Rechnernutzung in der Physik

Institut für Experimentelle Teilchenphysik
Institut für Theoretische Teilchenphysik
Interfakultatives Institut für Anwendungen der Informatik

Prof. G. Quast, Prof. M. Steinhauser
Dr. A. Mildenberger, Dipl.-Phys. Jens Hoff, Dr. M. Zeise

WS2011/12 – Blatt 06

`http://comp.physik.kit.edu` Prog.: Di, 06.12.2011 / Ausarb.: Fr, 09.12.2011

Aufgabe 14: Nullstellen **freiwillig und Ausarbeitung**

Eine effektive Methode, Nullstellen einer Funktion $f(x)$ zu berechnen, ist das Newton-Verfahren, das folgendermaßen definiert ist: Nach der Wahl eines Startwertes x_0 erhält man x_i $(i = 1, 2, \dots)$ mittels

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Bei geeigneter Vorgabe von x_0 konvergiert x_i für $i \to \infty$ gegen eine Nullstelle von $f(x)$.

(a) Schreiben Sie eine Funktion (oder `Module`) mit dem Namen `MyRoots`, die eine Funktion und die Grenzen des zu puntersuchenden Intervalls als Parameter übernimmt. Außerdem soll es möglich sein, Parameter vorzugeben, die die Genauigkeit bzw. die maximalen Iterationsschritte festlegen. Fehlermeldungen, falls keine Nullstelle existiert bzw. das Verfahren nicht konvergiert, sollen auf dem Bildschirm ausgegeben werden.

(b) Finden Sie (falls möglich) alle Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2(x-2)$ mit Hilfe von `MyRoots`, sowie unter Verwendung der `Mathematica` Routinen `FindRoot` und `Solve`.

(c) Wiederholen Sie (b) mit $f(x) = x^2(x-2) + 0.1 \sin(100\, x)$. Es ist hilfreich, die Funktion graphisch darzustellen, um geeignete Startwerte zu finden.

(d) Schreiben Sie `MyRoots` so um, dass es nicht zwingend ist, die Parameter, die die Präzision und Schrittweite festlegen, anzugeben. Wählen Sie vernünftige Standardwerte. Schauen Sie sich dazu die Hilfeseiten zu `Options` an oder werfen Sie einen Blick in das 2. Einführungsnotebook (`Intro_Programmieren.nb`). *(freiwillig)*

Ausarbeitung: Die Ausarbeitung soll das Programm `MyRoot` enthalten. Kommentieren Sie das Programm *handschriftlich* und notieren Sie außerdem (mindestens) drei signifikante Stellen der Nullstellen von (b) und (c).

Hinweis: Folgende zusätzliche `Mathematica`-Befehle können sich beim Lösen der Aufgabe als nützlich erweisen: `Abs`, `If`, `Solve`, `FindRoot`.

Aufgabe 15: Magnetfeld einer Leiterschleife **Programmtestat und Ausarbeitung**

(a) Betrachten Sie eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius a, durch die der Strom $\vec{I}$ fließt. Die Leiterschleife liege in der x-y-Ebene und der Mittelpunkt sei im Ursprung. Das Vektorpotential $\vec{A}$, das mit dem Magnetfeld über $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ zusammen hängt, kann so gewählt werden, dass es – bei Verwendung von Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) – nur eine von Null verschiedene Komponente in ϕ-Richtung hat. Berechnen Sie diese aus der Gleichung

$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$ bzw. der Integraldarstellung der Lösung

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \overset{\mu_0=a=1}{=} \int \mathrm{d}\phi\, \frac{d\vec{r}\,'}{d\phi}\, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

mit $\vec{r}\,' = (a\cos\phi, a\sin\phi, 0)^T$. Stellen Sie das Potential als „Gebirge" über der x-z-Ebene graphisch dar. Zeichnen Sie auch die Äquipotentiallinien in der x-z-Ebene. Wählen Sie dabei $\mu_0 = a = 1$ und $y = 0$. Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}(x, y, z)$ und zeichnen Sie in der x-z-Ebene die Richtung des $\vec{B}$-Feldes. (*Hinweis:* Je nach Hardware kann `Mathematica` $\sim 1 - 5\,\mathrm{min}$ für die Integration benötigen.)

(b) Betrachten Sie Näherungen an das Vektorpotential für große und kleine Abstände r und vergleichen Sie Ihr Ergebnis graphisch mit dem exakten Resultat in Abhängigkeit von r. Wählen Sie dabei für den Azimutwinkel $\theta = \pi/4$ und untersuchen Sie die Abhängigkeit von der Anzahl der Terme in Ihren Approximationen.

(c) Betrachten Sie eine zweite Leiterschleife an der Position (i) $z = 2\,a$, (ii) $z = a$ bzw. (iii) $x = 2\,a$ (d.h. parallel zur y-z-Ebene), berechnen Sie das Vektorpotential und das Magnetfeld und stellen Sie Ihre Ergebnisse wie in (a) unter Einbeziehung des Betrags des Magnetfeldes graphisch dar. Was beobachten Sie im Fall (ii) der Helmholtz-Spule?

Ausarbeitung: Bitte erstellen (und *drucken*) Sie eine gemeinsame Darstellung der exakten Lösung aus (a) zusammen mit den Näherungen aus (b). Diskutieren Sie die Güte der Näherungen (*handschriftlich*). Drucken Sie außerdem die Plots der Äquipotentiallinien und die der normierten Magnetfelder aus (a) und (c) in einer Übersicht aus und notieren Sie *handschriftlich* Ihre Feststellungen bzgl. der Helmholtz-Spule.

Hinweise: Vor der Integration mit `Mathematica` sollte $y = 0$ gesetzt werden. Verwenden Sie für den Betrag eines Vektors nicht den Befehl `Norm[]`, sondern `Sqrt[vec.vec]`. Folgende Befehle erweisen sich in dieser Aufgabe als nützlich: `Integrate` (hierbei insbesondere die Option `GenerateConditions`), `Plot3D`, `ContourPlot`, `Curl`, `VectorPlot`, `GraphicsGrid`, `Series`, `Normal`.

Hinweis: Mit dem Rechnernamen `fphctssh.physik.uni-karlsruhe.de` können Sie von überall aus mittels ssh/scp Programm auf einen Poolrechner zugreifen.
