})^2 + (y - y_{extern})^2 \right)\right) e_z \\
 &= \frac{E_0^2}{Z} \sin^2(kz - \omega t) \exp\left(-\frac{1}{r^2} \left((x - x_{extern})^2 + (y - y_{extern})^2 \right)\right) e_z.
 \end{aligned}$$

Mit der Vakuumimpedanz $Z = c_0 \mu_0$.

1.3 Wechselwirkung des Körpers mit dem elektromagnetischen Feld

Der Körper habe nun die Masse m und sol sich frei in der x - y -Ebene des Koordinatensystems bewegen können, nicht jedoch in der z -Richtung. Die Ausdehnung des Körpers sei außerdem von der Größenordnung von r . Für die Bewegungsgleichung in der **x - y Ebene** folgt mit der Energiestromdichte des Lasers sofort:

$$\begin{aligned}
 P_F &= 0 \\
 ma &= \int dV \left(\frac{1}{\mu\mu_0} (B \cdot \nabla) B + \epsilon\epsilon_0 (E \cdot \nabla) E \right) \\
 &= \int dV E_0 \sin(kz - \omega t) \exp\left(-\frac{1}{2r^2} \left((x - x_{extern})^2 + (y - y_{extern})^2 \right)\right) \left(\frac{1}{c_0\mu\mu_0} \partial_y B + \epsilon\epsilon_0 \partial_x E \right) \\
 &= -E_0^2 \epsilon_0 \int dV \sin^2(kz - \omega t) \exp\left(-\frac{1}{r^2} \left((x - x_{extern})^2 + (y - y_{extern})^2 \right)\right) \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \epsilon(x - x_{extern}) \\ \frac{1}{\mu}(y - y_{extern}) \end{pmatrix} \\
 &= -E_0^2 \epsilon_0 \underbrace{\int dx \exp\left(-\frac{1}{r^2} (x - x_{extern})^2\right) \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \epsilon(x - x_{extern}) \\ 0 \end{pmatrix}}_{y\text{-Komponente}=I_x} \\
 &\quad \cdot \underbrace{\int dy \exp\left(-\frac{1}{r^2} (y - y_{extern})^2\right) \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\mu}(y - y_{extern}) \end{pmatrix}}_{x\text{-Komponente}=I_y} \cdot \underbrace{\int dz \sin^2(kz - \omega t)}_{=I_z} \\
 &= \frac{1}{2} E_0^2 \epsilon_0 I_z \begin{pmatrix} \epsilon \exp\left(-\frac{1}{r^2} (x - x_{extern})^2\right) \Big|_{x_1}^{x_2} \cdot I_y \\ \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{1}{r^2} (y - y_{extern})^2\right) \Big|_{y_1}^{y_2} \cdot I_x \end{pmatrix} \tag{2}
 \end{aligned}$$

Dabei sind x_1, x_2 die linke und rechte Begrenzung des Körpers und y_1, y_2 die untere und obere Begrenzung, unter der Annahme, dass die Geometrie des Körper rechtwinklig zum Koordinatensystem ist, ist dies nicht der Fall muss das Integral welches über dV läuft numerisch berechnet werden. Die Konstanten I_x, I_y, I_z können nur numerisch berechnet werden, also Konstanten sind positiv. Das Integral I_z ist dabei zeitlich zu mitteln über eine Periode. Es können nun einige Spezialfälle betrachtet werden:

Fall 1: $y_0 = y_{extern}$ **und** $x_0 = x_{extern}$ Der Laserstrahl fokussiert exakt die Mitte x_0, y_0 des Körper und das Integral verschwindet, da die e-Funktion symmetrisch ist. Der Körper bleibt also in Ruhe:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{x_2 + x_1}{2} \\
 y_0 &= \frac{y_2 + y_1}{2} \\
 ma &= 0
 \end{aligned}$$

Fall 2: $y_0 = y_{extern}$ Wieder verschwindet die Kraft in y-Richtung. Es wirkt nun nur eine Kraft in x-Richtung. Alle Konstanten werden nun zu χ zusammengefasst, wobei $\chi > 0$ gilt. Es bleibt:

$$\begin{aligned}
 ma_x &= \chi \exp\left(-\frac{1}{r^2}(x - x_{extern})^2\right) \Big|_{x_1}^{x_2} \\
 &= \chi \left(\exp\left(-\frac{1}{r^2}(x_2 - x_{extern})^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{r^2}(x_1 - x_{extern})^2\right) \right)
 \end{aligned}$$

Dieses Integral liefert nur dann einen endlichen Beitrag, wenn die Ausdehnung des Körpers in der Größenordnung von r liegt. Dies wurde weiter oben bereits angenommen, jedoch nicht verwendet. Außerdem darf nicht gelten $|x_i - x_{extern}| \gg r$, der Körper muss also vom Laserstrahl erfasst werden.

Genauere Betrachtung von Fall 2 für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage Um das Integral genauer zu verstehen nehmen wir an, dass die beiden Terme sich zuerst gerade kompensieren, dass also keine Kraft auf den Körper wirkt. Dies ist zum Beispiel für $x_1 = -2, x_2 = 2, x_{extern} = 0$ der Fall.

Bewegt sich der Laserstrahl (gesteuert über x_{extern}) nun nach rechts, so wird der rechte Term kleiner und der Linke größer, es wirkt also eine positive Kraft in x-Richtung (z.B. $x_1 = -2, x_2 = 2, x_{extern} = 1$). Dann folgt $(x_2 - x_{extern})^2 < (x_1 - x_{extern})^2$. Der Körper folgt also dem Laserstrahl in x-Richtung. Analoges gilt aus Symmetriegründen für jede der beiden Raumrichtungen.

Fall 3: $|y_0 - y_{extern}| \gg r$ **oder** $|x_0 - x_{extern}| \gg r$ In beiden Fällen interagiert der Laserstrahl überhaupt nicht mit dem betrachteten Körper, da die die Gaußglocke alle Kräfte exponentiell unterdrückt (auch die Beiträge von I_x, I_y). Alles andere hätte auch sehr überrascht.

1.4 Abschätzung der Größenordnung der Kraft

Zur Abschätzung der wirkenden Kraft im 2. Fall betrachten wir den Fall für $x_2 = x_{extern}$ und $x_1 \ll x_{extern}$. Dann bleibt nur einer der beiden Terme des Integrals stehen. Die Beiträge von I_y und I_z werden bis auf den Faktor $\frac{r}{k}$ vernachlässigt, da es sich hierbei für einen Körper mit einer Ausdehnung in der Größenordnung des Laserstrahls, um einen Faktor der Größenordnung 1 handelt, der nur numerisch berechnet werden kann. Weiterhin wird angenommen, dass das Material des Körpers keine nennenswerte elektrischen und magnetischen Eigenschaften besitzt:

$\epsilon = \mu = 1$ Dabei ist J die Leistung des Lasers und λ die Wellenlänge.

$$\begin{aligned}
 r &= 1 \cdot 10^{-6} \text{m} \\
 \lambda &= 638 \text{nm} \\
 k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\
 J &= 25 \text{mW} \\
 E_0^2 &= \frac{J}{\pi r^2 Z} \\
 F_{EM} &= \frac{1}{2} E_0^2 \epsilon_0 \cdot \frac{r}{k} \\
 &= \frac{Z \epsilon_0 J \lambda}{\pi^2 r} \\
 &= 2.7 \cdot 10^{-12} \text{N}
 \end{aligned}$$

Die wirkende Kraft ist zwar sehr klein, jedoch bestätigen andere Quellen [Sischka] die Maximalkraft von optischen Pinzetten im Bereich von pN . Für ein spezielles Teilchen können genauere Berechnungen durchgeführt werden, indem I_z, I_y numerisch berechnet werden.

