

P3 WS 2011/2012

Zeemaneffekt

Thomas Keck und Marco A. Harrendorf
t.keck@online.de, marco.harrendorf@googlemail.com

Gruppe: 106

Karlsruhe Institut für Technologie, Bachelor Physik

Versuchstag: 05.12.2011

Inhaltsverzeichnis

1 Hintergrund	3
1.1 Vorbemerkung	3
1.2 Der Elektronenspin S	3
1.2.1 Definition	3
1.2.2 Magnetisches Moment	3
1.3 Der Bahndrehimpuls L	4
1.3.1 Definition	4
1.3.2 Periodische elektromagnetische Störung	4
1.3.3 Magnetisches Moment	4
1.4 Der Gesamtdrehimpuls J	4
1.4.1 Definition	4
1.4.2 Periodische elektromagnetische Störung	5
1.4.3 Magnetisches Moment	5
1.5 Der Zeeman-Effekt	6
1.5.1 Schwaches äußeres Magnetfeld	6
1.5.2 Spezialfall „normaler Zeemaneffekt“	7
1.5.3 Der Paschen-Back-Effekt	7
1.5.4 Der quadratische Zeemann-Effekt	8
1.5.5 Der Stark-Effekt	8
1.6 Das Termschema des Helium-Atoms	8
2 Versuch	12
2.1 Versuchsaufbau	12
2.2 Übersichtsspektrum	12
2.3 Zeeman-Aufspaltung der 667.8nm Linie	12
2.4 Bestimmung von $\frac{e}{m}$ aus der Zeeman-Aufspaltung	14
2.5 Unsicherheitsbetrachtung	14
3 Messung: $\frac{e}{m}$	15
3.1 Versuchsaufbau und Durchführung	15
3.2 Fehler der Parameter	15
3.3 Systematischer Fehler	15
3.4 Statistischer Fehler	16
3.5 Messresultat	17
Literatur	18

1 Hintergrund

1.1 Vorbemerkung

In der Quantenmechanik sind Messwerte jeweils durch die Eigenwerte von hermiteschen Operatoren beschrieben. Operatoren werden im Folgenden mit \hat{A} gekennzeichnet.

Der Spin von Teilchen wird jeweils durch die zugehörige Quantenzahl beschrieben, der Faktor \hbar taucht daher nur in der zum Operator gehörenden Eigenwertgleichung auf.

Zustände $|\psi\rangle$ werden in diesem Protokoll durchgehend nur durch die Quantenzahlen der Drehimpuls-Freiheitsgrade beschrieben, da nur diese für die Beschreibung des Experiments von Interesse sind. Die Quantenmechanik beschreibt nach heutigem Kenntnisstand die messbare Wirklichkeit korrekt. Im folgenden Theorieteil wird deshalb weitestmöglichst auf veraltete Gedankengebäude wie die klassische Elektronentheorie und das Vektormodell verzichtet und stattdessen die quantenmechanische Theorie entwickelt.

1.2 Der Elektronenspin S

1.2.1 Definition

Jedes Elektron besitzt einen Eigendrehimpuls, genannt Spin $s = \frac{1}{2}$. Elementarteilchen mit halbzahligem Spin zählen zu den Fermionen und gehorchen der Fermi-Dirac-Statistik. Anschaulich unterliegen diese Teilchen dem Pauli-Prinzip, d.h. in einem betrachteten System können 2 Fermionen nicht gleichzeitig die gleichen Quantenzahlen besitzen. Die Spins von mehreren Elektronen in einem betrachteten System addieren sich zum Gesamtspin $S = \sum_i s_i$ und unterliegen einer gemeinsamen Richtungsquantelung. Der Gesamtspin kann also in Bezug auf eine Quantisierungsachse nur diskrete Werte $\hbar m_S$ mit $|m_S| < S$ und $m_S \in \{-S, -S + 1, \dots, S - 1, S\}$ annehmen. Der Spinoperator \hat{S} der auf ein System mit Spin S und magnetischer Spinquantenzahl m_S wirkt ist wie folgt definiert:

$$\hat{S}^2 |S, m_S\rangle = \hbar S (S + 1) |S, m_S\rangle \quad (1)$$

$$\hat{S}_z |S, m_S\rangle = \hbar m_S |S, m_S\rangle \quad (2)$$

1.2.2 Magnetisches Moment

Der Elektronenspin ist mit einem magnetischen Moment $\hat{\mu}$ verknüpft. Die Proportionalitätskonstante $g_S = 2$ wird als Landefaktor bezeichnet und kann im Rahmen der relativistischen Quantenmechanik bestimmt werden. In der Quantenelektrodynamik ergibt sich zu diesem Wert nochmals eine – hier vernachlässigte – Korrektur.

