

Rechnernutzung in der Physik

Institut für Experimentelle Teilchenphysik
Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. G. Quast, Prof. Dr. M. Steinhauser
Dr. A. Mildenerger, Dr. Th. Chwalek, Dr. M. Vitti

WS2023/24 – **Blatt 8**
Besprechung am 22./23.01.2024

5-Minuten-Aufgabe 8: Matrizen

Auf der ILIAS-Seite finden Sie Dateien `matA.m`, `matT.m` und `matB.m`. Diese enthalten spezielle Matrizen, $A(x, \varepsilon)$, $T(x, \varepsilon)$ und $B(x)$. Dabei beschreibt $A(x, \varepsilon)$ ein System aus gekoppelten linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\frac{d}{dx} \vec{F}(x, \varepsilon) = A(x, \varepsilon) \vec{F}(x, \varepsilon)$$

mit einem kleinen Störungsparameter ε . Bei $T(x, \varepsilon)$ handelt es sich um eine spezielle Transformation, die das Differentialgleichungssystem in eine sogenannte kanonische Form (auch ε -Form genannt) bringt

$$\frac{d}{dx} \vec{G}(x, \varepsilon) = \varepsilon B(x) \vec{G}(x, \varepsilon), \quad \text{mit } F(x, \varepsilon) = T(x, \varepsilon) G(x, \varepsilon),$$

bei der die ε -Abhängigkeit der Matrix trivial wird. Diese Matrizen müssen immer die Relation

$$\varepsilon B = T^{-1} \left(A T - \frac{d}{dx} T \right)$$

erfüllen. Überprüfen Sie dies explizit für die gegebenen Matrizen.

Hinweis: Hilfreiche MATHEMATICA-Befehle: `Inverse`, `Factor`, `D`.

5-Minuten-Aufgabe 9: Entwicklungen kontrollieren

Entwickeln Sie

$$(3 + 5 z^2 - 3 z^3) \text{ PolyLog}[3, (1 - \text{Sqrt}[z])/(2 + \text{Sqrt}[z])]$$

um $z = 0$ bis zur 2. Ordnung und kontrollieren Sie das Ergebnis grafisch, indem Sie den entwickelten Ausdruck sowie die ursprüngliche Formel für z -Werte zwischen 0 und 1 nebeneinander plotten.

5-Minuten-Aufgabe 10: Symbole aus Zeichenketten

Schreiben Sie eine Funktion `makeSymbols[s, max]`, die eine Liste der Symbole erzeugt, welche mit `s` beginnen und eine Zahl von 1 bis `max` beinhalten. So soll z.B.

```
makeSymbols[a, 5]
```

folgende Ausgabe erzeugen

```
{a1, a2, a3, a4, a5}
```

Hinweis: Hilfreiche MATHEMATICA-Befehle: `Symbol`, `ToExpression`, `ToString`, `StringJoin`, `Table`.

Aufgabe 3 (*): Harmonische Polylogarithmen (HPL)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f_3''(x) - \frac{2(2x^2 - 1)}{x(x^2 - 1)} f_3'(x) + \frac{4}{x^2 - 1} f_3(x) = \frac{\text{Li}_4(x)}{x(1-x)(1+x)}, \quad (1)$$

mit $\text{Li}_4(x) = \text{PolyLog}[4, x] = \text{HPL}[\{4\}, x]$, wobei die harmonischen Polylogarithmen in der Vorlesung eingeführt wurden. `PolyLog` ist eine in MATHEMATICA implementierte Funktion, wohingegen für die HPL's das Paket HPL (siehe Webseite zur Vorlesung und Vorlesungsbeispiel) geladen werden muss, um mit diesen arbeiten zu können. Die inhomogene Differentialgleichung in Gl. (1) kann nicht mehr mit Hilfe von `DSolve` bzw. elementaren Funktionen (in MATHEMATICA) gelöst werden.

Implementieren Sie in MATHEMATICA eine Routine, welche die Differentialgleichung in Gl. (1) analytisch löst. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Benutzen Sie Standard MATHEMATICA-Routinen, um die Lösungen der homogenen Differentialgleichung (d.h. ohne den Term auf der rechten Seite von Gl. (1)) zu erhalten.
- Finden Sie die partikuläre Lösung über die Variation der Konstanten (siehe Formelsammlung am Ende). Die Integrationen können mit dem HPL-Paket durchgeführt werden kann. Beachten Sie dabei, dass MATHEMATICA – auch mit Hilfe des Pakets HPL – nur in der Lage ist, die harmonischen Polylogarithmen in ihrer ‚Standardform‘ zu integrieren, wie z.B.:

```
Integrate[ HPL[{0,1,-1},x]/(1-x) , {x,0,xx}]
```

Um kompliziertere Terme zu integrieren, führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch und verwenden Sie Ersetzungsregeln der Form

```
HPL[n_,xx_]/(1+xx_) -> Integrate[ HPL[n,xx]/(1+xx) , {xx,0,x}]
```

- Überprüfen Sie, dass Ihre allgemeine Lösung mit generischen Integrationskonstanten die Differentialgleichung erfüllt. Benutzen Sie dann die Randbedingung $f_3(x) = 1 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{48}x^3 \ln(x) + \mathcal{O}(x^4)$, um die Integrationskonstanten zu fixieren. Beachten Sie, dass das HPL-Paket die Entwicklung einzelner harmonischer Polylogarithmen mit dem `Series`-Befehl bestimmen kann, allerdings nicht von zusammengesetzten Ausdrücken.
- Plotten Sie die Lösung in dem Bereich $0 < x < 1$.

Hinweis: Hilfreiche MATHEMATICA-Befehle: `Apart`, `Series`, `Table`, `DSolve`.

Formelsammlung

Bei einer Differentialgleichung der Ordnung n in der Form

$$f^{(n)}(x) + c_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots + c_0(x)f(x) = g(x)$$

mit den homogenen Lösungen $f_{h,(i)}$, $i = 1, \dots, m$ kann eine partikuläre Lösung über

$$f_p(x) = \sum_{i=1}^n f_{h,(i)}(x) \int^x dy \frac{g(y)W_i(y)}{W(y)}$$

mit

$$W(x) = \det \left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} f_{h,(m)}(x) \right), \quad k = 0, \dots, n-1, \quad m = 1, \dots, n,$$
$$W_i(x) = (-1)^{i+n} \det \left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} f_{h,(m)}(x) \right), \quad k = 0, \dots, n-2, \quad m \neq i,$$

bestimmt werden.