1.5 Wirkende Kraft in z-Richtung

In der vorangegangenen Ableitung wurde nur die Bewegung des Körpers in der x-y-Ebene betrachtet. Der Körper erfährt im realen Experiment auch eine Kraft in Richtung des Fokuspunktes des Lasers. Der Laser wird dabei über ein Linsensystem direkt über dem Körper fokussiert. Ein einfaches Modell wäre den Laser anstatt als zweidimensionale Gaußglocke als dreidimensionale Gaußglocke zu modulieren, um so den relevanten Fokuspunkt zu beschreiben. Ganz analog zur x-y-Raumrichtung wirkt dann auch eine Kraft die den Körper in z-Richtung in den Fokus zieht.

1.6 Fazit

Die hier entwickelte Theorie liefert die richtigen Abhängigkeiten und Größenordnungen und ist eine Verallgemeinerung der Betrachtungsweise, dass das E-Feld des Lasers ein Dipolmoment im Körper erzeugt und mit diesem wechselwirkt. Die theoretische Ableitung der Größenordnung und der nichttrivialen Abhängigkeit von λ und r wird von unabhängigen Experimenten bestätigt [Sischka].

2 Theorie zur Bewegung kleiner Körper in einer Lösung

2.1 Brownsche Bewegung

In der klassischen Thermodynamik wird die Temperatur von Körpern mit der kinetischen Energie einzelner Atome und Moleküle erklärt. Die mittlere kinetische Energie eines idealen Gases

kann dabei über die kinetische Gastheorie bestimmt werden, aus ihr folgt die mittlere Geschwindigkeit der Gasteilchen.

$$\begin{aligned}\bar{E}_{kin} &= \frac{3}{2}k_B T \\ \bar{v} &= \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}\end{aligned}\quad (3)$$

Die Statistik der Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen ist durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung gegeben. Ein Körper, der sich innerhalb dieses idealen Gases befindet, erfährt durch die Gasteilchen zufällige Stöße und bewegt sich. Mathematisch wird diese Art der zufälligen Bewegung durch den sogenannten *Random-Walk* beschrieben. Physikalisch spricht man *brownischer Molekularbewegung*. Die Brownsche Molekularbewegung spielt nur dann eine Rolle, wenn die Masse des betrachteten Körpers klein genug ist, um bei einem Stoß eine messbare Impulsänderung zu erfahren. Aus der Brownschen Bewegung folgt eine mittlere quadratische Verschiebung $\langle r^2(t) \rangle$ für den betrachteten Körper. Im Experiment wird die Verschiebung eines Teilchens $r_m(t_i)$ vom Startpunkt zu verschiedenen Zeitpunkten gemessen. Dabei wird der Mittelwert über die verschiedenen Zeiten und über mehrere Partikel m gebildet.

$$\langle r^2(t) \rangle = \frac{1}{M} \sum_m \left(\frac{1}{n} \sum_i r_m^2(t_i) \right)$$

Diese mittlere quadratische Verschiebung definiert die Diffusionskonstante D des betrachteten Mediums in einer zweidimensionalen Ebene:

$$\langle r^2(t) \rangle = 4Dt$$

Einstein konnte zeigen, dass folgende Relation erfüllt ist:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a}$$

Dabei ist a der Radius des als kugelförmig angenommenen Körpers und η die Viskosität des Mediums. Kennt man die mittlere quadratische Verschiebung pro Zeit $m = \frac{\langle r^2(t) \rangle}{t}$ aus dem Experiment, so kann man die Viskosität des Mediums bestimmen:

$$\eta = \frac{2k_B T}{3\pi a m}$$

2.2 Reibungskraft einer laminaren Flüssigkeit

Im Experiment betrachten wir eine Lösungsflüssigkeit mit der Viskosität η , der betrachtete Körper sei bewege sich mit der Geschwindigkeit v . Für eine laminare Umströmung des Körpers ergibt sich eine Stoksche Reibungskraft:

$$F_{Stokes} = 6\pi\eta a v$$

Die maximale Geschwindigkeit v_{max} die ein Körper, welcher mithilfe der elektromagnetischen Kraft der optischen Pinzette bewegt wird, erreichen kann. Liefert die maximale Kraft der optischen Pinzette, da diese gerade der Reibungskraft bei dieser Geschwindigkeit entsprechen muss.

$$F_{EM} = 6\pi\eta a v_{max}$$

Mit Hilfe der Viskosität, die man über die Brownsche Bewegung messen kann, und der maximalen Geschwindigkeit, auf den ein Körper mit Hilfe der optischen Pinzette gebracht werden kann, erhält man die Kraft der optischen Pinzette. Bemerkenswert ist dabei, dass die Masse des Körpers bei dieser Überlegung nicht von Bedeutung ist.

2.3 Versuchsaufbau

Die optische Pinzette besteht im Wesentlichen aus zwei Aufbauten, einem Lasersystem, das zur Verschiebung kleiner Teilchen verwendet wird, und einem optischen Mikroskop, welches der visuellen Beobachtung des Verschiebungsvorgangs dient.

Das Lasersystem besteht aus einem Laser mit einer Wellenlänge λ von 638 nm , der mit Hilfe von zwei Linsen zunächst so aufgeweitet wird, dass das Objektiv möglichst vollständig ausgeleuchtet wird. Nach Durchgang durch die beiden Linsen trifft der Laser auf einen Strahlenteiler, der den Laserstrahl auf das Objektiv und die darunter befindliche Probe lenkt. Durch die Bewegung des Objektisches unter Verwendung zweier Servomotoren kann der Laser relativ zur Probe in X- und Y-Richtung bewegt werden und somit eine Verschiebung von Teilchen in der Probe erfolgen. Der prinzipielle Aufbau des Lasersystems ist in Abbildung 1 dargestellt.

Zur visuellen Beobachtung des Verschiebevorgangs mit Hilfe einer Videosoftware auf einem Mess-PC ist oberhalb des Objektivs und Strahlenteilers eine CCD-Kamera angebracht, die durch einen Rotfilter vor Überbelichtung durch den Laser geschützt ist und durch eine im Strahlengang befindliche Linse ein Abbild der Probe erhält. Zur Feineinstellung des Probenabbaus kann der Abstand zwischen Probe und Objektiv mit einer Mikrometerschraube passend eingestellt werden. Die notwendige Ausleuchtung der Probe erfolgt von unten durch die Verwendung einer LED-Lampe, deren Leuchtkegel unter Zuhilfenahme einer Linse ausreichend aufgeweitet wird. Der prinzipielle Aufbau des optischen Mikroskops ist in Abbildung 2 dargestellt.