$$\hat{\mu}_S = g_s \cdot \frac{e}{2 \cdot m} \hat{S} \quad (3)$$

$$\langle \hat{\mu}_S \rangle = g_s \cdot \frac{e}{2 \cdot m} S \quad (4)$$

1.3 Der Bahndrehimpuls L

1.3.1 Definition

Jedem Elektron kann innerhalb des Atoms ein Bahndrehimpuls l zugeordnet werden. Auch der Bahndrehimpuls addiert sich zum einem Gesamtbahndrehimpuls $L = \sum_i l_i$ in einem Mehrelektronenatom. Der Bahndrehimpulsoperator unterliegt den gleichen Bedingungen wie der Spin:

$$\hat{L}^2 |L, m_L\rangle = \hbar L (L + 1) |L, m_L\rangle \quad (5)$$

$$\hat{L}_z |L, m_L\rangle = \hbar m_L |L, m_L\rangle \quad (6)$$

Mit $|m_L| < L$ und $m_L \in \{-L, -L + 1, \dots, L - 1, L\}$. Der Bahndrehimpuls ist also ebenfalls richtungsgequantelt. Bei der analytischen Lösung des Wasserstoffatoms für ein einzelnes Elektron tauchen L und m_L als Winkelabhängigkeiten in Form der Kugelflächenfunktionen auf. Verschiedene Bahndrehimpulse bedeuten daher unterschiedliche winkelabhängige Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des Elektrons um den Atomkern.

1.3.2 Periodische elektromagnetische Störung

Bei Anwesenheit einer periodischen elektromagnetischen Störung $V = \vec{E} e^{i\omega t}$ ergeben sich mit Hilfe der goldenen Regel und der Orthonormierungsrelation der Kugelflächenfunktionen die Auswahlregeln $\Delta m_L = \pm 1$ für Systeme mit einem Elektron. Anschaulich gesprochen, kann ein gebundenes Elektron ein Photon absorbieren oder emittieren. Da ein Photon einen Eigendrehimpuls von 1 besitzt gilt daher die Impulserhaltung auch in der Quantenmechanik. Entsprechend der durch die Kugelflächenfunktionen gegebenen Abstrahlcharakteristik ist das emittierte Licht jedoch anders polarisiert.

1.3.3 Magnetisches Moment

Auch der Bahndrehimpuls erzeugt ein magnetisches Moment:

$$\hat{\mu}_L = g_l \cdot \frac{e}{2 \cdot m} \hat{L} \quad (7)$$

$$\langle \hat{\mu}_L \rangle = g_l \cdot \frac{e}{2 \cdot m} L \quad (8)$$

Der Landefaktor beträgt hier $g_l = 1$.

1.4 Der Gesamtdrehimpuls J

1.4.1 Definition

Spin und Bahndrehimpuls sind für ein im Gegensatz zu den von den magnetischen Momenten erzeugten Magnetfelder im Kern vernachlässigbares äußeres Magnetfeld durch die Spin-Bahnkopplung zum Gesamtdrehimpuls $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ gekoppelt.

$$\hat{J}^2 |J, m_J\rangle = \hbar J (J + 1) |J, m_J\rangle \quad (9)$$

$$\hat{J}_z |J, m_J\rangle = \hbar m_J |J, m_J\rangle \quad (10)$$

Auch der Gesamtdrehimpuls unterliegt der Richtungsquantelung mit $|m_J| < J$ und $m_J \in \{-J, -J + 1, \dots, J - 1, J\}$ und $J = L + S$.

1.4.2 Periodische elektromagnetische Störung

Bei Anwesenheit einer periodischen elektromagnetischen Störung $V = \vec{E}e^{i\omega t}$ ergeben sich mit Hilfe der goldenen Regel und der Orthonormierungsrelation der Kugelflächenfunktionen die Auswahlregeln $\Delta m_J = 0, \pm 1$. Anschaulich gesprochen, kann ein gebundenes Elektron ein Photon absorbieren oder emittieren. Im Gegensatz zur Darstellung im vorherigen Abschnitt, kann der Spin des Elektrons allerdings umklappen und somit ist auch eine unveränderte magnetische Quantenzahl $m_J = 0$ erlaubt. Die Polarisation der absorbierten bzw. emittierten Photonen ist senkrecht zum Magnetfeld linear und entspricht der Übergangsregel $m_J = 0$, man bezeichnet den entsprechenden Übergang als π Komponente. Parallel zum Magnetfeld beobachtet man die Übergänge $m_J = \pm 1$, diese sind zirkulär polarisiert und werden als σ_{\pm} -Komponenten bezeichnet. Diese Tatsache folgt bei der Berechnung der Übergangselemente direkt aus der Winkelverteilung der jeweiligen Kugelflächenfunktionen. Folgende Bedingung an m_{J_1}, m_{J_2}, V ergibt sich daraus:

$$\langle J_2, m_{J_2} | V | J_1, m_{J_1} \rangle \neq 0 \quad (11)$$

Für eine genauere Betrachtung wird auf die Literatur verwiesen.

