Vorlesungsmitschrieb
Programmieren für Physiker
Prof. Steinhauser

Wintersemester 2005 / 2006 (Uni Karlsruhe)

Magnus Schlösser

23. Oktober 2006

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Die Sprache C++

1 Einleitung

Rechner

- **Hardware**
- **Software**
  - Betriebsystem
  - Anwenderprogramme
  - Programmiersprache (FORTRAN, PASCAL, C, C++)

Programmiersprachen

- **Maschinensprache** („0“, „1“)
- **Assembler** (`add i #12, d0`)
- **Hochsprache** (Befehle, ähnlich der Umgangssprache und mit Compiler in Maschinensprache übersetzt)

Leistungsmerkmale von `C/C++`

- schnelle Laufzeit
- gute Portabilität
- geringer Sprachumfang
- ermöglicht objektorientiertes Programmieren
- Überladen von Funktionen, Klassen und Operatoren möglich
- Templates (Schablonen)

2 Grundlagen

2.1 Das erste Programm

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
   cout << "Hallo Karlsruhe!" << endl;
   return( 0 );
}
```

1. `hallo.cc` abspeichern
2. compilieren mit `g++ -o hallo hallo.cc`
3. ausführen mit `hallo` oder `./hallo`

Bemerkungen

1. `#include ...`
   kein C++ Befehl, sondern Anweisung für Präprozessor
   Einlesen von Dateien
   `iostream:` Eingabe und Ausgabe
   `cmath:` Mathematische Funktionen
2. `using namespace std;`
   in C++ gehören alle Variablen und Funktionen zu einem Namesraum. Standardobjekte sind im Namesraum „`std`“ definiert.
3. `int main(){ ... }`
   definiert die Funktion `main()` muß in jedem Programm genau einmal vorkommen und wird beim Programmstart ausgeführt.
4. Unterscheidung zwischen Groß- und Kleinschreibung (`case-senitive`)
5. Kommentare:
   `//` : 1 Zeile
   `/* ... */` : mehrere Zeilen
6. „`;`“ am Ende von Befehlen
7. `{ ... }` definiert Block ≡ Zusammenfassung von Anweisungen (kein „`;`“ am Ende)
8. Namen (Bezeichner) werden aus Buchstaben, Ziffern und „`_`“ aufgebaut.

2.2 Von der Hochsprache zum ausführbaren Programm

1. **Idee, Analyse** (Modell, Algorithmus)
2. **Programmentwurf** (Flußdiagramm, welche Variable, Klassen ...)
3. **Quelltext erstellen**
4. **Lauffähiges Programm** (Maschinencode)

Beispiel Umrechung von FAHRENHEIT in CELSIUS

1. Lese Zahl ein. Interpretiere sie als Temperatur in Grad-FAHRENHEIT. Berechne den entsprechenden Wert in CELSIUS. Gebe Ergebnis aus:

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$$

2. (a) lies Wert von T_F in Variable `tf`
   (b) berechne T_C: `tc = 5 * (tf - 32 ) /9`
   (c) gib `tf` und `tc` aus

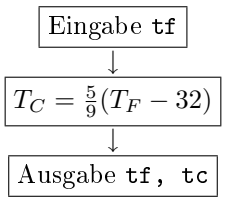


Abbildung 1: Flußdiagramm

3. `g++ -o fah2cel fah2cel.cc`

2.3 Standardein -/ausgabe mit `cin, cout`

- Ein -/Ausgabe mittels Datenströmen (`streams`)
- „<<“ ; „>>“ Schiebeoperatoren; geben Flußrichtung an
- `endl;` Zeilenumbruch. Auch: `"\n"` möglich
- Formatierung der Ausgabe

2.4 Ein -/Ausgabe in Dateien

Prinzip

1. öffne Datenstrom
2. lese/schreibe
3. schließe Datei

2.4.1 Ausgabe in Dateien

```
ofstream ausgabe;
ausgabe.open("daten.txt");
ausgabe << daten << endl;
ausgabe.close();
```

2.4.2 Eingabe in Dateien

```
ifstream einlesen;
einlesen.open("daten.txt");
einlesen >> x2 >> y2;
einlesen.close();
```

3 Wichtige Datentypen

3.1 einfache Typen

- `int` Integer (ganze Zahlen) 32bit $-2^{31}, \ldots, 2^{31}-1$
- `float` Gleitkommadatentypen 32bit $\pm 1,17 \cdot 10^{-38} \ldots, \pm 3,4 \cdot 10^{-38}$
- `char` Zeichen 8bit

Syntax: `typ Variablennamen;`
Bsp: `char ch`

3.2 Felder

Syntax: `Typ Arrayname[Größe1]...[Größe2];`
Bsp:

- `int vek[3];` $\Longleftrightarrow$ 3-dim Vektor
- `int mat[4][3];` $\Longleftrightarrow$ Matrix mit 4 Zeilen und 3 Spalten `array1.cc`

Achtung: Indexbereich von 0 bis „Dimension-1“!!!

4 Operatoren

4.1 arithmetische und logische Operatoren

Ein Operator verknüpft Teilausdrücke zu einem neuen Gesamtausdruck.
Operatoren können logische oder arithmetisch (Eingabe-) Argumente haben.
Operatoren können logische oder arithmetisch (Ausgabe-) Werte haben.
Bsp:

- arithmetische Argumente und arithmetische Werte:
  `+ , - , * , / , %`
  % ist der Modulooperator (Rest der ganzzahligen Division)
- arithmetische oder logische Argumente und logische Werte:
  `== , < , > , <= , >= , !=`
- logische Argumente und logische Werte
  `|| (oder) , && (und)`

Priorität:
Jedem Operator ist eine Priorität zugeordnet, die festlegt wie ein (nicht vollständig geklammerter) Ausdruck ausgewertet wird.
Beispiel:
`a * b + c * d = ( a * b ) + ( c * d )`

4.2 Inkrement/Dekrementoperatoren (++,--)

```
int i;
++i;   //i=i+1
--i;   //i=i-i
i++;
i--;
```

Pre-In(De)krementoperator
..1.. erhöhen
..2.. auswerten

Post-In(De)krementoperator
..1.. auswerten
..2.. erhöhen

Beispiel:
```
int i,j;
i=7;
j=++i; //→j=8, i=8
i=7;
j=i++; //→j=7, i=8
```

4.3 Zusammengesetzte Zuweisungsoperatoren

```
+= , -= , *= (und)
int i,j;
i += 5;
j *= i + 3;
```

4.4 Kommaoperator “,“

dient zur Trennung von mehreren Anweisungen, die an der selben Stelle im Programm ausgeführt werden sollen.
Bsp:

```
int a, b, c;
a = ( b = 8 , c = 3 , b - c ) - 1;
```

Bitte nicht so programmieren!

4.5 C und C++

In der Regel: „`C`“ Teilmenge von „`C++`“
Neu in C++

- `//`-Kommentare
- Deklaration von Variablen an beliebiger Stelle
- Ein/Ausgabe
  C: `printf, scanf`
  C++: `cout, cin`
- Variablentyp `bool`
- Klassen
- Überladen von Operatoren

5 Kontrollstrukturen

5.1 Schleifenanweisungen

5.1.1 `for`-Schleife

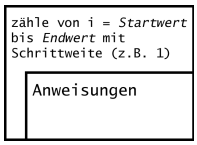


Abbildung 2: Struktogramm der `for`-Schleife

1. **Syntax**

```
for(ausdruck1; ausdruck2; ausdruck3)
{
   Anweisungen
}
```

   (a) Initialisierung
   (b) Bedingung
   (c) wird im Anschluß an "Anweisungen" ausgeführt

2. **Bsp:** `for_2.cc`

```
int i;
for( i = 1; i <= 100 ; i++ )
{
   cout << i << " ";
}
```

3. Bemerkung: `for(;;)` Endlosschleife

5.1.2 `while`-Schleife

Abbildung 3: Struktogramm der `while`-Schleife

1. **Syntax**

```
while( ausdruck )
{
   Anweisungen
}
```

2. (a) Jede `for`-Schleife kann als `while`-Schleife formuliert werden. `while_for.cc`
   (b) Im Allgemeinen:
   `for`-Schleife falls Anzahl der Schleifendurchläufe bekannt
   `while`-Schleife falls Anzahl der Schleifendurchläufe NICHT bekannt.
   (c) Wird "ausdruck" in Schleife nicht manipuliert, so ergibt sich eine Endlosschleife.
   (d) Abweißschleife

5.1.3 `do...while`-Schleife

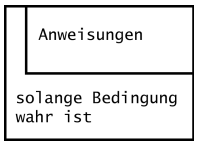


Abbildung 4: Struktogramm der `do-while`-Schleife

1. **Syntax**