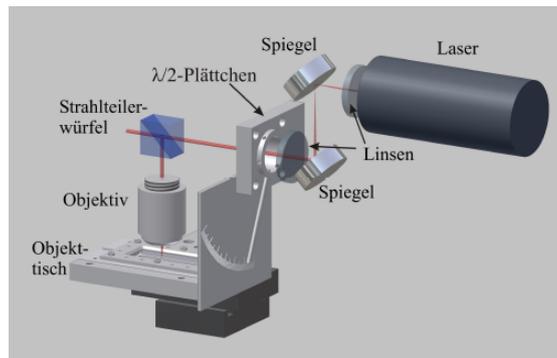


Abbildung 1: Prinzipieller Aufbau des Lasersystems: Entnommen aus [Toennies]

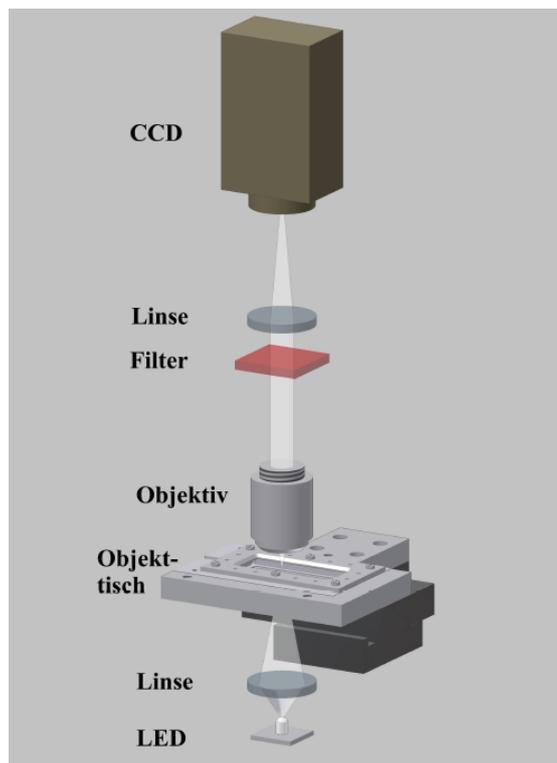


Abbildung 2: Prinzipieller Aufbau des Mikroskops: Entnommen aus [Toennies]

3 Versuchsauswertung

3.1 Einstellen des Laser-Fokus

In diesem Versuchsteil stellten wir die Höhe des Lasers über dem Objektträger so ein, dass der Fokus des Lasers genau innerhalb der Probe lag.

Hier gingen wir entsprechend der Anleitung in [Vorbereitungsmappe] vor:

1. Mit der Mikrometerschraube bewegten wir den Objektträger so weit wie möglich nach unten.
2. Wir platzieren die Probe auf dem Objektträger.
3. Wir bewegten den Objektträger wieder mit der Mikrometerschraube nach oben, wobei wir das Bild der CCD-Kamera auf dem Computer beobachteten.
4. Bei der Aufwärtsbewegung des Objektträgers sahen wir zuerst einen verzernten roten Laserfleck. Dieser entsteht, wenn der Fokus des Lasers die Oberseite der Probenabdeckung erreicht.
5. Bei der weiteren Aufwärtsbewegung des Objektträgers sahen wir einen weiteren roten Laserfleck. Dieser entsteht, wenn der Fokus des Lasers die Unterseite der Probenabdeckung erreicht.
6. Durch eine weitere Aufwärtsbewegung des Objektträgers ergab sich nun ein dritter Leuchtfleck. Der Fokus des Lasers lag somit nun in der Probenebene und es ergab sich ein relativ scharfes Abbild der Probe.

Die Abbildung 3 zeigt nochmals exemplarisch die einzelnen Schritte der Laserfokussierung.

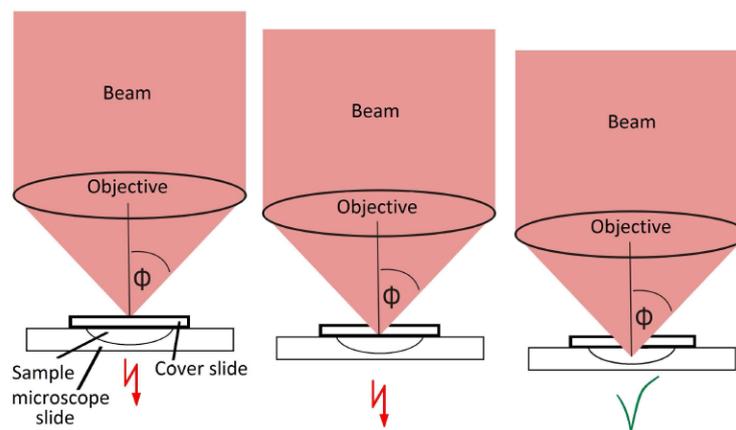


Abbildung 3: Darstellung der Fokussierungsschritte: Entnommen aus [Vorbereitungsmappe]

3.2 Anordnung von Polystyrol-Kügelchen

In diesem Demonstrationsversuch verwendeten wir Polystyrol-Kügelchen mit $3 \mu\text{m}$ Durchmesser und versuchten mehrere Polystyrol-Kügelchen an einem Ort anzuhäufen. Hierdurch konnten wir uns sehr gut mit der Ansteuerung der beiden Servomotoren der optischen Pinzette vertraut machen.

3.3 Seife als Beispiel für das klassische Verhalten von Fetten

Dieser Demonstrationsversuch konnte mangels Material leider nicht durchgeführt werden.

3.4 Untersuchung von Schimmel mit der optischen Pinzette

Dieser Demonstrationsversuch konnte mangels Material leider nicht durchgeführt werden.

3.5 Die Haltekraft

3.5.1 Untersuchung der Brownschen Bewegung

Für die Untersuchung der brownischen Bewegung wird angenommen, dass die betrachteten Partikel keine gemeinsame Driftgeschwindigkeit aufweisen, also:

$$\langle r \rangle = 0$$

Dies konnte im Experiment jedoch nicht erreicht werden. In allen 3 aufgenommenen Messungen ist klar eine gemeinsame Driftgeschwindigkeit der Partikel zu erkennen. Es gilt daher

$$\langle r \rangle = v \cdot t$$

Aus den aufgenommenen Daten kann diese gemeinsame Driftgeschwindigkeit deshalb leicht bestimmt werden, und die mittlere quadratische Verschiebung um diesen Effekt korrigiert werden v wurde dabei für x und y Richtung unabhängig in Schaubild 4 gefittet. Man erkennt sehr deutlich, dass der Drift hauptsächlich in x -Richtung statt fand. Die korrigierte mittlere quadratische Verschiebung lautet damit:

$$\langle (r - v \cdot t)^2 \rangle = 4D \cdot t$$

In Schaubild 5 sind die korrigierten Daten geplottet und gefittet. Auffallend ist, dass die Messdaten nicht im Ursprung beginnen. Dies ist jedoch kein Fehler im Auswerteskript, sondern spiegelt die Sprünge wieder die die Tracking-Software zwischen zwei aufeinanderfolgenden Lokalisierungen ausführt. Dies wird untermauert von der Tatsache, dass diese Unstetigkeit auf größeren Zeitskalen nicht ins Gewicht fällt und die Messdaten ansonsten gut durch eine Ursprungsgerade beschrieben werden. Die so ermittelte Diffusionskonstante ist:

$$D = (1.19579 \cdot 10^{-7} \pm 6.07 \cdot 10^{-10}) \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