1.4.3 Magnetisches Moment

Für das magnetische Moment ergibt sich:

$$\hat{\mu}_J = \hat{\mu}_L + \hat{\mu}_S \quad (12)$$

$$= \left(g_l \hat{L} + g_s \hat{S} \right) \cdot \frac{e}{2 \cdot m} \quad (13)$$

$$= \left(\hat{J} + \hat{S} \right) \cdot \frac{e}{2 \cdot m} \quad (14)$$

Man erkennt bereits hier, dass das magnetische Moment infolge von $g_l \neq g_s$ nicht parallel zu \hat{J} ist. Wir projizieren den Operator $\hat{\mu}_J$ deshalb auf \hat{J} , da sich die anderen Anteile zeitlich schnell herausmitteln werden (Rotating Wave Approximation) und bilden dann den Erwartungswert: Hierzu vorweg eine Nebenrechnung:

Die Norm des Operators \hat{J} ist:

$$\langle |\hat{J}| \rangle = \langle \sqrt{\hat{J}^2} \rangle = \sqrt{J(J+1)}\hbar \quad (15)$$

Der Operator $\hat{L}\hat{S}$ ist, da \hat{L} und \hat{S} vertauschen, gegeben durch:

$$\hat{J}^2 = \left(\hat{L} + \hat{S} \right)^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{L}\hat{S} \quad (16)$$

$$\hat{L}\hat{S} = \frac{1}{2} \left(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2 \right) \quad (17)$$

Für den Operator $\hat{\mu}_J \hat{J}$ folgt damit:

$$\hat{\mu}_J \hat{J} = \left(\hat{J}^2 + \hat{S} \cdot \hat{J} \right) \cdot \frac{e}{2 \cdot m} \quad (18)$$

$$= \left(\hat{J}^2 + \hat{S}^2 + \hat{L} \hat{S} \right) \cdot \frac{e}{2 \cdot m} \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2} \left(3\hat{J}^2 + \hat{S}^2 - \hat{L}^2 \right) \cdot \frac{e}{2 \cdot m} \quad (20)$$

Der Erwartungswert unseres zeitlich gemittelten magnetischen Moments ist daher gegeben durch:

$$\langle \hat{\mu}_J \frac{\hat{J}}{|\hat{J}|} \rangle = \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2\sqrt{J(J+1)}} \cdot \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m} \quad (21)$$

$$= g_j \sqrt{J(J+1)} \cdot \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m} \quad (22)$$

Der Landefaktor g_j lautet hierbei wie folgt:

$$g_j = \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (23)$$

Die Projektion des magnetischen Moments auf \hat{J} ist also gegeben durch:

$$(\hat{\mu}_J)_J = g_j \hat{J} \cdot \frac{e}{2 \cdot m} \quad (24)$$

1.5 Der Zeeman-Effekt

1.5.1 Schwaches äußeres Magnetfeld

Das im Experiment untersuchte System ist in einem schwachen äußeren Magnetfeld \vec{B}_0 charakterisiert durch $|J, m_J\rangle$. Das äußere Magnetfeld definiert uns die ausgezeichnete z-Achse des Systems $B_0 \mathbf{e}_z = \vec{B}_0$. Für das magnetische Moment $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_J)_J$ des Systems benutzen wir abermals die Rotating Wave Approximation und betrachten nur die z-Komponente des magnetischen Moments, die anderen beiden Komponenten führen eine schnelle Oszillation um die Magnetfeldrichtung aus und verschwinden im zeitlichen Mittel. Der Hamiltonoperator ist daher gegeben durch:

$$\hat{H} = -\hat{\mu}_z B_0 \quad (25)$$

$$= -g_j B_0 \cdot \hat{J}_z \cdot \frac{e}{2 \cdot m} \quad (26)$$

Angewendet auf einen Zustand $|J, m_J\rangle$ ergibt sich:

$$\hat{H} |J, m_J\rangle = -g_j B_0 m_J \cdot \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m} |J, m_J\rangle \quad (27)$$

Der Hamiltonoperator ist also bereits diagonal, und die Energie der Zustände $|J, m_J\rangle$ gegeben durch:

$$E = -g_j B_0 m_J \cdot \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m} \quad (28)$$

In einem äußeren Magnetfeld spalten sich die Energieniveaus der vorher entarteten Zustände $|J, m_J\rangle$ proportional zu m_J auf. Man bezeichnet m_J daher auch als magnetische Quantenzahl. Bei Anwesenheit einer periodischen elektromagnetischen Störung können entsprechend der Übergangsregeln $m_L = \pm 1$ und $m_J = 0, \pm 1$ Übergänge zwischen den Zuständen des Systems stattfinden. Durch die Aufspaltung der Energieniveaus der Drehimpulsfreiheitsgrade des Atoms spalten sich auch die beobachteten Linien im Spektrum des Atoms auf; dies bezeichnet man als „anormalen Zeeman-Effekt“.

$$\Delta\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} \quad (29)$$

$$= \frac{E_1 - E_0}{\hbar} \quad (30)$$

$$= -B_0 (g_{j1}m_{J1} - g_{j0}m_{J0}) \cdot \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m} \quad (31)$$

Jede Linie im Spektrum des betrachteten Atoms spaltet sich also bei Anwesenheit eines schwachen Magnetfeldes in zahlreiche Linien auf, die entsprechend der verwendeten Übergangsregel linear oder zirkular polarisiert ist und jeweils eine andere Winkelverteilung aufweist.