```
do
{
   Anweisungen;
}while( ausdruck );
```

do_while.cc

2. Bemerkungen:
   Anweisungen werden mind. 1x ausgeführt.

5.2 Verzweigungen

5.2.1 Die `if`-Anweisung

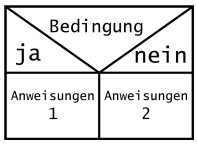


Abbildung 5: Struktogramm der `if`-Anweisung

1. Struktogramm
   (a) Berechne „Ausdruck “
   (b) true → Anweisung 1
   false → Anweisung 2
2. **Syntax**

```
if( Ausdruck )
{
   Anweisungen1;
}
else
{
   Anweisungen2;
}
```

if_1.cc

3. Bemerkungen
   (a) `else` ist nicht notwendig
   (b) `if-else`-Zuordnung: aufpassen bei geschachtelten `if's`

(c) Ausdruck:
`a=2` Zuweisung
`a==2` logische Bedingung

(d) Fragezeichenoperator

i. Syntax: `Bedingung ? Erg1 : Erg2;`
Falls „Bedingung“ wahr, wird `Erg1` zurück gegeben, sonst `Erg2`

ii. Bsp:

```
float a,b,erg;
  ...
erg = ( a > b ? a :  b); // gibt den größeren Wert zurück
```

5.2.2 `switch`-Anweisung

1. Struktogramm
Ausdruck entspricht Schalter. Ergebnis von Ausdruck muss vom Typ Integer sein.

2. **Syntax**

```
switch( Ausdruck )
{
   Fall1 :
     Anweis1;
     break;
   Fall2 :
     Anweis2;
     break;
   default :
     Anweis;
}
```

switch_1.cc

3. Bemerkungen

(a) „`default`“ ist optional

(b) „`break`“ nicht notwendig

5.2.3 `break, continue`

1. `break` : bricht Schleife ab

2. `continue` : unterbricht Abarbeitung der Anweisungen
→Berechnung der Ausdrucksbedingung
→neuer Durchlauf
Kann bei `switch, for, while, do ... while` verwendet werden.

3. **Prinzip**

```
while( ausdruck )
{
   ...
   continue; //geht sofort zurück zu while
   ...
   break; //bricht die while-Schleife sofort ab.
}
```

6 Datentypen

6.1 Elementare Datentypen

(vordefiniert, keine Struktur)

bool	char wchar_t	short int long	float double long double
true, false	Zeichen	ganze Zahlen	gebrochenen Zahlen

1. genaue Art der internen Zahldarstellung hängt von Hardware und Compiler ab.
2. Gültigkeitsbereich reicht bis zum Ende des Blocks (Scope) scope.cc
   Bsp:

```
int g1 = 100;
int main()
{
   int l1=50;
   {
      int l2=10;
   }
}
```

3. Deklaration u. Definition können gleichzeitig erfolgen.
4. Integertypen können als unsigned definiert werden.
   Bsp:
   short: -32768...+32767= $2^{15}-1$
   unsigned short : 0...+65535= $2^{16}-1$ (=2 Byte) unsign_short.cc
5. sizeof() sizeof.cc
   Liefert Speicherbedarf eines Datentyps in Bytes
   Bsp:

```
sizeof(char)=1
sizeof(float)=4
sizeof(double)=8
sizeof(long double)=12
```

6. Wertebereich limits.cc

6.2 Variablen und Konstanten

6.2.1 Konstanten

Feststehende Werte können am Anfang als Konstante definiert werden. Im Programm kann dieser Wert nicht mehr geändert werden.
Bsp:

```
const float pi = 3.14159;
⋮
pi=5.4; // <- Fehlermeldung
```

6.3 Datentypumwandlungen (Konversion)

Treffen in einem Ausdruck Variablen unterschiedlichen Typs aufeinander. „Mix von Typen“
Bsp

```
int i='0'; // → i=48
```

Frage: *Was passiert?*
Was ist erlaubt?
Was ist gefährlich?

6.3.1 Implizite Konversion (automatische Konversion)

konversion_impl.cc

1. Zwischen integralen Typen
   einfach für Compiler; bei unterschiedlicher Größe
   - fülle mit Nullen auf
   - streiche führende Stellen
2. Zwischen Integer- und Gleitkommatypen
   von `int` nach `float` immer erlaubt.
   Bsp: `float f=5;`
   Von `float` nach `int`: Warnung vom Compiler
   Bsp: `int i=5.5;`

generell: Konversion nach „oben“ immer erlaubt!
`char` → `short` → `int` → `long int` → `float` → `double` → `long double`

Achtung `float f= 3/4; //→ f = 0.0`

1. Int. Division : „`3/4=0`“
2. Konversion : → `f=0.0`

Lösung `float f=3/4.;`

6.3.2 Explizite Konversion (cast)

Ziel Erzwingen der Konversion

Syntax `<Typ>(<Ausdruck>)`
Bsp:

```
int i;
float a;
i = int( ( i + 2 ) * a );//→ keine Warnung
```

7 Felder und Strukturen

Felder und Strukturen sind abgeleitete Datentypen. Im Allgemeinen: abgeleitete Datentypen setzen sich aus elementaren zusammen.

7.1 Felder

Idee: Verarbeitung von Daten mit gemeinsamen Eigenschaften: Fasse in einem Feld(Array) zusammen.

7.1.1 Eindimensionale Felder

1. **Syntax:** `Typ array_name[Größe]`
2. **Initialisierung:** `array_ini.cc`
   (a) in Kombination mit Deklaration
   (b) an beliebiger Stelle im Programm
3. **Bemerkung:**
   (a) Das erste Element hat Index 0; das letzte „Größe-1“
   (b) Achtung: keine Fehlermeldung falls Index zu groß.
   (c) Zuweisungsoperator „=“ nicht definiert für Felder
   Bsp:
   ```
   int a[10];
   int b[10];
   ⋮
   a=b; //→ nicht erlaubt.
   a[5] = b[7]; //→ erlaubt.
   ```
   (d) Vergleichsoperator „==“ erlaubt; vergleicht nicht den Inhalt der Felder.

7.1.2 Mehrdimensionale Felder

siehe oben (?)

7.2 Strukturen

Idee zusammengehörende Information unterschiedlichen Datentyp → Strukturen (Verbund)

1. **Syntax:** `struct_geburt.cc`

   ```
   struct Name
   {
      Komponentenliste
   } [Strukturvariable];
   ```

   Zugriff auf einzelne Elemente mit Punktoperator „ . “
   Syntax:
   `<Name der Struktur>.<Komponente>;`
2. **Bemerkungen:**
   (a) In `C: struct geburt test;`
   In `C++: (struct) geburt test;` Das heißt, dass `struct` auch wegfallen kann.
   (b) Strukturvariablen können auch Felder sein `struct_vektor.cc`
   (c) Verschachtelung von Strukturen möglich

7.3 Unions

1. **Strukturen**
   Datentyp mit mehreren Komponenten, je hat dabei separaten Speicherplatz.
2. **Union**
   Datentyp mit mehreren Komponenten; definiert einen Speicherplatz, den man mehrere Namen geben kann. `union_wert.cc`
3. **Syntax**

```
union Name
{
   Komponentenliste
} [Unionvariable];
```

7.4 Aufzählungstyp

- Datentyp mit limitierter Anzahl von Werten `enum_1.cc`
- Zugriff mit Namen

1. **Syntax**