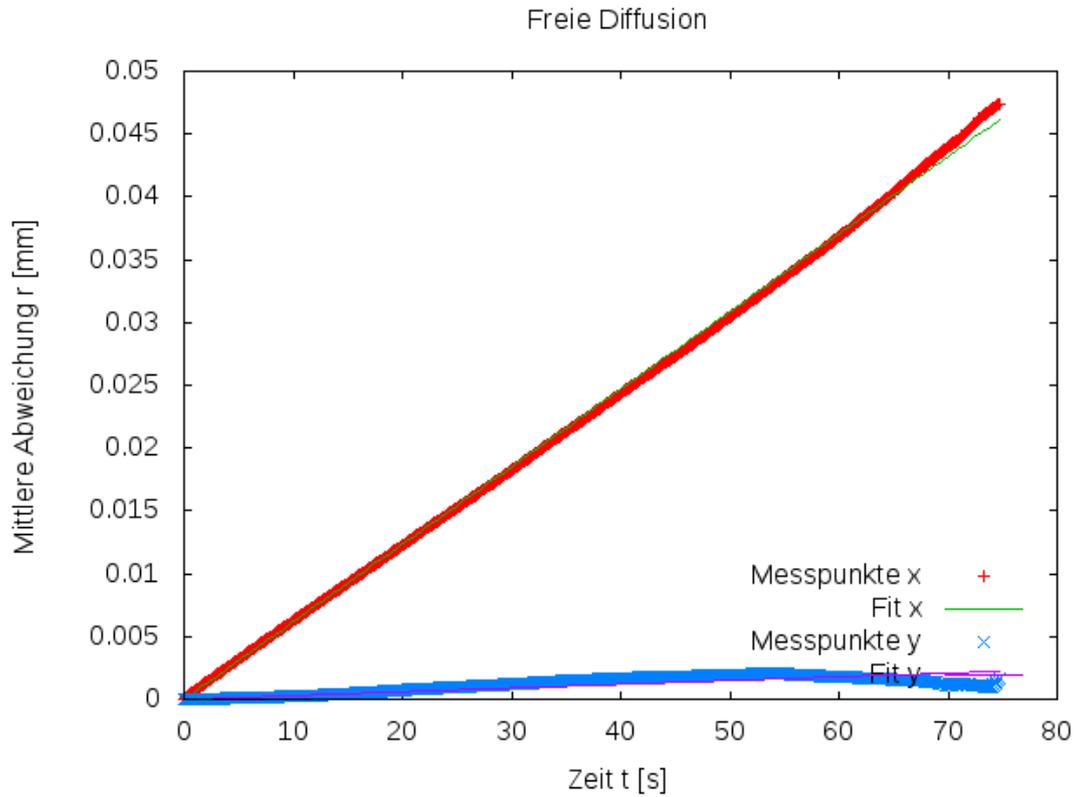


Abbildung 4: $\langle r \rangle$ in x und y . Mit gefitteter Driftgeschwindigkeit $v_x = (6.17366 \cdot 10^{-4} \pm 3.355 \cdot 10^{-7}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v_y = (2.9803 \cdot 10^{-5} \pm 3.493 \cdot 10^{-7}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$

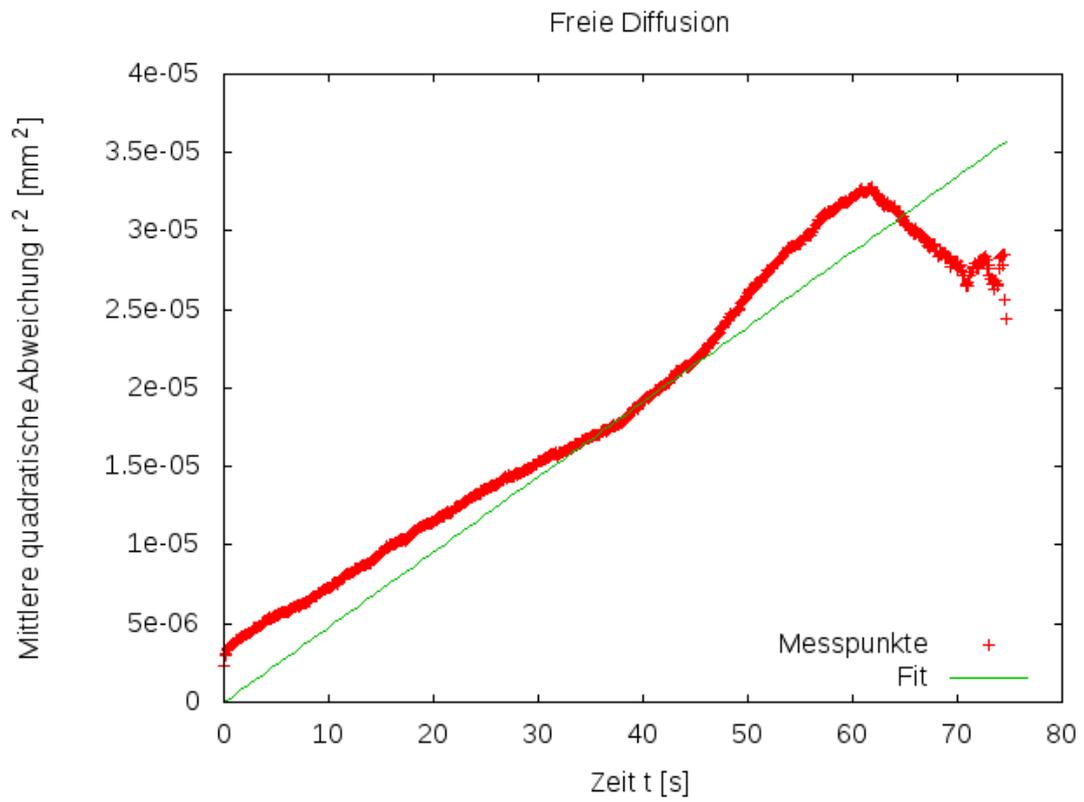


Abbildung 5: Mittlere quadratische Verschiebung

3.5.2 Bestimmung der maximalen Haltekraft

Wie bereits im Theorieteil gezeigt ist die Viskosität des Mediums gegeben durch:

$$a = \frac{3}{2} \cdot 10^{-6} \text{m}$$

$$m = 4D = (4.784 \cdot 10^{-7} \pm 2.43 \cdot 10^{-9}) \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$T = 300\text{K}$$

$$\eta = \frac{2k_B T}{3\pi a m}$$

$$= 1.225 \cdot 10^{-03} \pm 6.222 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$$

Die maximale Geschwindigkeit konnte infolge der Driftbewegung der Teilchen nur sehr schwer gemessen werden. Als maximale Geschwindigkeit mit der ein Partikel mithilfe der optischen Pinzette durch das Medium gezogen werden konnte, wurde die Geschwindigkeit festgelegt, bei der der Partikel sich gegen den Drift gerade nicht mehr ziehen lies, mit dem Drift dies aber noch möglich war.

