Rechnernutzung in der Physik

Institut für Experimentelle Teilchenphysik
Institut für Theoretische Teilchenphysik
Interfakultatives Institut für Anwendungen der Informatik

Dr. Th. Kuhr, Prof. U. Husemann, Prof. M. Steinhauser
Mildenberger, Hoff, Hermann, Heck WS2012/13 – Blatt 13
`http://comp.physik.kit.edu` Prog.: Di, 29.01.2013 / Ausarb.: Fr., 01.02.2013

*Die Anmeldung im Studierendenportal (**`https://studium.kit.edu/Seiten/Default.aspx`**) wurde mittlerweile durch das Studienbüro eingerichtet werden. Für Bachelor-Studierende ist die Anmeldung im Studierendenportal nötig, die Anmeldung ist bis 07.02.2013 geöffnet. Die Abmeldung kann bis 07.02.2013 erfolgen. Der Kurs ist nicht benotet.*

Aufgabe 32: Erzeugung von Zufallszahlen mit beliebiger Verteilungsdichte Testat

Hinweis: Zu dieser Aufgabe gibt es eine Vorlage `pdfs.cc`, an der Sie sich bei der Programmentwicklung orientieren können. Falls Sie Ihr Macro übersetzen wollen, verwenden Sie die Datei `makepdfs.txt`, indem Sie `make -f makepdfs.txt` eingeben.

Ausgehend von im Intervall $]0, 1]$ gleichverteilten Zufallszahlen, erzeugt mittels `gRandom->Rndm()`, lassen sich mit Hilfe der Verwerfungsmethode oder – in einigen Fällen – mit der Transformationsmethode Zufallzahlen erzeugen, die einer beliebigen Verteilungsdichte folgen.

32.1: Sägezahn

Füllen Sie je ein Histogramm mit 10.000 Zufallszahlen, die einer Sägezahnverteilungsdichte folgen, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x_{\max}^2} & (0 < x < x_{\max}) \\ 0 & (\text{sonst}), \end{cases}$$

mit (a) der Transformationsmethode und (b) der Verwerfungsmethode z. B. für $x_{\max} = 1$.

32.2: Streuwinkelverteilung in e^+e^--Streuung

Erzeugen Sie 10.000 Zufallszahlen mit der Verwerfungsmethode gemäß der Verteilungsdichte

$$f(x) = \frac{3}{8}(1 + x^2) \qquad (-1 \leq x \leq 1),$$

und füllen Sie die Zufallszahlen in ein Histogramm.

32.3: Cauchy-Lorentz-Verteilung

Verwenden Sie die Transformationsmethode und füllen Sie ein Histogramm mit 10.000 Zufallszahlen, die einer Cauchy-Lorentz- (auch: Breit-Wigner-)Verteilungsdichte folgen, gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + x^2}.$$

Aufgabe 33: **freiwillig**

Modifizieren Sie das Programm aus Aufgabe 24 (Blatt 10), um in 10.000 wiederholten Experimenten jeweils $n = 10$ Cauchy-Lorentz-verteilte Zufallszahlen zu erzeugen. Berechnen Sie jeweils den Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Vergleichen Sie ein Histogramm von $\bar{x}$ mit dem ursprünglichen Histogramm von x. Stimmt die Beobachtung mit Ihrer Erwartung aus dem zentralen Grenzwertsatz überein?

Aufgabe 34: Maximum-Likelihood-Schätzung für Normalverteilungen **Ausarbeitung**

Bei Normalverteilungen lassen sich die Maximum-Likelihood-Schätzwerte $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}^2$ für die Parameter μ und σ^2 sowohl analytisch als auch numerisch bestimmen.

34.1: Analytische Lösung

Leiten Sie analytische Formeln her, um für eine gegebene Stichprobe von n Datenpunkten $x_1, \ldots, x_n$, die einer Normalverteilung $G(x_i; \mu, \sigma)$ folgen, die Maximum-Likelihood-Schätzwerte $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}^2$ zu berechnen. Benutzen Sie dazu das Maximum-Likelihood-Prinzip. Berechnen Sie die Varianz des Schätzwerts $\hat{\mu}$.

34.2: Numerische Lösung

Schreiben Sie ein Programm, welches durch numerische Minimierung der negativen logarithmischen Likelihood-Funktion den Parameter μ schätzt. Testen Sie das Programm, indem Sie aus gaußverteilten Zufallszahlen mit μ- und σ^2-Werten Ihrer Wahl Stichproben der Größe $n = 20$ erzeugen.

Bestimmen Sie die Varianz des Schätzwerts $\hat{\mu}$ mit der grafischen Methode $(-\ln L(\hat{\mu}) + 1/2)$ und mittels parametrischem Bootstrapping ausgehend von den Schätzwerten $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}^2$.

Hinweis: Sie können für die Lösung der Aufgabe auf das Programmtemplate `ex13.cc` zurückgreifen. Verwenden Sie zur numerischen Minimierung die Methode `TF1::GetMinimumX()`.

Hinweis:
Mit dem Rechnernamen `fphctssh.physik.uni-karlsruhe.de` können Sie von überall aus mittels ssh/scp Programm auf einen Poolrechner zugreifen.