1.5.2 Spezialfall „normaler Zeemaneffekt“

Der normale Zeemaneffekt ist ein Spezialfall des anomalen Zeemaneffekts (die Begriffe wurden historisch so gewählt). Im Spezialfall für $S = 0$ oder $L = 0$ folgt $g_j = g_s$ bzw. $g_j = g_l$. Und damit gilt für die beobachteten Übergangsfrequenzen:

$$\Delta\omega = -B_0 g_j (m_{J1} - m_{J0}) \cdot \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m} \quad (32)$$

$$= 0, \pm B_0 g_j \cdot \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m} \quad (33)$$

Jede Linie im Spektrum des betrachteten Atoms spaltet sich also bei Anwesenheit eines schwachen Magnetfeldes in 3 Linien auf, die wiederum den π und σ_{\pm} Komponenten entsprechen.

1.5.3 Der Paschen-Back-Effekt

Ist das von außen angelegte Magnetfeld wesentlich größer als die Spin-Bahn-Kopplung, so wird diese aufgehoben und die Spin- und Bahndrehimpulsfreiheitsgrade richten sich getrennt aus.

\hat{J} und $\hat{\mu}_J$ sind dann nicht mehr definiert. Das System wird daher durch $|L, m_L, S, m_S\rangle$ beschrieben. Der Hamiltonoperator lautet:

$$\hat{H} = -\hat{\mu}_z B_0 \quad (34)$$

$$= -B_0 \cdot \left(g_s \hat{S}_z + g_l \hat{L}_z \right) \cdot \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m} \quad (35)$$

Angewendet auf den Zustand $|L, m_L, S, m_S\rangle$ ergibt sich:

$$\hat{H} |L, m_L, S, m_S\rangle = -B_0 (g_l m_L + g_s m_S) \cdot \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m} |L, m_L, S, m_S\rangle \quad (36)$$

Der Hamiltonoperator ist also bereits diagonal, und die Energie der Zustände $|L, m_L, S, m_S\rangle$ gegeben durch:

$$E = -B_0 (g_l m_L + g_s m_S) \cdot \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m} \quad (37)$$

$$= -B_0 (m_L + 2m_S) \cdot \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m} \quad (38)$$

Das Spektrum vereinfacht sich für starke Felder daher wieder.

1.5.4 Der quadratische Zeemann-Effekt

Das Zwischengebiet zwischen schwachen und starken Feldern ist sowohl theoretisch wie auch experimentell sehr schwierig zu erfassen. Allerdings kann man zur näherungsweisen Bestimmung des Spektrums in diesem Bereich den Zeemann-Effekt verwenden, wenn man Terme höherer Ordnung zur Entwicklung heranzieht. Da man hierbei mit dem nächsthöheren Term, dem Term zweiter Ordnung, beginnt, spricht man deshalb auch vom quadratischen Zeemann-Effekt.

1.5.5 Der Stark-Effekt

Während es beim Zeemann- und Paschen-Back-Effekt zu einer Aufspaltung einzelner Spektrallinien in Folge eines von außen wirkenden Magnetfelds kommt, ist die Aufspaltung beim Stark-Effekt durch die Wirkung eines äußeren elektrischen Feldes bedingt.

Die Feinstrukturaufspaltung fällt beim Stark-Effekt allerdings deutlich geringer aus und es ist zwischen zwei Effekten zu unterscheiden:

- Beim **linearen Stark-Effekt** besitzt das Atom selbst ein permanentes Dipolmoment, so dass die Feinstrukturaufspaltung dann – wie aus der Elektrodynamik bekannt ist – direkt proportional zur von außen angelegten elektrischen Feldstärke ist.
- Beim **quadratischen Stark-Effekt** wird erst durch das von außen angelegte elektrische Feld ein Dipolmoment im Atom induziert. Aus diesem Grund ergibt sich ein quadratischer Zusammenhang zwischen Feinstrukturaufspaltung und von außen angelegtem elektrischen Feld.

1.6 Das Termschema des Helium-Atoms

In der Abbildung 1 ist das Termschema von Helium dargestellt. Zu beachten ist, dass dieses aus zwei voneinander unabhängigen Termsystemen besteht, die nicht miteinander kombinieren.

Im sogenannten Singulett-System sind alle Terme nur einfach aufgespalten und es fehlt im zugehörigen Spektrum eine Feinstruktur. Dies liegt daran, dass die Spins der zwei zum Helium gehörenden Elektronen antiparallel ausgerichtet sind und sich somit die Quantenzahl des Gesamtspins S des Atoms zu Null ergibt. Man spricht aus diesem Grund auch vom Parahelium.

Im Gegensatz dazu sind beim sogenannten Orthohelium die Spins der beiden einzelnen Elektronen parallel ausgerichtet, weswegen die Quantenzahl des Gesamtspins $S = 1$ ist. Der Gesamtspin kann sich aus diesem Grund in 3 verschiedene Richtungen einstellen, weswegen die Terme

in diesem sogenannten Triplett-System im Allgemeinen dreifach aufgespalten sind und sich eine Feinstruktur ergibt.

Wegen des Pauliprinzips können die beiden Elektronen beim Orthohelium auf Grund der gleichen Spinquantenzahl nicht gleichzeitig den $1S$ -Zustand einnehmen, weswegen der $2S$ -Zustand der niedrigste Zustand beim Orthohelium ist. Hingegen kann beim Parahelium auch der energetisch günstigere $1S$ -Zustand durch beide Elektronen besetzt werden.

Betrachtet man die für ein Mehrelektronensystem geltenden Übergangsregeln

$$\begin{aligned}\Delta J &= \pm 1, 0 \quad \text{außer für den Übergang von } J = 0 \text{ nach } J = 0, \\ \Delta L &= \pm 1, 0, \\ \Delta S &= 0,\end{aligned}$$

so ist auch ersichtlich, weshalb ein Interkombinationsverbot zwischen den beiden Termsystemen besteht. Andernfalls würde nämlich die Auswahlregel $\Delta S = 0$ verletzt werden. Mögliche Übergänge zwischen den einzelnen Niveaus werden hierbei durch durchgezogene Linien dargestellt.

Zur Erleichterung der späteren Auswertung sind in der Tabelle 1 alle möglichen Übergänge für Helium aufgeführt.

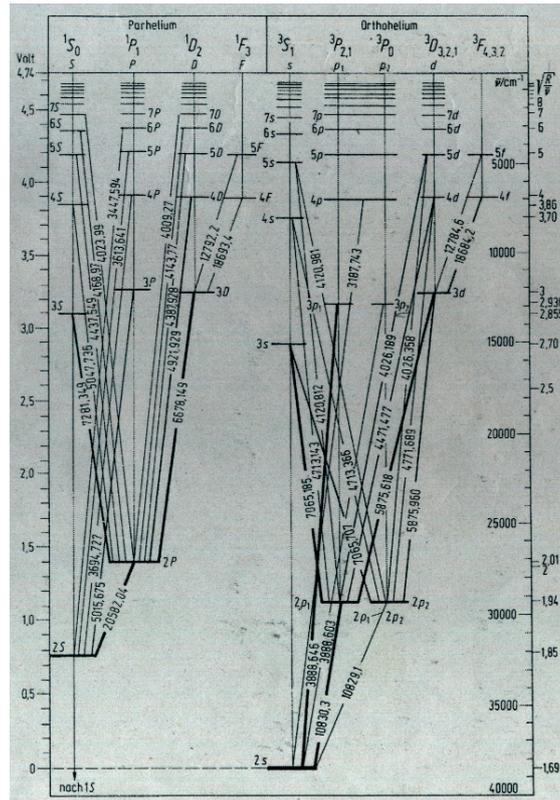


Abbildung 1: Termschema für Helium

Wellenlänge λ [nm]	Übergang		Zustand	
	von	nach	Parahelium	Orthohelium
318.7743	4p	2s	-	X
344.7594	6P	2S	X	-
361.3641	5P	2S	X	-
369.4727	4P	2S	X	-
388.8603	3p ₂	2s	-	X
388.8646	3p ₁	2s	-	X
400.927	7D	2P	X	-
402.399	7S	2P	X	-
402.6189	5d	2p ₁	-	X
402.6358	5d	2p ₂	-	X
412.0812	5s	2p ₁	-	X
412.0981	5s	2p ₂	-	X
414.377	6D	2P	X	-
416.897	6S	2P	X	-
438.7928	5D	2P	X	-
443.7549	5S	2P	X	-
447.1477	4d	2p ₁	-	X
471.3143	4s	2p ₁	-	X
471.3366	4s	2p ₂	-	X
477.1689	4d	2p ₂	-	X
492.1929	4D	2P	X	-
501.5675	3P	2S	X	-
504.7736	4S	2P	X	-
587.5618	3d	2p ₁	-	X
587.596	3d	2p ₂	-	X
667.8149	3D	2P	X	-
706.5185	3s	2p ₁	-	X
706.5707	3s	2p ₂	-	X
728.1349	3S	2P	X	-
1082.91	2p ₂	2s	-	X
1083.03	2p ₁	2s	-	X
1278.46	5f	3d	-	X
1279.22	5F	3D	X	-
1868.42	4f	3d	-	X
1869.34	4F	3D	X	-
2058.204	2P	2S	X	-

Tabelle 1: Mögliche Übergänge für Helium

2 Versuch

2.1 Versuchsaufbau

Mithilfe eines Gitterspektrometers wurde das Licht einer Helium Lampe in die Spektrallinien zerlegt.

2.2 Übersichtsspektrum

Zuerst wurde ein Übersichtsspektrum im Bereich zwischen 300nm und 800nm aufgenommen. Die Spaltöffnung betrug dabei $100\mu\text{m}$, die Gitterdrehung $500\frac{\text{\AA}}{\text{min}}$ bei einem Schreibpapiervorschub von $120\frac{\text{mm}}{\text{min}}$.

Die Messung wurde für den Bereich zwischen 500nm und 800nm wiederholt, wobei sich ein Rotfilter im Strahlengang befand.

Aus der Gitterdrehung $500\frac{\text{\AA}}{\text{min}}$ bei einem Schreibpapiervorschub von $120\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ ergibt sich ein Umrechnungsfaktor $u = 4.16\frac{\text{nm}}{\text{cm}}$.

An Hand der bekannten Anfangsposition ($\lambda = 300\text{nm}$ bzw. $\lambda = 500\text{nm}$) konnte dann aus der Position x der einzelnen Peaks auf den im Anhang beigefügten Papierrollen die Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda$ und daraus die Wellenlänge λ_{Mess} der aufgezeichneten Peaks bestimmt werden. Anschließend wurde durch ein Vergleich mit Tabelle 1 den gemessenen Peaks eine theoretische Wellenlänge λ_{Theo} zugeordnet.

Die gemessenen Übergänge für den Wellenlängenbereich von 300 nm bis 800 nm sind in der Tabelle 2 und die gemessenen Übergänge für den Wellenlängenbereich von 500 nm bis 800 nm in der Tabelle 3 aufgeführt.

Der Vergleich der beiden Tabellen zeigt, dass die Peaks bei einer Wellenlänge λ_{Mess} von 779.17 nm und 794.17 nm nicht auftreten, wenn sich der Rotfilter im Strahlengang befindet, also diese herausgefiltert werden. Daraus kann geschlossen werden, dass es sich bei beiden Peaks um Spektrallinien höherer Ordnung handeln muss, die im Bereich des roten Lichts liegen. Dementsprechend wurde den beiden Peaks eine Wellenlänge λ_{Theo} von 388.86 nm bzw. 400.93 nm zugeordnet.

2.3 Zeeman-Aufspaltung der 667.8nm Linie

Die Zeeman-Aufspaltung der 667.8nm Linie von Helium wurde unter verschiedenen Bedingungen aufgenommen. Die Gitterdrehung betrug jeweils $1.25\frac{\text{\AA}}{\text{min}}$, der Papiervorschub $120\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ bei einer Spaltöffnung von $40\mu\text{m}$. Die Messergebnisse sind in 4 zusammengefasst.

- Ohne Polarisator bei $B = 0\text{T}$. In der Messung war ein einzelner großer Peak erkennbar.
- Ohne Polarisator bei $B \approx 1\text{T}$. In der Messung war wiederum der einzelne Peak erkennbar, jedoch verbreitert durch 2 weitere kleinere Peaks links und rechts.
- σ und π Polarisation bei $B \approx 1\text{T}$. Bei der σ Polarisation waren nun nurnoch die beiden kleinen verschobenen Peaks erkennbar, bei π Polarisation beobachteten wir nur den unverschobenen Peak. Die Messung der σ Polarisation wurde in die Tabelle der nachfolgenden Messung mit aufgenommen, sodass sich das Intervall von 0.2-1.0 erstreckte.

Position x [mm]	$\Delta\lambda$ [nm]	λ_{Mess} [nm]	λ_{Theo} [nm]	Zugeordneter Übergang	
				von	nach
218	90.83	390.83	388.86	3p ₁ / 3p ₂	2s
357	148.75	448.75	447.15	4d	2p ₁
415	172.92	472.92	471.3	4s	2p ₁ / 2p ₂
465	193.75	493.75	492.19	4D	2P
489	203.75	503.75	501.57	3P	2S
496	206.67	506.67	504.77	4S	2P
695	289.58	589.58	587.5	3d	2p ₁ / 2p ₂
887	369.58	669.58	667.81	3D	2P
1042	434.17	734.17	728.13	3S	2P
1150	479.17	779.17	2·388.86	3p ₁ / 3p ₂	2s
1186	494.17	794.17	2·400.93	7D	2P

Tabelle 2: Übersichtsmessung 300nm – 800nm

Position x [mm]	$\Delta\lambda$ [nm]	λ_{Mess} [nm]	λ_{Theo} [nm]	Zugeordneter Übergang	
				von	nach
216	90.00	590.00	587.5	3d	2p ₁ / 2p ₂
408	170.00	670.00	667.81	3D	2P
500	208.33	708.33	706.5	3s	2p ₁ / 2p ₂
551	229.58	729.58	728.13	3S	2P