Laserintensität 40mA	$v_{max,40mA} = (0.014 \cdot 10^{-3} \pm 0.001 \cdot 10^{-3}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Laserintensität 30mA	$v_{max,30mA} = (0.004 \cdot 10^{-3} \pm 0.001 \cdot 10^{-3}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Die maximale Geschwindigkeit wurde für zwei verschiedene Laserintensitäten ermittelt. Bemerkenswert muss außerdem, dass die maximale Haltekraft des Lasers auch wesentlich von der Fokussierung (siehe Theorieteil) abhängt. Eine Messreihe mit unterschiedlichen Fokussierungen wurde jedoch nicht durchgeführt. Für die beiden Laserintensitäten ergibt sich somit mit der in der Theorie hergeleiteten Formel eine maximale Haltekraft von:

$$F_{EM} = 6\pi\eta a v_{max}$$

Laserintensität 40mA	$v_{max,40mA} = (4.848 \cdot 10^{-13} \pm 3.472 \cdot 10^{-14}) \text{N}$
Laserintensität 30mA	$v_{max,30mA} = (3.463 \cdot 10^{-14} \pm 3.463 \cdot 10^{-14}) \text{N}$

Die gemessenen Werte liegen um Faktor 10 unterhalb der theoretisch hergeleiteten Kraft. Aufgrund der starken Driftbewegungen innerhalb des Mediums war auch zu erwarten, dass der experimentelle Wert geringer ausfällt.

3.6 Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Bewegung von freien und gefangenen Teilchen

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Bewegung von freien und gefangenen Teilchen wurde sowohl bei einem Laserstrom I von 30 mA als auch bei einem Laserstrom I

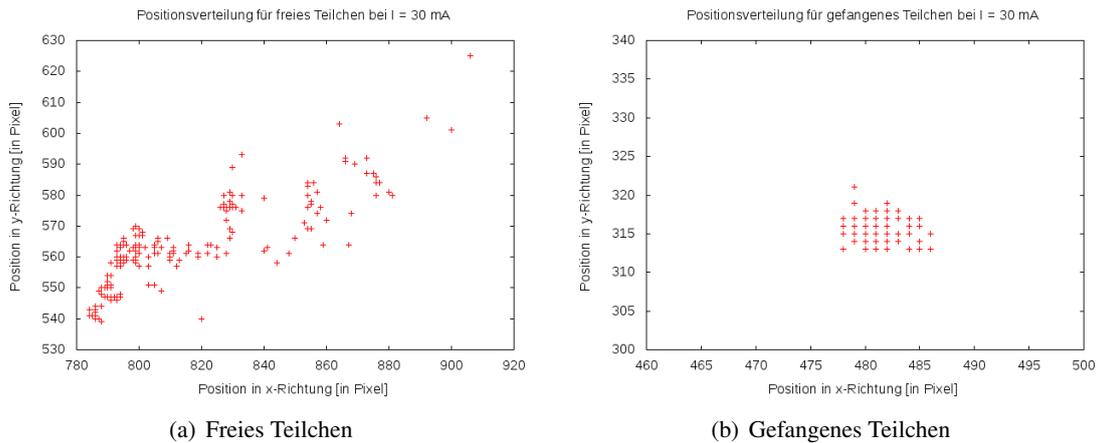


Abbildung 6: Trajektorie für das freie und gefangene Teilchen bei einem Laserstrom $I = 30 \text{ mA}$

von 35 mA die Position eines freien Teilchens und eines gefangenen Teilchens über 200 Bilder hinweg bestimmt, wobei die Bildaufzeichnung mit einer Frequenz f von 10 Hz erfolgte.

3.6.1 Laserstrom $I = 30 \text{ mA}$

In der Abbildung 6 ist die Trajektorie des freien und des gefangenen Teilchens nebeneinander dargestellt. Zu beachten ist, dass die Skalierung zwischen beiden Schaubilder unterschiedlich gewählt ist.

Es ist ersichtlich, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des freien Teilchens – wie theoretisch auf Grund der Brownschen Molekularbewegung erwartet – annähernd überall gleich wahrscheinlich ist, während die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des gefangenen Teilchens nur für einen endlichen, geschlossenen Bereich von Null verschieden ist.

In der Abbildung 7 ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das freie Teilchen nochmals in Form eines Histogramms für die X-Richtung und Y-Richtung dargestellt.

Die für das freie Teilchen auf Grund der Brownschen Molekularbewegung theoretisch zu erwartende Gleichverteilung ist im jeweiligen Histogramm auf Grund der geringen Anzahl an ausgewerteten Bilder nicht gut erkennbar.

Allerdings zeigt der Vergleich mit der Abbildung 8, in der die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für das gefangene Teilchen aufgetragen sind, sehr deutlich die Unterschiede. Denn es lässt sich zeigen, dass das gefangene Teilchen einer Boltzmann-Verteilung unterliegt.

Hierzu wurde folgende Fit-Funktion $f(x)$ an das jeweilige Histogramm gefittet:

$$f(x) = a \cdot e^{-b \cdot (x - c)^2}$$

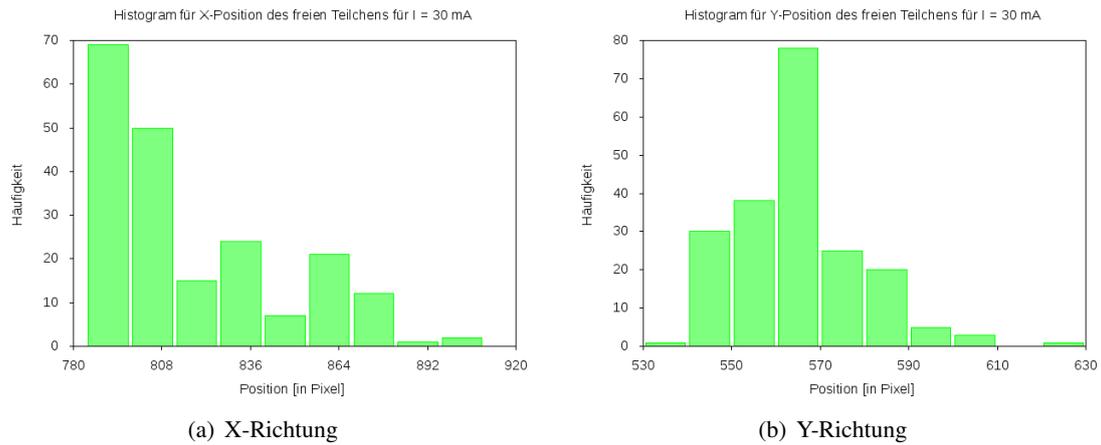


Abbildung 7: Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für das freie Teilchen bei einem Laserstrom $I = 30 \text{ mA}$

Für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in X-Richtung ergaben sich folgende Fit-Parameter:

$$\begin{aligned}
 a &= 61.67 \pm 5.14 \text{ [px]} \\
 b &= 0.39 \pm 0.07 \left[\frac{1}{(\text{px})^2} \right] \\
 c &= 480.78 \pm 0.11 \text{ [px]}
 \end{aligned}$$

Für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in Y-Richtung ergaben sich folgende Fit-Parameter:

$$\begin{aligned}
 a &= 64.23 \pm 4.78 \text{ [px]} \\
 b &= 0.36 \pm 0.06 \left[\frac{1}{(\text{px})^2} \right] \\
 c &= 315.80 \pm 0.10 \text{ [px]}
 \end{aligned}$$

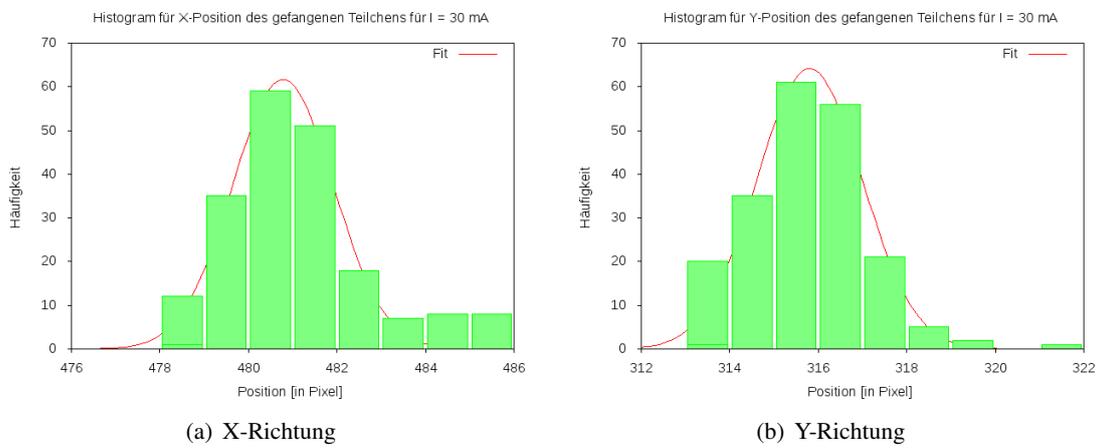


Abbildung 8: Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für das gefangene Teilchen bei einem Laserstrom $I = 30 \text{ mA}$

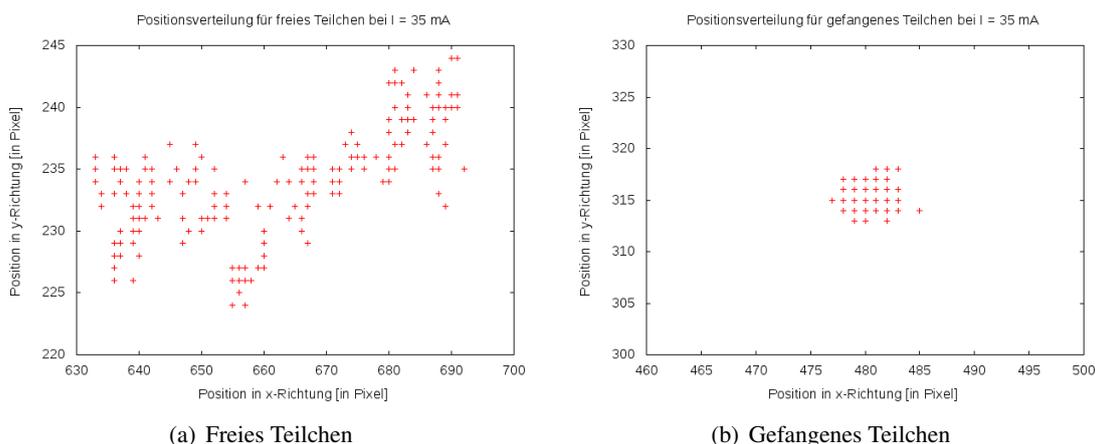


Abbildung 9: Trajektorie für das freie und gefangene Teilchen bei einem Laserstrom $I = 35 \text{ mA}$

3.6.2 Laserstrom $I = 35 \text{ mA}$

In der Abbildung 9 ist die Trajektorie des freien und des gefangenen Teilchens nebeneinander dargestellt. Zu beachten ist, dass die Skalierung zwischen beiden Schaubilder unterschiedlich gewählt ist.

Es ist ersichtlich, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des freien Teilchens – wie theoretisch auf Grund der Brownschen Molekularbewegung erwartet – annähernd überall gleich wahrscheinlich ist, während die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des gefangenen Teilchens nur für einen endlichen, geschlossenen Bereich von Null verschieden ist.

In der Abbildung 10 ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das freie Teilchen nochmals in Form eines Histogramms für die X-Richtung und Y-Richtung dargestellt.

Die für das freie Teilchen auf Grund der Brownschen Molekularbewegung theoretisch zu erwartende Gleichverteilung ist im jeweiligen Histogramm auf Grund der geringen Anzahl an ausgewerteten Bilder nicht gut erkennbar.

Allerdings zeigt der Vergleich mit der Abbildung 11, in der die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für das gefangene Teilchen aufgetragen sind, sehr deutlich die Unterschiede. Denn es lässt sich zeigen, dass das gefangene Teilchen einer Boltzmann-Verteilung unterliegt.

Hierzu wurde folgende Fit-Funktion $f(x)$ an das jeweilige Histogramm gefittet:

$$f(x) = a \cdot e^{-b \cdot (x - c)^2}$$

Für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in X-Richtung ergaben sich folgende Fit-Parameter:

$$\begin{aligned} a &= 52.74 \pm 8.98 \text{ [px]} \\ b &= 0.24 \pm 0.09 \left[\frac{1}{(\text{px})^2} \right] \\ c &= 480.63 \pm 0.27 \text{ [px]} \end{aligned}$$

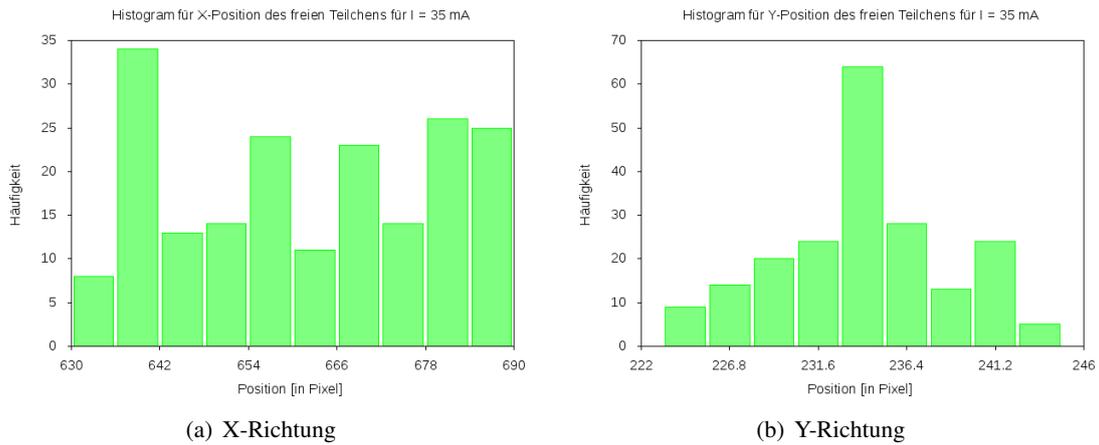


Abbildung 10: Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für das freie Teilchen bei einem Laserstrom $I = 35 \text{ mA}$

Für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in Y-Richtung ergaben sich folgende Fit-Parameter:

$$\begin{aligned}
 a &= 68.73 \pm 3.43 \text{ [px]} \\
 b &= 0.37 \pm 0.04 \left[\frac{1}{(\text{px})^2} \right] \\
 c &= 316.06 \pm 0.07 \text{ [px]}
 \end{aligned}$$

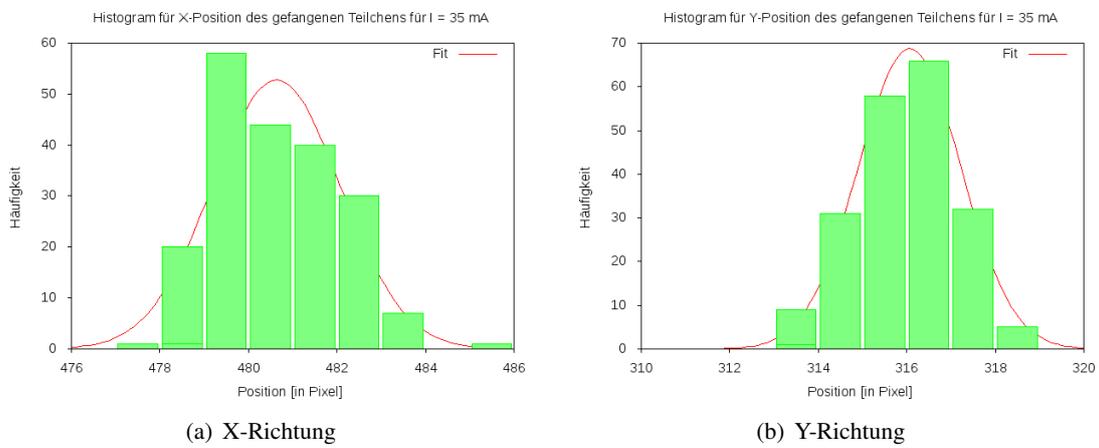


Abbildung 11: Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für das gefangene Teilchen bei einem Laserstrom $I = 35 \text{ mA}$

3.7 Unsicherheitsbetrachtung

Eine quantitative Angabe von systematischen Unsicherheiten gestaltet sich wegen des festen Messaufbaus und des Fehlens direkt vorliegender Messdaten für diesen Versuch als schwierig. Jedoch sind die nachfolgend genannten, systematischen Unsicherheiten – vor allem in Hinblick auf den vorherigen Versuchsteil – nennenswert:

- Das Teilchen-Tracking im Auswerteprogramm: Auf Grund von Schwächen des Auswertalgorithmus kann es bei der Nachverfolgung von Teilchen in der Auswerte-Software zu relativ großen, sprunghaften Änderungen der Teilchenposition kommen, obwohl das Teilchen nahezu in Ruhe verharrt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Tracking-Algorithmus nur schlecht den Mittelpunkt des Teilchens bestimmen kann und somit der reale Mittelpunkt des Teilchens selten mit dem virtuellen übereinstimmt.
- Wahl der Aufteilung des Histogramms: Bei der Auftragung der Teilchenposition in ein Histogramm kann es durch die notwendige Festlegung auf eine Binsgröße und die Beschränkung auf ein Positions-Intervall zu einer systematischen Unsicherheit kommen. Im Versuch zeigte sich nämlich, dass besonders die freien Teilchen neben der freien Diffusion auch eine Drift aufweisen. Daher muss davon ausgegangen werden, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Teilchen nicht homogen um die Ausgangsposition herum verteilt ist.
- Wahl der Laserintensität: Bei der Beobachtung des gefangenen Partikels für die nachfolgende Erstellung eines Histogramms ist darauf zu achten, dass die Laserintensität und somit die Haltekraft des Lasers nicht allzu groß gewählt wird. Andernfalls kann die Auswerte-Software geringfügige, statistische Positionsschwankungen nicht mehr richtig auflösen und die ausgegebenen Positionsänderungen entsprechen nur noch Schwankungen im Tracking-Algorithmus.

3.8 Auswirkung von Farbstoffen im fokalen Punkt des Lasers

In diesem abschließenden Demonstrationsversuch untersuchten wir die Auswirkung von Farbstoffen im fokalen Punkt des Lasers:

Als sich ein Objektträger mit einem roten Farbstrich im Strahlengang befand, wurde ein großer Teil des Laserstrahls bzw. des roten Lichts reflektiert und gestreut, jedoch fast nichts transmittiert. Auf Grund der geringen Transmission und des daraus resultierenden geringen Impulses ist nur eine geringe Haltekraft des Lasers zu erwarten.

Trägt man hingegen einen schwarzen Farbstrich auf den Objektträger auf, so wird das komplette sichtbare Licht absorbiert und es erfolgt keine Transmission. Auf Grund der Absorption kommt es zu einer starken Erhitzung an der Probenfläche, sodass man den Laser auch zum Schneiden nutzen kann. Man spricht dann von einem Laser-Skalpell. In dem vorliegenden Fall wurden durch die Absorption des Laserlichts die schwarzen Farbmoleküle im Fokus des Lasers zerstört und es ergaben sich weiße Schnitte, wenn der Laser bewegt wurde.

Ein Anwendungsfall dieses Phänomens ist das Matrix-Schreiben auf dünnen Oberflächen: Hierzu wird der Teil der Oberfläche, der nicht bearbeitet werden soll, mit einer reflektierenden

Schicht überzogen, während der Teil der Oberfläche, der abgetragen werden soll, mit einer absorbierenden Schicht versehen wird. Durch Beleuchtung der gesamten Oberfläche mit einem Laser kann dann das gewünschte Muster erzeugt werden.

Literatur

[Toennies] A. Tönnies: Aufbau und Konzeptionierung einer optischen Pinzette für das Anfängerpraktikum – Wissenschaftliche Arbeit von Antje Tönnies, Universität Stuttgart

[Sischka] A. Sischka: Aufbau einer Optischen Pinzette - Diplomarbeit Universität Bielefeld

[Vorbereitungsmappe] Vorbereitungsmappe Gitterschwingungen

P3 WS 2011/2012

Optische Pinzette - Nachbesserung

Thomas Keck und Marco A. Harrendorf
t.keck@online.de, marco.harrendorf@googlemail.com

Gruppe: 106

Karlsruhe Institut für Technologie, Bachelor Physik

Versuchstag: 23.01.2012

1 Zu 3.5.1 – Untersuchung der brownischen Bewegung

Auf Anraten des Betreuers wurden bei der Ermittlung der Diffusionskonstanten mittels der mittleren quadratischen Verschiebung Messpunkte mit einer Diffusionszeit von über 60 Sekunden nicht mehr berücksichtigt, da diese eine zu schlechte Statistik aufweisen und nicht mit dem theoretisch erwarteten linearen Anstieg vereinbar sind.

Die so ermittelte neue Diffusionskonstante beträgt:

$$D = (1.29294 \cdot 10^{-7} \pm 4.722 \cdot 10^{-10}) \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$$

Dadurch ändert sich die Viskosität in Abschnitt 3.5.2 „Bestimmung der maximalen Haltekraft“ zu:

$$\eta = 1.1330 \cdot 10^{-3} \pm 4.138 \cdot 10^{-06} \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$$

Die maximale Haltekraft für die verschiedenen Laserintensitäten ist schließlich:

Laserintensität 40mA	$v_{max,40mA} = (4.485 \cdot 10^{-13} \pm 3.208 \cdot 10^{-14}) \text{ N}$
Laserintensität 30mA	$v_{max,30mA} = (3.204 \cdot 10^{-14} \pm 3.204 \cdot 10^{-14}) \text{ N}$

Die maximale Haltekraft ist also infolge der geringeren Viskosität um 7.5% kleiner geworden.

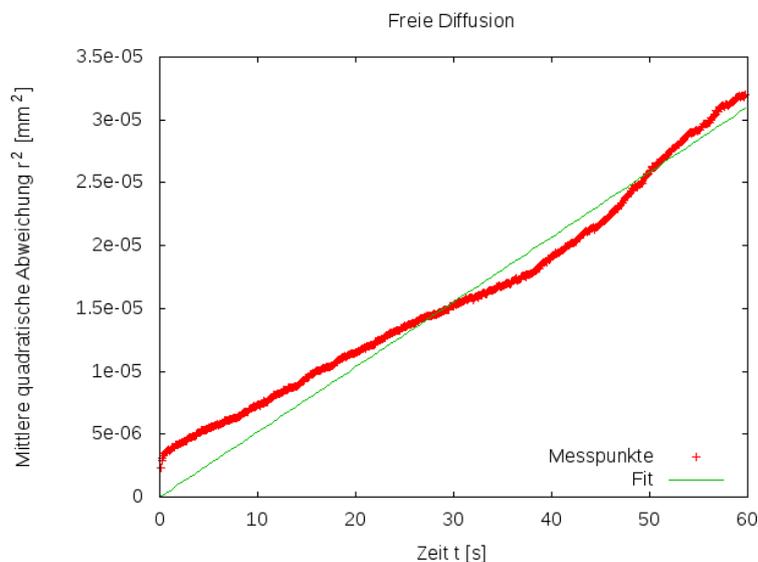


Abbildung 1: Mittlere quadratische Verschiebung

2 Zu 3.6 – Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Bewegung von freien und gefangenen Teilchen

Abweichend von der Aufgabenstellung in [Vorbereitungsmappe], nach der jeweils für die x- und y-Position der freien und gefangenen Teilchen ein Histogramm angefertigt werden sollte, wird nun noch entsprechend der Vorgabe durch den Betreuer die radiale Position $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ der betrachteten Teilchen in Histogrammen dargestellt.

2.0.1 Laserstrom $I = 30 \text{ mA}$

In der Abbildung 2 ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das freie Teilchen in Form eines Histogramms für die radiale Position $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dargestellt.

In der Abbildung 3 ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das gefangene Teilchen in Form eines Histogramms für die radiale Position $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dargestellt. Zusätzlich wurde eine Boltzmann-Verteilung an das Histogramm gefittet. Hierzu wurde folgende Fit-Funktion $f(x)$ verwendet:

$$f(x) = a \cdot e^{-b \cdot (x - c)^2}$$

Für die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit ergaben sich folgende Fit-Parameter:

$$a = 60.95 \pm 18.21 \text{ [px]}$$

$$b = 0.64 \pm 0.37 \left[\frac{1}{(\text{px})^2} \right]$$

$$c = 574.52 \pm 0.28 \text{ [px]}$$

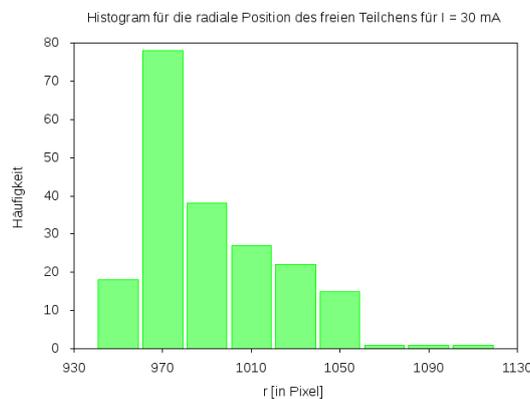


Abbildung 2: Radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das freie Teilchen bei einem Laserstrom $I = 30 \text{ mA}$

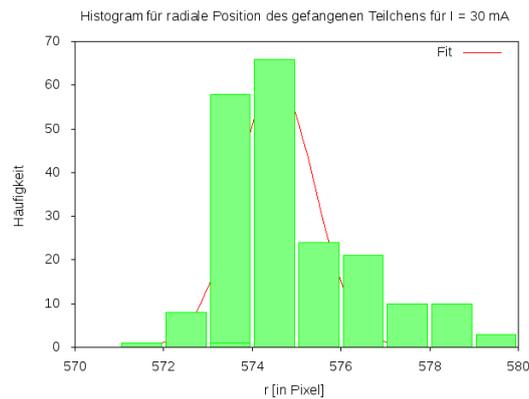


Abbildung 3: Radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das gefangene Teilchen bei einem Laserstrom $I = 30 \text{ mA}$

2.0.2 Laserstrom $I = 35 \text{ mA}$

In der Abbildung 4 ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das freie Teilchen in Form eines Histogramms für die radiale Position $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dargestellt.

In der Abbildung 5 ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das gefangene Teilchen in Form eines Histogramms für die radiale Position $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dargestellt. Zusätzlich wurde eine Boltzmann-Verteilung an das Histogramm gefittet. Hierzu wurde folgende Fit-Funktion $f(x)$ verwendet:

$$f(x) = a \cdot e^{-b \cdot (x - c)^2}$$

Für die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit ergaben sich folgende Fit-Parameter:

$$a = 48.54 \pm 10.86 \text{ [px]}$$

$$b = 0.21 \pm 0.10 \left[\frac{1}{(\text{px})^2} \right]$$

$$c = 574.60 \pm 0.38 \text{ [px]}$$

Literatur

[Toennies] A. Tönnies: Aufbau und Konzeptionierung einer optischen Pinzette für das Anfängerpraktikum – Wissenschaftliche Arbeit von Antje Tönnies, Universität Stuttgart

[Sischka] A. Sischka: Aufbau einer Optischen Pinzette - Diplomarbeit Universität Bielefeld

[Vorbereitungsmappe] Vorbereitungsmappe Optische Pinzette

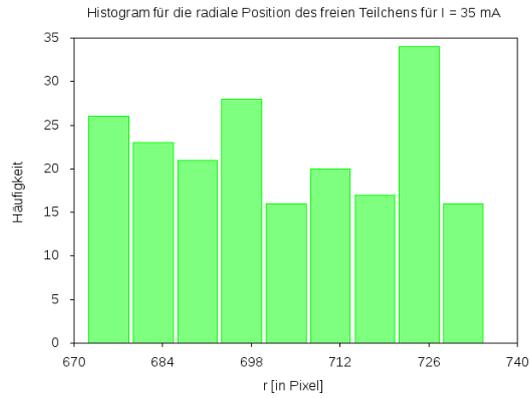


Abbildung 4: Radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das freie Teilchen bei einem Laserstrom $I = 35 \text{ mA}$

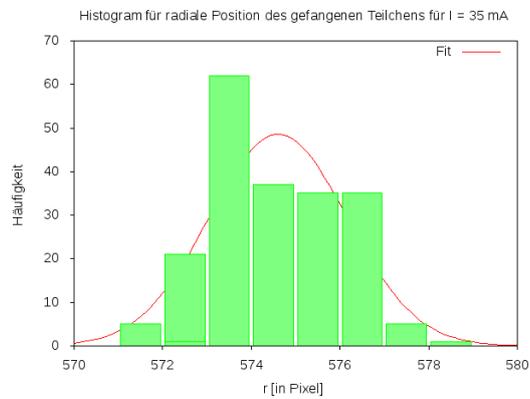


Abbildung 5: Radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das gefangene Teilchen bei einem Laserstrom $I = 35 \text{ mA}$