```
enum Name
{
   Komponentenliste
} [enum-Variable];
```

2. **Bsp:**

```
enum Wochentag {Sonntag, Montag, ... , Samstag};
...
Wochentag heute = Dienstag;
```

3. **Bemerkung:**
   - Compiler ordnet jeder Komponenten eine Integerzahl zu
     Sonntag → 0, ..., Samstag → 6
     Kann bei Definition selbst angegeben werden: Bsp: `enum Wochentag {Sonntag = 7, Montag = 6 }`
   - Compiler unterscheidet streng zwischen verschiedenen Aufzähltypen
   - Konversion: `enum` → `int` ok!
     `int` → `enum` Fehlermeldung!

7.5 Namen für Typen: `typedef`

- Definition von eigenen Typen
- Erweiterung der Grundlagen von C++

1. **Syntax**: `typedef <Typ> <Typ-Name>;`
2. **Bsp.**:
   (a) `typedef string Name;` `typedef_1.cc`
   → „Name“ Synonym für „string“
   `Name author;`
   `string author;` äquivalent!

(b) `typedef int gruppe[10];` `typedef_2.cc`
→ „gruppe´„ist neuer Typ, gruppe is ein Array der Dimension 10; jeder Eintrag ist ein `int`.

8 Funktionen

Motivation ;

- Funktionen werden dann eingesetzt, wenn bestimmte Teilaufgaben mehrfach erledigt werden müssen.
- effiziente Programmerstellung / übersichtlichere Programme
- modulare Programmerstellung möglich
- C++ ist objektorientiert
  - frei Funktionen (=Funktionen)
  - Methoden (Mitgliederfunktion)

Bsp:

1. Funktion:
   ```
   #include <cmath>
   ⋮
   float x,y;
   ⋮
   x = pow( y , 2 );// x = y^2
   ```
2. Methode:
   ```
   #include <string>
   ⋮
   int i; string s; char c;
   ⋮
   c = s.at(i); //c ist i.Zeichen des Strings
   ```

8.1 Funktionen

8.1.1 Deklaration einer Funktion (Funktionsprototyp)

- Spezifiziere Datentyp des Funktionswertes
- Spezifiziere Datentyp der Parameter, die übergeben werden
- Info an den Compiler über wesentliche Eigenschaften der Funktion; keine vollständige Beschreibung

Syntax `<Rückgabetyp> <Fktname> (<Parameterliste mit Typen>);`
Bsp:
`float f(int x, float y);`
`<Rückgabetyp>: int, float, ... ,`
`void:` Funktion liefert kein Ergebnis zurück → Prozedur.
`<Parameterlist>:`

- `()` keine Parameter werden übergeben.
- `(void)` -"-
- `(int, float)` äquivalent
- `(int x, float y)` -"-

8.1.2 Definition der Funktion

Syntax

```
<Rückgabetyp> <Fktname> (<Parameterliste mit Typen>)
{
   Anweisungen
}
```

Bsp:

```
float f(int x, float y)
{
   return(2*x+y);
}
```

entspricht $f(x, y) = 2\,x + y$
Bemerkung:

1. In der Parameterliste müssen Typ und Name vorhanden sein
2. übergebene Parameter = lokale Variablen in Funktion
3. Im Anweisungsblock weitere Variablen definieren, Blöcke, ...
4. Deklaration und Definition können in einem Schritt erfolgen.
5. Falls seperate Deklaration → Definition kann an beliebiger Stelle im Programm stehen
6. „`return(...)`“ - Anweisung führt zum Verlassen der Funktion.
   Rückgabetyp „`void`“ → kein „`return(...)`“.

8.1.3 Aufruf der Funktion

Syntax `<Fktname> (<Aktualparameterliste>);`
Bsp.:

```
zahl3 = f( zahl1, zahl2 );
```

funktion_1.cc

(**<Aktualparameterliste>**) : Anzahl, Typ und Reihenfolge müssen mit Parameterliste bei der Definition übereinstimmen.
Bem.:

1. Die „fertigen“ Funktionen sind in den Header-Dateien deklariert und definiert.
   z.B.: `cmath` → `pow`
2. Beim Programmstart wird Funktion `main()` aufgerufen.

8.1.4 Ergänzungen

1. **Inline-Funktionen** funktion_1_inl.cc
   „normale Funktionen“ :
   - Code getrennt vom Hauptprogramm
   - Aufruf → Sprung in die Funktion
   - Parameterübergabe
   - Rücksprung
   - Ergebnisrückgabe

   $\Longrightarrow$ kostet Zeit „overhead“
   „inline“ : Code wird direkt ins Hauptprogramm kopiert
   sinnvoll für kurze Funktionen

Syntax `inline <Rückgabetyp> ...`

2. **Funktionen mit `default`-Werten** `funktion_def.cc`
   Default-Werte für Parameter können bei der Funktionsdefinition angegeben werden. Diese werden beim Aufruf eingesetzt, wenn kein aktuelles Argument angegeben ist.

3. **`const`-Parameter** `funktion_1_const.cc`
   Schutz des Arguments vor Veränderung innerhalb der Funktion

Syntax `<Rückgabetyp> <Fkt-Name>( const <Var-Name> ... )`

8.2 Methoden

1. *(freie) Funktionen* operieren global auf der Ebene des Programms.
   „frei“: nicht an bestimmtes Objekt gebunden

2. Methoden operieren im Bereich eines bestimmten Objekts „objektorientiert“.
   Siehe dazu „Kapitel 9 Klassen“

8.3 Rekursion und Iteration

8.3.1 Rekursion

Eine Funktion ruft sich selbst direkt oder indirekt aus.
2 Bedingungen für Rekursion:

1. Es muss einen Endpunkt geben

2. Die zuleistende Arbeit muss bei jedem Aufruf reduziert werden

8.3.2 Iteration

Wiederholte Ausführung einer bestimmten Sequenz von Befehlen;
Abbruchbedingung notwendig.
Bsp: Fakultät `fakultaet.cc`

$$f(0) = 1; \quad f(n) = f(n-1) \cdot n; \quad n \in N$$
$$f(n) = n!$$

Bemerkungen

1. Iteration: Feld (fester Länge) wird benötigt

2. „Rekursion = Schleife + unbeschränkt großes Feld“

3. Auch Rekursion benötigt Platz: es werden viele Funktionsaufrufe erzeugt, allerdings nach Bedarf

Weitere Beispiele

- **Fibonacci** `fibonacci.cc`
- **Größter Gemeinsamer Teiler** `ggt_rek.cc`

$$ggT(a,b) = \begin{cases} a & a = b \\ ggT(b-a, a) & b > a \\ ggT(a-b, b) & a > b \end{cases}$$

8.4 Wert- und Referenzparameter

8.4.1 bisher: Werteparameter

- Werte werden in Funktionen / Methoden transformiert
  aktuelle Parameterwerte werden berechnet = Initialwert für formale Parameter
- kein Rücktransport des Werts

Bsp:

```
void swap( int x, int y )
{
   int t = x;
   x = y;
   y = t;
   return;
}
int main()
{
   int a = 3;
   int b = 5;
   swap( a , b );// Aufruf ohne Wirkung
}
```

8.4.2 Referenzparameter

im obigem Beispiel:
`void swap( int x, int y )` ⟶ `void swap( int &x, int &y )`
`x, y` sind nun Referenzen; `&` der Referenz- oder Adressoperator; **Bsp:** `fkt_tausche_1.cc`

```
int zahl;
int &ref = zahl;
zahl = 5; ref = 5; // identisch
zahl = 7; //ändert auch ref
ref = 8; //änder auch zahl
```

Bemerkungen:

1. aktuellen Parameter selbst werden in de Funktion transformiert
2. Alle Aktionen auf formalen Parameter = Aktionen auf aktuellen Parameter
   im Beispiel: alle Rechenoperationen mit x und y finden mit a,b statt
3. Referenzen müssen bei der Deklaration initialisiert werden. Funktionsaufrufe erzeugt, allerdings nach Bedarf

Weitere Beispiele

- **Größter Gemeinsamer Teiler** `ggt_ref.cc`
  Achtung: konstanter Wert bei Referenz nicht erlaubt `ggT(a, b, 6)`
  Abhilfe: `void g( const int &x )` in diesem Beispiel sinnlos.

8.4.3 Zusammenfassung

- Transport von Werte in eine Funktion:
  - als Wertparameter

  - als Referenzparameter
  - als Wert einer globalen Variablen
  - als Wert einer Komponente von zugehörigem Verbundes (nur Methoden)

- Transport von Werten aus einer Funktion:
  - Rückgabewert
  - als Wert eines Referenzparameters
  - als Wert einer globalen Variablen
  - als Wert einer Verbundkomponente

  Bemerkung
  - Zeiger (Pointer) können auch zum Transport verwendet werden
  - Rückgabetyp einer Funktion kann auch Referenz sein

8.4.4 Felder als Funktionsparameter

- Felder können nicht per Wertübergabe in eine Funktion transportiert werden `feld_ref_1.cc`
- Felder werden als Referenz übergeben → sogar ohne explizites „&“ `feld_ref_3.cc`

Achtung:

- `int (&x)[10]` // Klammern nötig, weil [ ] stärker binden als &.
  (`int &x[10]` ≙ `int &(x[10])` // Felder von Referenzen)
  Überlicherweise wird ein Feld ohne & übergeben.
- C++ transformiert Array-Parameter automatisch in „Referenzparameter“ (genauer Zeiger auf Feldanfang)
  Änderung von Feldelementen daher stets auch in aufrufendem Programmteil.
- Länge von Felder muss separat übergeben werden

8.5 Überladung von Funktionen und Operatoren

8.5.1 Funktionen

C++: für einen Funktionsnamen kann es mehrere Funktion-Definitionen geben `fkt_ueber_1.cc`
≙ Funktionsname überladen (`overloaded`)

Vorteil: Name bei Funktionsaufruf gleich, aber Anzahl, Typen der Argumente verschieden `fkt_ueber_2.cc`

8.5.2 Operatoren

Idee Benutze „üblichen“ Operatoren (+, -, ...) für benutzerdefinierte Datentypen

Syntax `<Returndatentyp> operator` ⊗ `(Argumentenliste)`
`{ Funktionscode }` ⟵ `wie Funktion mit Namen operator` ⊗ `op_ueber_1.cc`

8.6 Kommandozeilenparameter

- Unter `C/C++` ist jedes Programm eine Funktion ⟶ `int main()`
- `main()` können beim Aufruf des Programms Parameter übergeben werden → Kommandozeilenoperator

Syntax `int main(int argc, char *argv[])`

`argc`: Anzahl der Parameter (inkl. Programmnamen)

`*argv[]`: Array von Zeigern auf ASCII-Strings
`argv[i]` enthält in Stringform den i-ten Kommandozeilenparameter
(`argv[0] Programmname`)

`komm_zeil_par.cc`

9 Klassen und Objekte

9.1 Motivation

1. Ziel: mehr Sicherheit und Flexibilität durch Zugriffskontrolle auf Elemente.
   Wichtig bei großen Programmen; modulare Programmieren

2. Idee: Abkapselung von Daten/Funktionen/Anweisungen die zusammengehören → Zusammenfassung in Klasse
   Manipulation nur durch spezielle Anweisungen
   Zugriff nur über definierte Schnittstellen.

3. Bsp.: Fenstersystem („KDE“, „Windows“)
   Bediener verschiebt Fenster → Inhalt muss neu gezeichnet werden.
   Fenster $\hat{=}$ Variable der „Fensterklasse“. Es kennt selbst die Funktion, die aufgerufen werden muss.

4. Header-Dateien:
   üblicherweise wird jede Klasse in separater Datei abgelegt
   `klasse.h`: Klassendeklaration
   `klasse.cc`: Definitionen
   Einbinden in Hauptprogramm mit
   `#include “klasse.h“`

9.2 Klassen in C++

1. Programmtechnisch ist eine Klasse eine Struktur mit
   (a) privaten Daten: nur innerhalb der Klasse verfügbar
   (b) private Methoden (Implementierungsfunktionen) nur innerhalb der Klasse verfügbar
   (c) öffentliche Daten: für die Kommunikation mit anderen Objekten
   (d) öffentliche Methoden (Interface-Funktionen), über die von außen auf das Objekt zugegriffen werden kann.

2. **Definition einer Klasse** `class_vek.cc`

```
class <Name>
{
   private:
      <private Daten und Methoden>
   public:
      <öffentlich Daten und Methoden>
};
```

   (a) Erzeugung einer Klassenvariablen analog zu Strukturen
   (b) `struct` $\hat{=}$`class`, wobei die Komponenten öffentlich sind.
   (c) `class: „private“` ist `default`
   (d) `private` und `public` können beliebig oft und in beliebiger Reihenfolge verwendet werden.

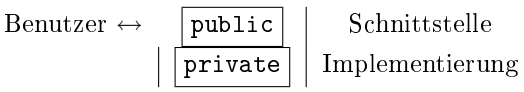
3. **Methoden**
   (a) Deklaration, Definition und Aufruf: wie bei freien Funktionen
   (b) „`::`“: Bereichsauflösungsoperator (*scope operator*

(c) Deklaration → innerhalb Klasse
Definition → kann außerhalb sein

(d) kein Argument: direkter Zugriff auf Datenkomponenten

4. **Prinzip der Kapselung (*Geheimnisprinzip*)**

   - öffentliche Schnittstellen: von außen sichtbar und benutzbar
   - private Implementatierung: rein interne Bestandteile; für Benutzer der Klasse nicht interessant. `class_menge.cc`



9.3 Freunde (`friends`)

Freunde einer Klasse sind Programmstücke (Klassen oder freie Funktionen), für die die `private`-Beschränkung aufgehoben ist.

9.3.1 Funktionen als Freunde

Idee erkläre freie Funktion als Freund; diese Funktion hat Zugriff auf private Komponenten.

Syntax `friend <Rückgabetyp> <Funktionsname>(<Parameterliste>);`

Bemerkungen

1. befreundete Funktionen = Alternative zu Methoden
2. auch Operatoren können Freunde einer Klasse sein.
3. mit „`friend`“ sparsam umgehen, da „`private`“ außer Kraft gesetzt wird.
4. Klassen als Freund `class_friend.cc`
   Syntax: `friend class <Name der Klasse>;`
   → alle Methoden des Freundes haben Zugriff auf private Komponenten.
5. *Freundschaften beruhen nicht auf Gegenseitigkeit.*

Bsp.: Überladen von „<<“ und „>>“

- Bisher: `class_ueber.cc`
  Ein- und Ausgabe für Klassenvariablen als Methode definiert
- Jetzt:
  Definiere „<<“ und „>>“ als befreundete Operatoren und benutze (z.B.) `cout << vek1;`
  $\Longrightarrow$ selbst definierte Objekte können ein- und ausgegeben werden wie `int, float,...`
- Beachte:
  1. „<<“ und „>>“ haben 2 Argumente
     (a) Referenz auf ein `ostream`- bzw. `istream`-Objekt; eine solche Referenz muß auch zurückgegeben werden.
     (b) auszugebenes Objekt

2. `ostream/istream` sind vordefinierte Klassen
   `cout/cin` sind vordefinierte Variablen dieser Klassen

Bemerkungen

```
int x;          }  ≙ {  int x;
cout << x;      }    {  operator << (cout,x);
```

`cout << x << y`

9.4 Konstruktoren und Destruktoren

9.4.1 Initialisierung mit Konstruktoren

1. **separate Methode** class_menge_2.cc

2. **Konstruktor**:
   Initialisieren ist Routineaktion → kann der Compiler übernehmen
   Konstruktor: definiere Methode mit gleichem Namen wie Klasse und ohne Rückgabetyp. class_menge_3.cc
   `Menge m1, m2;`
   ⟹ Compiler fügt automatisch folgende Zeilen ein:
   `m1.Menge();`
   `m2.Menge();`
   Bemerkungen:

   (a) Konstruktoren sind Initialiserungsroutinen für Objekte.

   (b) Sie werden mit der Klasse definiert und bei Variablendefinition automatisch aufgerufen.

   (c) Definition von Konstruktoren erfolgt nicht automatisch

3. **Konstruktoren mit Argumenten** class_menge_4.cc
   Konstruktoren können überladen werden; können Argumente haben.
   Bemerkungen:

   (a) Defaultkonstruktor = Konstruktor ohne Argumente; wird vom Compiler automatisch aufgerufen. Beachte:
   `Menge m1; // ✓`
   `Menge m1(); // Falsch`

   (b) Defaultkonstruktor muss nicht vorhanden sein.
   Aber:

```
class Menge
{
   public:
      Menge(int);
      //kein Defaultkonstruktor
      ...
};
...
Menge m1(1); //OK
Menge m2;
```

   Ist kein Konstruktor definiert → e wird kein Defaultkonstruktor erwartet
   Gibt es irgendeinen Konstruktor → Defaultkonstruktor muss bei Bedarf vorhanden sein

   (c) Konversionsoperator
   `Menge m4 = 42;` „implizierte Konversion“
   ⟹ `Menge::Menge(int)` wird benutzt.
   `Menge m5 = Menge(42);` „explizite Konversion“

9.4.2 Destruktoren

- sind komplementär zu Konstruktoren
- werden aufgerufen bevor Objekt vernichtet wird.

Beispiel

