Block 3:

Statistische Methoden der Datenanalyse

- Einführung
- Wahrscheinlichkeit
- diskrete und kontinuierliche Verteilungen

- Varianz und Kovarianzmatrix
- Variablentransformation
- Fehlerfortpflanzung

- Monte-Carlo-Methode

- Parameterschätzung

- Hypothesentests und Klassifikation

Statistische Methoden der Datenanalyse - Literatur

V. Blobel, E. Lohrmann "Statistische und numerische Methoden der Datenanalyse", Teubner, Stuttgart 1998

G. Cowan "Statistical Data Analysis", Clarendon, Oxford, 1998

R.J. Barlow "Statistics", Wiley1989

D.S. Sivia "Data Analysis" – A Bayesian Tutorial, Clarendon, Oxford 1996

G. Bohm u. G. Zech, "Einführung in Statistik und Messdatenanalyse für Physiker", DESY, Hamburg 2005,e-book
http://www-library.desy.de/preparch/books/vstatmp.pdf

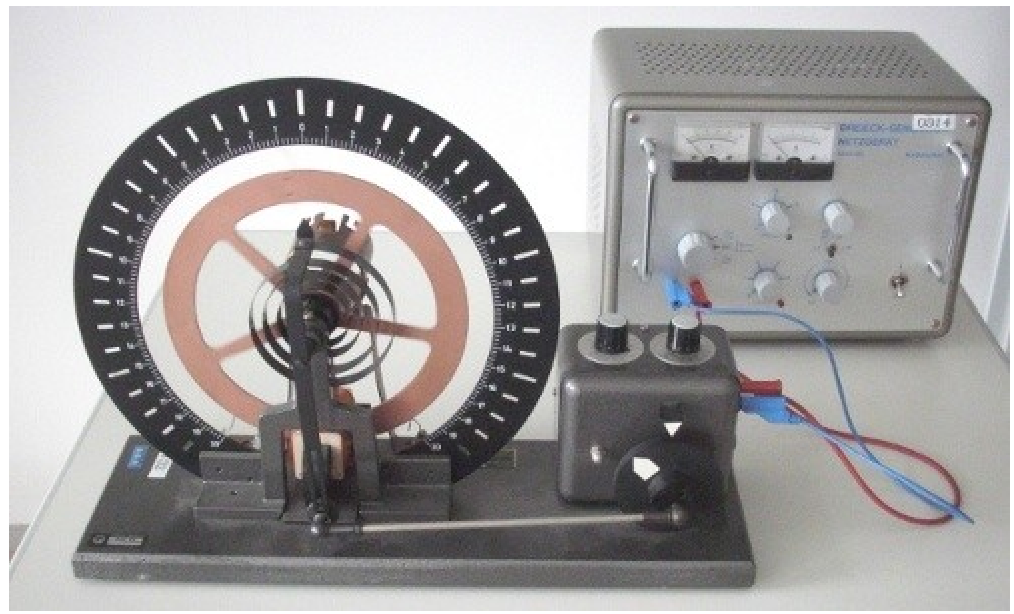
+ viele mehr, z.B. S. Brandt, "Datenanaylse" , Springer (recht mathematisch)

Vorhersehbar

Einfache (klassische) physikalische Prozesse:

Ergebnis exakt vorhersagbar

- Ursache erzeugt eine eindeutige Wirkung,
- Determinismus



Beispiele hierfür sind:

- Pendel
- Planetenbahnen,
- Billard
- Elektromagnetismus…

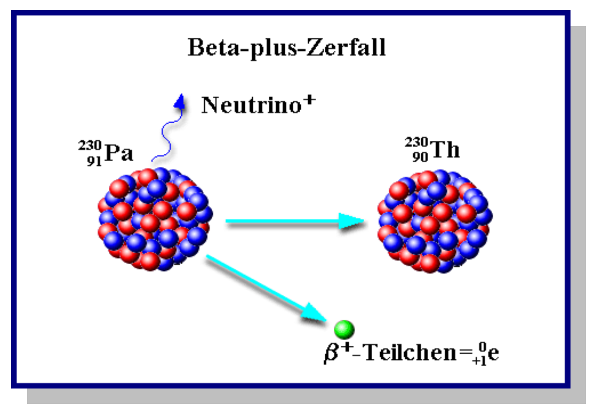
Zufall

Rein zufällige Ereignisse sind prinzipiell nicht vorhersagbar

(auch bei genauer Kenntnis der Ausgangssituation!)

Beispiele hierfür sind:

- Lottozahlen (zu viele Einflussgrößen, determi-nistisches Chaos)
- radioaktiver Zerfall (Quantenmechanik)
- Elektronisches Rauschen
- Meßfehler und apparative Auflösung



Zufall in der Physik !?

Schon in der klassischen Physik:

- Einfluss unkontrollierbarer Größen (Ablesegenauigkeit, Fertigungsgenauigkeit von Messgeräten, „Rauschen“ usw.) wird als „Messfehler“ statistisch behandelt

- in Vielteilchensystemen: statistische Mechanik betrachtet Eigenschaften von Verteilungen statt (Energie, Impuls usw.) statt aller Koordinaten von Teilchen

In der Quantenphysik:

- Vorhergesagt werden Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Observablen

  → nur statistische Aussagen

  z.B. „ mittlere Lebensdauer eines Zustands“ oder „ Erwartungswert des Aufenthaltsortes“

Viele Systeme:

Mischung aus vorhersagbarer Komponente und Zufallskomponente.

→ Wahrscheinlichkeitsaussage, Statistik.

Ziel: Extraktion der vorhersagbaren Komponente

Überprüfung von physikalischen Modellen

Physik beschreibt die Wirklichkeit mit (theoretischen) Modellen

- Modellvorhersagen enthalten Näherungen und numerische Fehler
- Überprüfung der Modelle durch Experimente (=fehlerbehaftete Messungen)
- fast immer existier(t)en alternative Modelle

(das ist immer so an der vordersten Front der physikalischen Forschung)

Vergleich von Theorie (=Modell) und Experiment erfordert statistische Methoden

z.B.: linearer Zusammenhang ? