Rechnernutzung in der Physik

Institut für Experimentelle Teilchenphysik
Institut für Theoretische Teilchenphysik
Interfakultatives Institut für Anwendungen der Informatik

Prof. G. Quast, Prof. M. Steinhauser
Dr. A. Mildenberger, Dipl.-Phys. Jens Hoff, Dr. M. Zeise

WS2011/12 – Blatt 07

`http://comp.physik.kit.edu` Prog.: Di, 13.12.2011 / Ausarb.: Fr, 16.12.2011

Aufgabe 16: Doppelpendel **Programmtestat und Ausarbeitung**

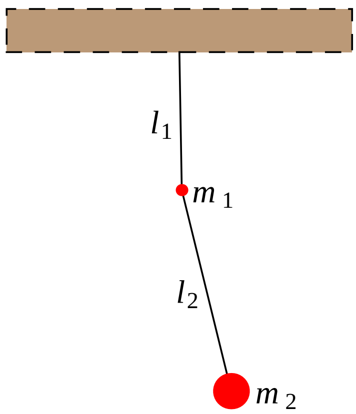
Betrachten Sie ein (mathematisches) Doppelpendel mit Massen m_1 und m_2 und Fadenlängen l_1 und l_2 (siehe Skizze). Die unabhängigen Variablen sind die Auslenkwinkel ϕ_1 und ϕ_2, die folgendem System von gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung gehorchen:

$$(m_1 + m_2)\left[l_1^2\ddot{\phi}_1 + g l_1 \sin(\phi_1)\right] + m_2 l_1 l_2 \left[\ddot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + (\dot{\phi}_2)^2 \sin(\phi_1 - \phi_2)\right] = 0, \quad (1)$$

$$m_2 l_2 \left[l_2 \ddot{\phi}_2 + l_1 \ddot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) - l_1 (\dot{\phi}_1)^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + g \sin(\phi_2)\right] = 0. \quad (2)$$

Wählen Sie der Einfachheit halber $g = 1$, $l_1 = 2$ und $l_2 = 3$.

(a) Lösen Sie die Differentialgleichungen für die Anfangsbedingungen $\phi_1(0) = \phi_1^0$, $\phi_2(0) = \phi_2^0$, $\dot{\phi}_1(0) = 0$ und $\dot{\phi}_2(0) = 0$ mit Hilfe des Befehls `NDSolve`. Stellen Sie die Lösungen $\phi_1(t)$ und $\phi_2(t)$ für t zwischen 0 und 60 graphisch dar. Wählen Sie dabei verschiedene Werte für ϕ_1^0 und ϕ_2^0 und betrachten Sie u.a. die Grenzfälle großer und kleiner Werte von m_1/m_2.



(b) Stellen Sie Ihre Lösung auch in Form eines animierten Pendels graphisch dar. Sie können sich dabei an dem entsprechenden Vorlesungsbeispiel orientieren.

(c) Wie sehen die Differentialgleichungen in (1) und (2) im Grenzfall kleiner Winkel ϕ_1 und ϕ_2 aus? Untersuchen Sie „experimentell", für welche numerischen Werte von ϕ_1^0 und ϕ_2^0 die Approximation gut ist. Schauen Sie sich dabei sowohl $\phi_1(t)$ und $\phi_2(t)$ als auch die Animation für die exakte Lösung und die Approximation an.

Ausarbeitung: Die Ausarbeitung soll den *handschriftlich* kommentierten Programmteil enthalten, der für das blose Zeichnen des Pendels zuständig ist. Dokumentieren Sie außerdem Ihre Folgerungen zu den Fragen in (c) *handschriftlich*. Erstellen Sie zu einer möglichst interessanten Pendelkonfiguration alle 5 Sekunden eine Momentaufnahme. Exportieren Sie deren gemeinsame Darstellung als **maximal eine** `.pdf`-Seite und drucken Sie diese aus.

Hinweis: Folgende zusätzliche `Mathematica`-Befehle erweisen sich in dieser Aufgabe als nützlich: `D`, `NDSolve`, `Line`, `Point`, `Text`, `Animate`, `SetDirectory`, `Export` und `GraphicsGrid`.

Aufgabe 17: Kommutatoren in der Quantenmechanik **freiwillig**

Im Formalismus der Quantenmechanik werden Messgrößen wie Ort $\vec{x}$, Zeit t, Impuls $\vec{p}$, Energie E usw. nicht mehr als blose Zahlen, sondern als Operatoren aufgefasst. (Die physikalisch tatsächlich messbaren Werte ergeben sich erst durch Anwendung des Operators auf den Zustand des Systems, der durch eine Wellenfunktion ψ beschrieben wird.) Eine wichtige Eigenschaft von Operatoren ist, dass diese im Allgemeinen nicht miteinander vertauschen $O_1 O_2 \neq O_2 O_1$ (sie erfüllen also kein Kommutativgesetz unter Multiplikation). Diese Eigenschaft wird durch den Kommutator $[O_1, O_2]$ angegeben, wobei dieser über $[O_1, O_2] = O_1 O_2 - O_2 O_1$ definiert ist.
Die Operatoren $\vec{X}$ und $\vec{P}$ erfüllen folgende grundlegenden Gleichungen:

$$[X_i, X_j] = [P_i, P_j] = 0, \tag{1}$$
$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{2}$$

Weiterhin gelten für Operatoren allgemein die Zusammenhänge (c sei eine gewöhnliche, kommutierende Zahl):

$$[c, O] = 0, \tag{3}$$
$$[c\,O_1, O_2] = c\,[O_1, O_2], \tag{4}$$
$$[O, O] = 0, \tag{5}$$
$$[O_1, O_2] = -[O_2, O_1], \tag{6}$$
$$[O_1 + O_2, O_3] = [O_1, O_3] + [O_2, O_3], \tag{7}$$
$$[O_1 O_2, O_3] = O_1[O_2, O_3] + [O_1, O_3]O_2. \tag{8}$$

(a) Implementieren Sie in `Mathematica` mittels der Gleichungen (1) bis (8) die Möglichkeit, Kommutatoren beliebiger Polynome in $\vec{X}$, $\vec{P}$ und nicht-operatorwertiger Symbole zu berechnen. Das Ergebnis sollte keine Kommutatoren mehr enthalten und vereinfacht werden.

(b) Verifizieren Sie die Kommutatorrelationen des quantenmechanischen Drehimpulses $\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P}$, bzw. $L_i = \epsilon_{ijk} X_j P_k$:

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} L_k, \tag{9}$$
$$[\vec{L}^2, L_i] = 0. \tag{10}$$

(c) Verifizieren Sie die Jacobi-Identität:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0. \tag{11}$$

Hinweise: Schreiben Sie innerhalb Ihres Programmes den Kommutator als Funktion `comm[A,B]` für die Sie keinerlei Definitionen setzen (leichter nachzuvollziehende Auswertung). Übergeben Sie Ausdrücke mit Kommutatoren stattdessen an eine Funktion `calcComm`, welche die notwendigen Umformungen vornimmt. Folgende `Mathematica`-Befehle sind in dieser Aufgabe hilfreich: `KroneckerDelta`, `MemberQ`, `Apply` und `NonCommutativeMultiply` (Abkürzung: `**`). Statt `**` können Sie hierfür auch wieder eine Funktion zur Notation verwenden. Außerdem sollten Sie zunächst eine Routine schreiben, die feststellt, ob ein Ausdruck Operatoren enthält oder nicht (diese einfach durch Einträge in einer Liste festlegen).

Hinweis: Mit dem Rechnernamen `fphctssh.physik.uni-karlsruhe.de` können Sie von überall aus mittels ssh/scp Programm auf einen Poolrechner zugreifen.