```
class Menge
{
   Menge();  //Konstruktor
   ~Menge(); //Destruktor
};
void f( int x )
{
   Menge m;
   //Konstruktor wird aufgerufen m.Menge();
   ...
}
```

↖ Ende der Funktion, Ende der Existenz von lokalen Variablen; Compiler ruft automatisch Destruktor auf. (`m.~Menge();`)

Bemerkungen

1. Destruktor erledigt Aufräumarbeiten (gibt z.B. Resourcen frei)
2. Destruktor werden automatisch aufgerufen, aber nicht automatisch erzeugt.

9.5 Vererbung

9.5.1 Prinzip

1. **Idee**: 2 Klassen, A, B
   B soll alles können, was A kann und etwas mehr. ver_1.cc
2. **Prinzip**: ver_form.cc

```
class A                //Basisklasse
{
   public:
      void f( int );
      int i;
}

class B : public A     // abgeleitete Klasse
{
   float x;
}
  ...
  A a;
  B b;
  ...
  a = b; // möglich; b wird reduziert auf Basistyp
  a.f( 1 );
  b.f( 2 );
  b = a; // nicht möglich
```

9.5.2 Sichtbarkeit bei Vererbung

1. öffentliche Komponenten der Basisklasse sind öffentlich in jeder Ableitung
2. private Komponenten der Basisklasse sind in den Ableitungen nicht zugreifbar.
3. `protected`: Sichtbarkeit der Komponenten nur für Basisklasse und ihrem Ableitungen `ver_ppp.cc`

9.5.3 Vererbungstypen

1. **öffentliche Vererbung**

   `Bsp:`
   `class Ab : public Basis { ... }`

   - `public` bleibt `public`
   - kein Zugriff von `Ab` auf `private`-Komponenten von Basis

2. `private` **Vererbung:**
   alle (`private` und `public`) Komponenten der Basisklasse sind in den Ableitungen `private`.
   Bsp: `class Ab : private Basis{ ... }`

3. `protected`-**Vererbung:**
   alle öffentlichen Komponenten der Basis-Klasse. Werden zu `protected`-Komponenten in der abgeleiteten Klasse.
   Bsp: `class Ab : protected Basis { ... }`

4. Mehrfachvererbung:

```
class Messer{};
class Schere{};
class Feile{};

class SchweizerMesser : public Messer,
                        public Schere,
                        public Feile {};
```

9.6 Schablonen

9.6.1 Funktionsschablonen

1. **Idee**: oft sind Programmstücke sehr ähnlich: `max_fi.cc`
   (a) i. Schreibe `float`-Version
   ii. Kopiere „`float`“→„`int`“
   (b) Benutze Schablonen; d.h. Schritt 1(a)ii wird vom Compiler gemacht.

2. **Struktur einer Schablone**
   `template <class T>` → Es folgte eine Schablone Parameter T ≡ Typ
   Rest Funktionsmuster; verwende T `temp_max.cc`
   Bemerkungen
   (a) Template = Kopier / Editieranweisung an Compiler:
   - kopiere Template
   - ersetze T durch `int` oder `float` oder - übersetze Funktionsdefinition
   (b) Am Typ der Parameter erkennt der Compiler welche Version gebraucht wird

3. **Explizite Angabe von Schablonenparameter**; falls `temp_max_expl.cc`
   (a) man sich nicht auf den Compiler verlassen will
   (b) Angabe nicht eindeutig
4. **Parameter einer Schablone** `temp_sort.cc`
   (a) Typ-Parameter; „`class`“ `temp_sort_2.cc`
   (b) Nicht-Typ-Parameter $\hat{=}$ formale Parameter einer Funktion.

9.6.2 Klassenschablonen

- Syntax ähnlich wie bei Funktionsschablonen `temp_stack.cc`
- Unterschied: Spezialisierungen müssen immer explizit angegeben werden.

9.7 Standard Template Library (STL)

C++:

1. Sprachdefinition
2. STL
   - Sammlung von Funktionen und Typendefinitionen, Strings, ...
   - spart Programmierarbeit

STL Funktionen und Klassenschablonen
3 wesentliche Bestandteile

1. **Behälter (Container)**
   Klassentemplates für Listen, Vektoren, Maxtrizen `stl_list.cc`
2. **Iteratoren**
   „Durchwandern“ durch Behälter
3. **Algorithmen**
   Manipulationen angewandt auf Behälter (Sortieren, Permutationen, ...) `stl_complex.cc`

10 Pointer (Zeiger)

10.1 Motivation und Notation

Zeiger ≡ Pointer = (Anfangs)Adresse von Größen

1. **Warum Pointer?**
   ◇ dynamische Speicherverwaltung
   ◇ Manipulation von Fehler u. Strings
   ◇ Standardbibliothek in `C` und `C++` verwenden Pointer
   ◇ komplexe Datenstrukturen (verkettete Liste)

2. **Deklaration von Pointer**
   Syntax: `<Typ> * <Name>`
   Beispiel: `int *ip; //ip ist ein Pointer auf Integer-Variable`

Bemerkung

1. `<Name>` ist Pointer auf Variable von Typ `<Typ>`
2. Ein Pointer muss deklariert werden wie jede andere Variable `pointer_1.cc`
3. | | | |
   |---|---|---|
   | `*` | Verweisoperator
Inhaltsoperator
Dereferenzierungsoperator | gibt den Inhalt
der Speicherstelle aus |
   | `&` | Adressoperator | gibt Adresse an |

   referenziertes Objekt: Größe auf die Pointer zeigt. `pointer_2.cc`
4. Zeiger : „Adressvariable“
5. **Falsch:**
   `int *a;` `*a = 5;` } a(=Adresse) hat im Allgemeinen keinen vernüftigen Wert
   Richtig:
   ```
   int b=5;
   int *pb = &b;
   ```
6. **Nullpointer**
   keine gültige Speicheradresse; nützlich als „neutrales Element“.
   Beispiel:
   ```
   float *ptr;
   ptr = NULL; //NULL ist vordefinierte Größe i.A. NULL = 0
   //nicht!: *ptr = NULL
   ```
7. Compiler ist streng bei Typenprüfung
   ```
   int *p;
   float f;
   ip = &f; //Falsch!
   ```
8. `void`-**Pointer**
   offen lassen auf welchen Datentyp ein Pointer zeigt.
   Bsp:
   ```
   void *ptr;
   ptr = &f;//erlaubt
   ip=(int*)ptr;//korrekt
   ```

Beispiele

```
int a;
int *a_zeig;
a_zeig = &a;    //--> a_zeig zeigt auf a; a und *a_zeig sind identisch
*a_zeig = 5;    //--> a=5;
```

10.2 Zeiger, Arrays, Strukturen und Funktionen

10.2.1 Zeiger und Arrays

1. betrachte `<Typ> a[N];`
   dann ist automatisch Zeigerkonstante `a` definiert mit `a=&a[0]`
   Es gilt `a + n = &a[n]` *„Pointerarithmetik“* pointer_an_na.cc
   Gilt auch für Inhalte `*( a + n ) = a[n]`

   (a) Intern erfolgt Umwandlung von `n` in einem Zeiger von jeweiligen Typ. Tatsächlich wird folgendes berechnet:
   `a+n*sizeof(*a)`

   (b) Es gilt:
   `a[n] = *( a + n ) = *( n + a) = n[a]`

2. betrachte `<Typ> *b;`
   `*( b + n ) = b[n]` pointer_3.cc

Beispiel pointer_string.cc

1. 2x3 Matrix:
   `float a[2][3];`

```
a[i][j]  = ( a[i][j] )          //i = 0,1
         = *(( a[i] ) + j )     //j = 0,1,2
         = *(( *( a + i) + j )
```

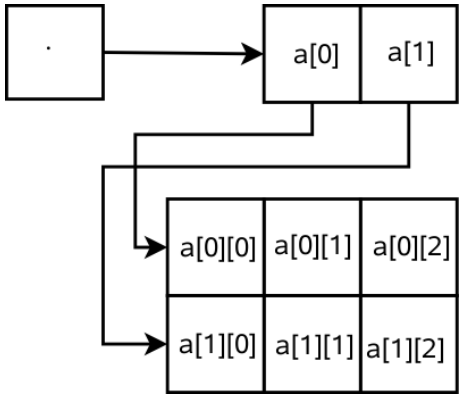


Abbildung 6: Arrays realisiert mit Pointern

`a[i] = *( a + i )`: Pointer auf Zeilenanfänge
`*( a + i ) + j`: Pointer auf das j-te Element der i-ten Zeile

10.2.2 Übergabe von Arrays an Funktionen

Beispiel
`void fkt( float v[] );`
wird automatisch umgewandelt in:
`void fkt( float *v );`
Hauptprogramm: `float v[10]; fkt(v);` pointer_4.cc

10.2.3 Zeiger auf Funktionen

Auch Funktionen haben Anfangsadressen; Name (ohne Klammern) hat Adresse als Wert.

1. Deklaration von Funktionspointern

```
int fct(float, int);
int main()
{
   ...
   int (*pfct)(float , int); //Rückgabewert: int; Parameter float, int;
   //pfct ist Pointer; (*pfct) ist eine Funktion
   pfct = fct;
   pfct( 3.5 , 4 );
}
```

2. Übergabe von Funktionen als Parametern pointer_array_fkt.cc
   Beispiel:

```
float integrate( float(*f)( float x) )
{...}
int main()
{
   cout << integrate( sin );
}
```

3. **Funktionen, die Pointer zurückgeben**
   Beispiele:
   (a) `int *f();`
   Funktion ohne Parameter; Rückgabetyp: Pointer auf `int`
   (b) `int *f(*f)();`
   f ist Pointervariable auf eine Funktion ohne Parameter mit Rückgabetyp: Pointer auf `int`

10.2.4 Zeiger auf Strukturen

Syntax für Zugriff auf Komponenten einer Struktur: pointer_struct.cc
`<Zeiger auf Struktur> -> <Elementname>`

10.3 Dynamische Speicherverwaltung

Idee Belegung von Speicherplatz variabler Größe zur Laufzeit.

1. Operator `new` Speicherplatzbelegung
   Syntax `new <Typ>;`
   `new` erzeugt einen Pointer auf <Typ>.

Beispiel:
`p = new int;`
$\Longrightarrow$ p ist Pointer auf einem `int`-Speicherplatz. „`new int`“ hat 2 Funktionen:

(a) reserviere Platz für einen `int`-Wert

(b) liefere Pointer zurück

Bemerkungen:
Falls Speicherplatzbeschaffung fehlgeschlagen
$\Longrightarrow$ `int` gibt Zeiger NULL zurück; (kann abgefragt werden)

2. Operator `delete <Variablenname>;`
gibt den Speicherplatz, auf der `<Variablenname>` zeigt wieder frei.
Bei Programmen mit wenig dynamischen Speicherplatzbedarf ist `delete` nicht notwendig.

3. **Beispiele**

(a) verkettete Liste `pointer_liste.cc`
Ziel: Eingabe von Zahlen
Zahlen werden in einem `struct` abgelegt.
`s struct`

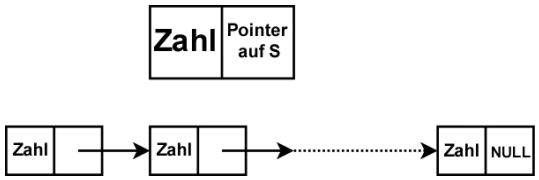


Abbildung 7: verkettete Liste mit Pointern

Auch Pointerverwendung in beiden Richtungen möglich.

Teil II
Mathematische Einschübe

1 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

1.1 Motivation

geg. Matrix $A \in R^{n \times n}$ $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Vektor $b \in R^n$ $\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$

Schreibe $(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$

Bemerkungen: Ohne das Ergebnis zu verändern, kann man ...

1. Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren.
2. Zeilen in (A,b) vertauschen

1.2 Schritte

1. Bringe A in Dreiecksform: $\left(\begin{array}{cccc|c} x & * & \dots & \dots & \alpha_1 \\ 0 & x & * & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & x & * & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x & \alpha_n \end{array}\right)$
2. Auflösen der Gleichungen durch Rückwärtseinsetzen.

Zu (1): Betrachte (A,b); n Gleichungen
Algorithmus:

1. Bestimme $a_{r1} \neq 0$ fahre mit (2) fort, falls kein r exisitiert: A ist singulär; stopp;
2. Vertausche Zeile 1 mit Zeile r: $(A, b) \to (\bar{A}, \bar{b})$
3. Subtrahiere geeignetes Vielfaches
   $l_{i1} := \frac{\bar{a_{i1}}}{\bar{a_{11}}}$ von dem übrigen Gleichungen, sodass $\bar{a_{i1}} = 0$ mit $i = 2, ..., n : (\bar{A}, \bar{b}) \to (A', b')$
4. Verfahre analog für Spalte 2,...,n

Bemerkungen

1. LGS $Ax = b$ und LGS $A'x = b'$ haben gleiche Lösung
2. Element a_{r1} in (1) heißt *Pivot-Element (Leitelement)*;
   Schritt (1): Pivotsuche
   gutartiges (numerisch) Verhalten für $\|a_{r1}\| = max_{i=1}^{n} = \|a_{i1}\|$
   Spaltenpivotsuche
3. Totalpivotsuche: Vertauschen von Zeilen **und** Spalten um Maximum zu finden.

zu (2): Ergebnis von (1)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x & * & \dots & \dots & \alpha_1 \\ 0 & x & * & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & x & * & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x & \alpha_n \end{array}\right)$$

$x_n = \frac{c_n}{r_{nn}}$

$x_{n-1} = \frac{1}{r_{n-1,n-1}}(c_{n-1} - r_{n-1,n}x_n)$

$\vdots$

$x_n = \frac{1}{r_{11}}(c_1 - r_{12}x_2)$

1.3 Verfahren von Gauss-Jordan

Im k-ten Teilschritt werden alle Elemente der k-ten Spalte zu 0 gemacht, außer a_{kl}
Bsp: Nach 3. Schritt

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x & b_n \end{array}\right)$$

1. GJ-Algorithmus kann zur Bestimmung der inversen Matrix verwendet werden
2. ...

2 Interpolation

2.1 Motivation

1. Datenpunkte aus Experiment
   $(t, x(t))$
   (Schaubild aus verschieden Punkten)
   Frage wie sieht x(t) zwischen den Punkte des Schaubilds aus?
   Interpolation = Verfahren, um x(t) für alle t zu bestimmen.

2. geg:$f[a,b] \to R$
   Approximiere f durch einfachere Funktionen.
   Methoden:

   - Polynom-Interpolation: $f(t) = \sum_k a_k \cdot t^k$
   - Trigonommetrische-Interpolation: $f(t) = \sum_k a_k \cdot e^(i\,k\,t)$
   - Spline-Interpolation: $f(t) = \sum_k a_k f_k(t)$
     kubische Splines :
     - f_k: Polynome 3.Ordnung
     - f(t) 2 mal stetig differenzierbar
   - Interpolation mit rationalen Funktionen $f(t) = \frac{\sum_k a_k \cdot t^k}{\sum_k b_k \cdot t^k}$

2.2 Polynom-Interpolation

1. **Lagrange-Darstellung**
   Satz: $f[a,b] \to R$; n+1 Stützstellen
   $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$
   Funktionswerte $f(x_0), \ldots, f(x_n)$
   Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom vom Grad n mit $P_n(x_k) = f_k$

$$P_n(x) = \sum_k^n f_k \cdot l_k(x); l_k(x) = \prod_{i=0; i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

   l_k:Lagrange'sche Grundpolynome
   $l_k(x_i) = \delta_{ik}$
   Bemerkungen

   (a) Konstruktion von $P_n(x)$ klar

   (b) Nachteil: Hinzunahme von neuem Wertepaar $(x_{n+1}, f(x_{n+1}) \to$ starte Berechnung von vorne.

2. **Der Algorithmus von Neville**
   Ziel: Berechne Wert des Interpolationspolynom an fester Stelle x.
   Satz: geg. Stützpunkte (x_i, f_i) $i = 0, 1, \ldots$
   $P_{i_0,\ldots,i_k}(x)$ sei das Polynom mit $P_{i_0,\ldots,i_k}(x_{i_j}) = f_{ij}$ $j = 0, \ldots, k$
   Dann gilt die Rekursionsformel:

   (a) $P_i(x) = f_i$

   (b) $P_{i_0,\ldots,i_k} = \frac{(x-x_{i0})\cdot P_{i_0,\ldots,i_k} - (x-x_{ik})\cdot P_{i_0,\ldots,i_{k-1}}(x)(x)}{x_{ik}-x_{i0}}$ kompakte Schreibweise $P_{i,i+1,\ldots,i+k}(x) = P_{i+k,k}(x) = P_{i+k,k}$
   $P_{i+k,k}$: Interpolationspolynom vom Grad k mit Stützstellen $x_i, \ldots, x_{i+k}$

   i. $P_{j,0} = j_j$

ii.

$$P_{j,k} = \frac{(x - x_{j-k}) \cdot P_{j,k-1} - (x - x_j) \cdot P_{j-1,k-1}(x)(x)}{x_j - x_{j-k}} \quad 1 <= k <= \quad j = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$= P_{j,k-1} + \frac{P_{j,k-1} - P_{j-1,k-1}}{\frac{x - x_{j-k}}{x - x_j} - 1}$$

3. **Algorithmus von Neville**
Benutze (a) und (b), um folgende Tabelle aus Werten der interpolierenden Polynome $P_{j,k}$ an einer festen Stelle x zu konstruieren.

x_0	$f_0 = P_{00}$			
x_1	$f_1 = P_{10}$	$> P_{11}$		
x_2	$f_2 = P_{20}$	$> P_{21}$	$> P_{22}$	
x_3	$f_3 = P_{30}$	$> P_{31}$	$> P_{32}$	$> \boxed{P_{33}}$

4. **Verbesserung der Genauigkeit**
Def. $Q_{i0} = D_{i0} = f_i$
$Q_{i,k} = P_{i,k} - P_{i,k-1}$
$D_{i,k} = P_{i,k} - P_{i-1,k-1}$
