# Rechnernutzung in der Physik

Institut für Experimentelle Teilchenphysik
Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. G. Quast, Prof. Dr. M. Steinhauser
Dr. A. Mildenberger, Dr. Th. Chwalek, Dr. M. Vitti

WS2023/24 – **Blatt 9**
Besprechung am 29./30.01.2024

---

## 5-Minuten-Aufgabe 11: Spalten vertauschen

Schreiben Sie eine Funktion `columnSwitch[mat,i,j]`, welche bei der gegebenen Matrix `mat` die $i$. und $j$. Spalten vertauscht. Die Matrix darf dabei beliebig groß sein. Überprüfen Sie Ihre Routine an der folgenden Testmatrix

```
testmatrix = Table[C[i][j],{i,1,n},{j,1,n}]
```

wobei $n$ als positive ganze Zahl gesetzt werden muss.

*Hinweis*: Hilfreiche MATHEMATICA-Befehle: `Transpose`, `[[;;]]`.

## 5-Minuten-Aufgabe 12: Lineare Gleichungen

Betrachten Sie folgende Liste von Ersetzungsregeln

```
{b1 -> (32 - c2)/16, c1 -> (-160 + 48*b1 + 3*c2)/2,
c2 -> -2*(144 + 8*b1 + 8*b2 - c1 + 2*d1),
x1 -> -18/5 + (3*b1)/5 - c1/20 + c2/16 - d2/20,
0 -> 2 - 2*b1 + c1/8 - (3*c2)/16, x2 -> 2 - b1 - c2/16}
```

Dabei handelt es sich um ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem. Transformieren Sie die Liste zunächst so, dass aus Ersetzungsregeln Gleichungen werden, d.h. -> muss durch == ersetzt werden. Zeigen Sie anschließend, dass das Gleichungssystem für $x_1 = x_2 = x$ und $b_1 = b_2 = b$ eine eindeutige Lösung besitzt und geben Sie diese an.

*Hinweis*: Hilfreiche MATHEMATICA-Befehle: `Rule`, `Equal`, `Solve`

---

## Pflichtaufgabe 4: Gauß-Integration

Gegeben sei ein Satz von Orthonormalpolynomen $P_i(x)$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) mit dazugehöriger Gewichtsfunktion $\omega(x)$. Schreiben Sie eine Routine, die mit Hilfe von $P_n(x)$ und $P_{n-1}(x)$ eine Approximation des Integrals

$$F = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

berechnet. Dabei geht man folgendermaßen vor (siehe auch Vorlesung): In einem ersten Schritt muss dabei das Intervall $[a, b]$ in den Geltungsbereich $I$ der Orthonormalpolynome transformiert werden. Danach spaltet man $\omega$ von $f$ ab, um schließlich die Integrationsformel

$$\int_I \tilde{f}(u)\omega(u)\,\mathrm{d}u \approx \sum_{k=1}^{n} G_k \tilde{f}(x_k)$$

benutzen zu können. Dabei sind die $x_k$ die Nullstellen von $P_n(x)$ und $G_k$ ist gegeben durch

$$G_k = \frac{a_n}{a_{n-1} P_n'(x_k) P_{n-1}(x_k)},$$

wobei $P_n(x) = a_n x^n + \ldots$ und $P_{n-1}(x) = a_{n-1} x^{n-1} + \ldots$.

(a) Implementieren Sie obigen Algorithmus und testen Sie Ihre Routine für

  (i) $f_1(x) = \ln\left(e^{-(x-2)^2} + e^{-(x+2)^2}\right)$ mit $a = -10$, $b = 10$ und

  (ii) $f_2(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x}}$ mit $a = 0$, $b = 1$.

  Verwenden Sie dabei Legendre-Polynome. Stellen Sie jeweils die Ergebnisse der Gauß-Routine und von `NIntegrate[]` in Abhängigkeit von $n$ zwischen 2 und 8 graphisch dar.

(b) Benutzen Sie Laguerre-Polynome, um die Funktion

$$f_3(x) = e^{-x^2} \frac{\tanh(\sin^2(x))}{1 + x^2}$$

  über $[0, \infty)$ zu integrieren.

(c) In dem File `ortho.m` finden Sie die Orthonormalpolynome zur Gewichtsfunktion $\omega(x) = e^{-x^2}/(1 + x^2)$ und dem Intervall $[0, \infty)$. Benutzen Sie diese, um das Integral über $f_3(x)$ zu berechnen. Stellen Sie die Ergebnisse zusammen mit denjenigen von (b) und `NIntegrate[]` für $n = 2, \ldots, 8$ graphisch dar.

*Hinweis*: Hilfreiche MATHEMATICA-Befehle: `LegendreP`, `LaguerreL`, `Coefficient`, `D`, `NSolve`, `Sum`, `Table`, `ListPlot`, `Get` («). Beachten Sie, dass die schon implementierten orthogonalen Polynome noch normiert werden müssen.