Tabelle 3: Übersichtsmessung 500nm – 800nm mit Rotlichtfilter

Polarisation	Position x_{σ_-}	Position x_{π}	Position x_{σ_+}	Nullpunkt y	Magnetfeld
Keine	157mm	169mm	232mm	13354.5Å	1T
π	-	151mm	-	13354.5Å	1T
Keine	-	128mm	-	13355.0Å	0T

Tabelle 4: Vermessung der 667.8nm Linie

- σ Polarisation bei $B \approx [0.2 - 0.9]$ T in 0.1T Schritten. Es war zu erkennen wie bei steigendem Magnetfeld der Abstand zwischen den Peaks immer weiter zunahm.

2.4 Bestimmung von $\frac{e}{m}$ aus der Zeeman-Aufspaltung

Die bei der 667.8nm Linie gemessene Zeeman-Aufspaltung wurde mit folgenden Formeln ausgewertet. Dabei ist x der Abstand der beiden Peaks der σ Polarisation, g die Gitterdrehgeschwindigkeit und s der Schreibpapiervorschub.

$$\Delta\lambda = x \frac{g}{s} \quad (39)$$

$$\Delta\omega = 2\pi \cdot \Delta f \quad (40)$$

$$= \frac{2\pi \cdot c \cdot \Delta\lambda}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \quad (41)$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{e}{m} = \frac{2\Delta\omega}{B_0 (g_{j1}m_{j1} - g_{j0}m_{j0})} \quad (42)$$

$$= \frac{4\pi \cdot c \cdot \Delta\lambda}{B_0 (g_{j1}m_{j1} - g_{j0}m_{j0}) \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2} \quad (43)$$

Die Messergebnisse und die zugehörige Fehlerechnung sind im nächsten Hauptabschnitt zusammengefasst. $\frac{e}{m}$ wird dabei als κ bezeichnet.

2.5 Unsicherheitsbetrachtung

In der Messung sind folgende Unsicherheitsquellen zu beachten:

- **Ablesegenauigkeit** Die Ablesegenauigkeit wurde mit $\Delta x = \pm 1$ mm abgeschätzt.
- **Homogenität des Magnetfeldes** Die Unsicherheit des Magnetfeldes, wurde infolge der Erhitzung und der begrenzten Einstellbarkeit des Spulenstromes mit $\Delta B_0 = \pm 0.05$ T abgeschätzt.
- **XY-Schreiber und Spektrograph** Die Gitterdrehgeschwindigkeit und der Schreibpapiervorschub wurden jeweils mit einem relativen Fehler von 1% angenommen.
- **Wellenlänge der vermessenen Linie** Obwohl der relative Abstand der Peaks sehr genau bestimmt werden konnte, war die eigentliche absolute Wellenlänge der vermessenen Linie nicht exakt bestimmbar. Es wurde deshalb (667.8 ± 0.05) nm.

3 Messung: $\frac{e}{m}$

3.1 Versuchsaufbau und Durchführung

Der Versuch wurde wie in der Vorbereitung erarbeitet und auf dem Aufgabenblatt beschrieben aufgebaut und durchgeführt. Zur Berechnung von $\frac{e}{m}$ wurde folgende Formel verwendet:

$$\kappa = \frac{4\pi \cdot c \cdot \Delta\lambda}{B_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2} \quad (44)$$

Die gemessenen Messwerte sind in Tabelle 5 aufgeführt. Dabei wurden folgende Messgrößen erfasst:

- x : Gemessene Verschiebung der Peaks
- B_0 : Magnetfeld

Das Ziel ist die Bestimmung von $\frac{e}{m}$ - Spezifische Ladung des Elektrons

Zum Auswerten der Messdaten wurde das ScienceValue (Eigenentwicklung) verwendet. Alle Berechnungen wurden damit ausgeführt.

3.2 Fehler der Parameter

Für die Fehlerrechnung wurde jeder fehlerbehafteten Größe p_i , der Berechnungsformel für κ , ein systematischer Fehler Δp_i zugewiesen:

- p_1 g : Gitterdrehgeschwindigkeit - Wert: $(2.083 \cdot 10^{-12} \pm 2.083 \cdot 10^{-14}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- p_2 s : Schreibpapiervoschub - Wert: $(0.002 \pm 2.000 \cdot 10^{-05}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- p_3 λ_0 : Wellenlänge - Wert: $(6.678 \cdot 10^{-07} \pm 5.000 \cdot 10^{-11})\text{m}$

3.3 Systematischer Fehler

Mithilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung wurde der systematische Fehler $\Delta\kappa_i$ jeder einzelnen Messung κ_i berechnet.

$$\kappa_i = \frac{4\pi \cdot c \cdot \Delta\lambda}{B_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2} \quad (45)$$

$$\Delta\kappa_i = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\kappa_i}{\partial p_i} \cdot \Delta p_i \right)^2} \quad (46)$$

Die systematischen Fehler der Messwerte selbst, gingen in die Berechnung als weitere Parameter p_i ebenfalls ein. Sodass insgesamt für n Parameter und N Messungen die Fehlerfortpflanzung nach Gauß (Formel 46) durchgeführt wurde: Um den systematischen Fehler $\Delta\bar{\kappa}_{sys}$ des Mittelwerts (Formel 47) zu bestimmen, wurde die Größtfehlerabschätzung auf die Mittelwertbildung

$\frac{e}{m}$	$\kappa \pm \Delta\kappa_{sys}$	$x \pm \Delta x_{sys}$	$B_0 \pm \Delta B_{0,sys}$
	$1.760 \cdot 10^{+11} \pm 2.281 \cdot 10^{+10}$	0.032 ± 0.001	0.400 ± 0.050
	$1.892 \cdot 10^{+11} \pm 1.961 \cdot 10^{+10}$	0.043 ± 0.001	0.500 ± 0.050
	$1.870 \cdot 10^{+11} \pm 1.623 \cdot 10^{+10}$	0.051 ± 0.001	0.600 ± 0.050
	$1.886 \cdot 10^{+11} \pm 1.409 \cdot 10^{+10}$	0.060 ± 0.001	0.700 ± 0.050
	$1.870 \cdot 10^{+11} \pm 1.229 \cdot 10^{+10}$	0.068 ± 0.001	0.800 ± 0.050
	$1.858 \cdot 10^{+11} \pm 1.093 \cdot 10^{+10}$	0.076 ± 0.001	0.900 ± 0.050
	$1.980 \cdot 10^{+11} \pm 1.052 \cdot 10^{+10}$	0.090 ± 0.001	1.000 ± 0.050

Tabelle 5: Einzelmesswerte $\frac{e}{m}$ mit systematischem Fehler in $\left[\frac{\text{As}}{\text{kg}}\right]$, x in [m], B_0 in $\left[\frac{\text{kg}}{\text{s}^2\text{A}}\right]$

für $\bar{\kappa}$ angewendet (Formel 48). Die Größtfehlerabschätzung wurde gewählt, da die systematischen Fehler der Einzelmessung durchaus korreliert sein könnten. So wurde immer dasselbe Messinstrumente verwendet, und alle Messungen fanden unter gleichen Umweltbedingungen statt.

$$\bar{\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^n \kappa_i}{n} \quad (47)$$

$$\Delta\bar{\kappa}_{sys} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \Delta\kappa_i \quad (48)$$

Angewendet auf unsere Datenbasis ergibt dies:

$$\bar{\kappa} \pm \Delta\bar{\kappa}_{sys} = (1.874 \cdot 10^{+11} \pm 1.521 \cdot 10^{+10}) \frac{\text{As}}{\text{kg}} \quad (49)$$

3.4 Statistischer Fehler

Für den statistischen Fehler wurde die Standardabweichung des Mittelwerts $\bar{\kappa}_{stat}$ nach Formel 51 berechnet

$$\sigma_{\kappa} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (\kappa_i - \bar{\kappa})^2} \quad (50)$$

$$\Delta\bar{\kappa}_{stat} = \frac{\sigma_{\kappa}}{\sqrt{N}} \quad (51)$$

Die Standardabweichung σ_{κ} ist ein Maß für die Streuung der Messergebnisse um den Mittelwert $\bar{\kappa}$ herum. Im Ergebnis angegeben ist die Standardabweichung des Mittelwerts $\Delta\bar{\kappa}_{stat}$. Dieser Fehler kann, beliebig klein gemacht werden, da der statistische Fehler mit \sqrt{N} sinkt, wobei N die Anzahl der Messungen ist. Die Bedeutung der Standardabweichung liegt vor allem in der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Standardabweichung. Die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert der vermessen wurde innerhalb der Standardabweichung des Mittelwerts liegt, ist für die hier verwendete einfache Standardabweichung 67%.

$$\bar{\kappa} \pm \Delta\bar{\kappa}_{stat} = (1.874 \cdot 10^{+11} \pm 2.439 \cdot 10^{+09}) \frac{\text{As}}{\text{kg}} \quad (52)$$

3.5 Messresultat

Das Ergebnis der Messung von $\frac{e}{m}$

$$\bar{\kappa} \pm \Delta\bar{\kappa}_{sys} \pm \Delta\bar{\kappa}_{stat} = (1.874 \cdot 10^{+11} \pm 1.521 \cdot 10^{+10} \pm 2.439 \cdot 10^{+09}) \frac{\text{As}}{\text{kg}} \quad (53)$$

Dieses Messergebnis stimmt im Rahmen der Messungenauigkeit mit dem erwarteten Wert $1.759 \cdot 10^{+11}$ überein.

Literatur

[Vorbereitungsmappe] Vorbereitungsmappe Zeemaneffekt