Man erhält folgende Rekursionsformeln

$$Q_{ik} = (D_{i,k-1} - Q_{i-1,k-1}) \frac{x_i - x}{x_{i-k} - x_i}$$

$$D_{ik} = (D_{i,k-1} - Q_{i-1,k-1}) \frac{x_{i-k} - x}{x_{i-k} - x_i}$$

$$1 <= k <= i; \; i = 0, 1, \ldots$$

Berechne Tabelle für $Q_{ik}, D_{ik} \rightarrow$

$$P_{nn} = f_n + \sum_{k=1}^{n} Q_{n,k}$$

Vorteil: Falls Werte $f_0, f_1, f_2, \ldots \approx$ gleich $\rightarrow$ Q_{ik} klein gegen f_i
$\rightarrow$ Summiere im ersten Schritt Q_{nk} auf; vermeide Rundungsfehler.
Bemerkungen:

(a) Arthen's Methode: selbe Rekursion, selbes Ergebnis, Zwischenschritte leicht unterschiedlich

(b) Hinzunahme von neuem Punkt (x_k, f_k) kein Problem.

3 Numerische Integration

Ziel: Näherung für $F = \int_a^b f(t)\,dt$ mit f ist integrierbar

gesucht: Formeln der Art

$$F = \sum_{k=0}^{n} c_k\, f(x_k) + R_n =: F_n + R_n$$

c_k**:** Koeffizienten oder Gewichte der Integrationsformel

x_k**:** Stützstellen

R_n**:** Restglied

3.1 Newton-Cotes-Formeln

3.1.1 Methode zur Gewinnung der Integrationsformeln

1. **Idee:** Interpolation von f und Integration des Interpolationspolynoms.
   Newton-Cotes: äquidistante Stützstellen:

   $$x_0 = a$$
   $$x_n = b$$

   Schreibe $f(x) = p_n(x) + r_n(x)$

   $$\begin{aligned} \Longrightarrow F = \int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b p_n(x)\,dx + \int_a^b r_n(x)\,dx \\ &= F_n + R_n \end{aligned}$$

   F_n geschlossen auswertbar
   R_n i.a. nur abschätzbar
   Ziel: Direkte Berechnung der Gewichte ohne explizite Aufstellung von $p_n(x)$

2. **Gewichte**
   $h = \frac{b-a}{n}$; Stützstellen: $x_0 = a;\;\; x_k = x_0 + k \cdot h;\;\; k = 0, \ldots, n$

   $$f_k = f(x_k);$$

   p_n sei in der Form von Lagrange gegeben

   $$\begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + r_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot l_k + r_n(x);\;\; l_k(x) = \prod_{i=0;\, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} \Longrightarrow F &= \int_{x_0}^{x_0+n\cdot h} p_n(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_0+n\cdot h} r_n(x)\,dx \\ &= F_n + R_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} f_k \int_{x_0}^{x_0+n\cdot h} l_n(x)\,dx = (b-a)\cdot \sum_{b=0}^{n} f_k\, c_k^{(n)} \end{aligned}$$

mit $c_k^{(n)} = \frac{1}{n} \int_0^n \tilde{l}_k(s)\, ds$ COTES-Zahlen

$$\tilde{l}_k(s) = \prod_{i=0;\, i\neq k}^{n} \frac{s-i}{k-i}$$

3. **Eigenschaften der COTES-Zahlen**

   (a) wähle $n = 0;\ b = 1;\ f = 1$

$$1 = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 p_n(x)\, dx = F_n = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(n)}$$

   (b)

$$\tilde{l}_k(s) = \tilde{l}_{n-k}(n-s)$$

$$c_k^{(n)} = \frac{1}{n} \int_0^n \tilde{l}_k(s)\, ds = \frac{1}{n} \int_0^n \tilde{l}_{n-k}(n-s)\, ds$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^n \tilde{l}_{n-k}(t)\, dt = c_{n-k}^{(n)}$$

mit $t = n - s$ und $\int_0^n ds = \int_0^n dt$

3.1.2 Beispiele

1. $n = 1;\ \ x_0 = a;\ x_1 = b$

$$\left.\begin{array}{c} c_0^{(1)} + c_1^{(1)} = 1 \\ c_0^{(1)} = c_1^{(1)} \end{array}\right\} \Longrightarrow c_0^{(1)} = c_1^{(1)} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{F_1 = \tfrac{b-a}{2}(f(a) + f(b))}$$

„Trapezregel“

2. $n = 2;\ \ x_0 = a;\ \ x_1 = \frac{a+b}{2};\ \ x_2 = b;\ \ h = \frac{b-a}{2}$

$$\tilde{l}_0(s) = \frac{s-1}{0-1} \cdot \frac{s-2}{0-2} = \frac{s^2 - 3\,s + 2}{2}$$

$$\begin{aligned} c_0^{(2)} &= \frac{1}{6} \\ c_2^{(2)} &= c_0^{(2)} = \frac{1}{6} \\ c_1^{(2)} &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow F_2 = (b-a)\left(\frac{(f(a)}{6} + \frac{(2\, f(\frac{a+b}{2})}{3} + \frac{(f(b)}{6})\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{F_2 = \tfrac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4\, f(\tfrac{a+b}{2}) + f(b)\right)}$$

„SIMPSON-Regel“ oder „KEPLER'sche-Fassregel“

3. $n = 3, 4, 5, 6$:

n	$C_K^{(n)}$											
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$					
2				$\frac{1}{6}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{6}$				
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$			
4		$\frac{7}{90}$		$\frac{32}{90}$		$\frac{12}{90}$		$\frac{32}{90}$		$\frac{7}{90}$		
5	$\frac{19}{288}$		$\frac{75}{288}$		$\frac{50}{288}$		$\frac{50}{288}$		$\frac{75}{288}$		$\frac{19}{288}$	
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$		$\frac{27}{840}$		$\frac{272}{840}$		$\frac{27}{840}$		$\frac{216}{840}$		$\frac{41}{840}$

$\boxed{\frac{3}{8}\text{-Regel}}$

Bemerkung Für $n = 8$ und $n \geq 10$ treten negative Gewichte auf ⟵ nicht erwünscht, numerisch instabil.

3.1.3 Fehlerabschätzung bei NC-Formeln

Trapezregel:

$$|R_1| \geq \frac{M_2}{12}(b-a)^3; \quad |f''(x)| \geq M_2 \quad (x \epsilon [a,b])$$

Simpsonregel:

$$|R_2| \geq \frac{M_4}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5; \quad |f''(x)| \geq M_4 \quad (x \epsilon [a,b])$$

3.1.4 Allgemeine Trapez- und Simpsonregel

Idee:
Man verwendet keine NC-Formeln hoher Ordnung;
Deshalb: Bei großen Integrationsintervalllen: unterteile Intervall;
verwende NC-Formel kleiner Ordnung für Teilintervall.

1. **Allgemeine Trapezregel**
   Betrachte N Teilintervalle; $h = \frac{b-a}{N}$

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 + i\,h, \quad x_N = b, \quad i = 0, ..., N$$

$$F^{(i)} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt = F_1^{(i)} + R_1^{(i)} \tag{1}$$

$$F_1^{(i)} = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) \tag{2}$$

$$F = \int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} F_1^{(i)}}_{F_{TR}^{(N)}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} R_1^{(i)}}_{R_{TR}^{(N)}} \tag{3}$$

Man erhält:

$$F_{TR}^{(N)} = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\,f_1 + 2\,f_2 + ... + 2\,f_{N-1} + f_N\right. \tag{4}$$

$$\left|R_{TR}^{(N)}\right| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \left|R_1^{(i)}\right| \tag{5}$$

$$\leq N\frac{M_2}{R}\,h^3, \quad |f''(x)| \leq M_2 \quad (x \epsilon [a,b]) \tag{6}$$

2. **Allgemeine Simpsonregel**

$$h = \frac{b-a}{2N} \tag{7}$$

$$F_3^{(N)} = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + ... + 2f_{2N-2} + 4f_{2N-1} + 2f_{2N}\right] \tag{8}$$

$$\left|R_S^{(N)}\right| \leq N\frac{h^5}{90}M_4 \tag{9}$$

3. **Praktische Fehlerabschätzung**
Kriterium: $\varepsilon > 0$ gegeben.

$$N \to 2N; \;\; h \to \frac{h}{2}$$

$$\left|F_{TR}^{(N)} - F_{TR}^{(2N)}\right| < \varepsilon \left|F_{TR}^{(2N)}\right|$$

ja: fertig. **nein:** weitere Integration

4. **Bemerkung zum Algorithmus**
Implementierung der allgemeinen Trapezregel

   (a) **Verdopplung der Intervalle:**

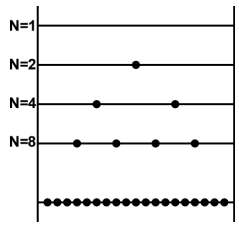


Abbildung 8: Verdopplung der Intervalle

vorteilhaft: schreibe Routine, die jeden Funktionswert nur einmal ausrechnet.

   (b) Integrationsroutine (z.B. Trapez) wird so lange aufgerufen, bis Genauigkeit bzw. maximale Intervallzahl erreicht ist.

```
for( i=1; i <= IMAX; i++ )
{
s= trapez( i );
if( fabs( s - salt ) < EPS * fabs( s )) return( s );
salt = s;
}
```

→ „Genauigkeit kann nicht erreicht werden“.

5. **Romberg-Integration**
Idee

   (a) Betrachte Schrittweiten:

$$h_0 = b-a; \;\; h_1 = \frac{b-a}{2} = \frac{h_0}{2}; \;\; h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{h_1}{2^2}; \;\; ... \; h_i = \frac{h_0}{2^i}$$

   (b) Berechne zugehörige Trapezsummen

$$F_{TR}^{(2^i)} =: T_{i0} \quad i = 0, 1, 2, ..., i_{max}$$

(c) Berechne Interpolationspolynom
Extrapolierung zu $h = 0$

(d) NEVILLE-Tableau

$$\begin{array}{lllll} T_{00} & & & & \\ T_{10} & > T_{11} & & & \\ T_{20} & > T_{21} & > T_{22} & & \\ T_{30} & > T_{31} & > T_{32} & > \boxed{T_{33}} & \\ \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

$$T_{ik} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{4^k - 1}$$

Bemerkung
1.Spalte: allgemeine Trapezformel
Rest: nur Linearkombinationen

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

4.1 Problemstellung

1. **Ziel**
   gesucht: $y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$
   gegeben: $y'(x) = f(x, y(x))$ gewöhnliche DGL 1. Ordnung.

2. **Allgemein: Systeme von n gewöhnlichen DGL**

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, ..., y_n) && (10)\\ &\vdots && (11)\\ y_1' &= f_n(x, y_1, ..., y_n) && (12)\\ & && (13) \end{aligned}$$

   gesucht n Funktionen $y_i(x)\ \ i = 1, .., n$ mit $\underbrace{y_i(x_0) = y_0}_{Anfangsbedingungen}$

3. **Gewöhnliche DGL m-ter Ordnung:**

$$y^m(x) = f(x, y, y', y'', ..., y^{(m-1)})$$

   kann in ein System von DGLn 1.Ordnung übergeführt werden:

$$\left.\begin{array}{lcl} z_1(x) &=& y(x) \\ z_2(x) &=& y'(x) \\ \vdots & & \\ z_m(x) &=& y^{(m-1)}(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{lcl} z_1'(x) &=& y' = z_2 \\ z_2'(x) &=& z_3 \\ \vdots & & \\ z_m'(x) &=& f(x, z_1, z_2, ..., z_m) \end{array}$$

   Im allgemeinen ist geschlossene analytische Lösung nicht möglich.
   Ziel: numerische Lösung

4.2 Polynomzug-Verfahren (Euler)

Näherung

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$
$$\Longrightarrow y(x+h) \approx y(x) + h \cdot f(x, y)$$

Startwerte x_0, $_0$; $x_i = x_0 + h \cdot i \quad i = 1, 2, 3, ...$
Näherungswerte η_i für $y_i = y(x_i)$:

$$\eta_0 := y_0; \ \ \eta_{i+1} = \eta_i + h \cdot f(x_i, \eta_i)$$

Euler-Verfahren

Bemerkungen:

1. η_i hängen von h ab. $\eta_i = \eta(x_i, h)$
2. Schreibe allgemein:
$$f(x, y) \to \Phi(x, y; h, f)$$
$$\eta_{i+1} = \eta_i + h \cdot \Phi(x_i, \eta_i; h, f)$$
3. Euler-Verfahren „ist von der Ordnung h“;
   1.Ordnung in h

Verfahren 2.Ordnung betrachte: $\tau = \frac{y(x+h)-y(x)}{h} - f(x,y)$

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + o(h^3)$$

$$\Longrightarrow \tau = \underline{y'(x)} + \frac{h}{2} \underbrace{y''(x)}_{=\frac{d}{dx}(y')=\frac{d}{dx}(f(x,y(x)))=f_x+f_y\cdot f} + o(h^2) - \underline{f(x,y)}$$

$$\Longrightarrow \tau = \frac{h}{2}(f_x + f_y \cdot f) + o(h^2)$$

Definition: $\Phi(x,y,h,f) = f(x,y) + \frac{h}{2}\left[f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot f(x,y)\right]$
Nach Konstruktion Verfahren 2.Ordnung.
Nachteil: Ableitungen schwierig auswertbar.

4.3 Runge-Kutta-Verfahren

Ziel Vermeide Ableitungen (aber hohe Ordungen)

1. **Ansatz für Runge-Kutta der Ordnung 2**

   $$\Phi(x,y,h,f) = a_1 \cdot f(x,y) + a_2 \cdot f(x + p_1 \cdot h, y + p_2 \cdot h \cdot f(x,y))$$

   Bestimme a_1, a_2, p_1, p_2 so, dass $\Phi(x,y;h,f)$ mit $f(x,y) + I(x,y) = \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ zu möglichst hoher Ordnung übereinstimmt.
   (Entwickle Φ in h und vergleiche)

   2 Lösungen

   (a) $\Phi(x,y;h,f) = \frac{1}{2}\left[f(x,y) + f(x+h, y+h\cdot f(x,y)\right]$ „Trapezregel“

   (b) $\Phi(x,y;h,f) = f(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}\cdot f(x,y))$ „Mittelpunkts-Formel“

2. **Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4**:

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y;h,f) &= \frac{1}{6}(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4) && (14)\\
k_1 &= f(x,y) && (15)\\
k_2 &= f(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}\cdot k_1) && (16)\\
k_3 &= f(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}\cdot k_2) && (17)\\
k_4 &= f(x+h, y+h\cdot k_3) && (18)
\end{aligned}$$

   Verfahren 4.Ordnung

   Beispiel

   $$y'' + y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1$$

   (Analytische Lösung : $y(x) = \sin x$)
   Überführen in DGL 1.Ordnung:

$$\left.\begin{array}{rcl} z_1 &=& y \\ z_2 &=& y' \end{array}\right\} \quad \begin{array}{rcll} z_1' &=& z_2 & \equiv f_1(x,z_1,z_2) \\ z_2' &=& -z_1 & \equiv f_2(x,z_1,z_2) \end{array}$$
$$\begin{array}{rcl} z_1(0) &=& 0 \\ z_2(0) &=& 1 \end{array}$$

EULER:

$$z_1(x+h) = z_1(x) + h \cdot z_2(x) \tag{19}$$
$$z_2(x+h) = z_2(x) - h \cdot z_1(x) \tag{20}$$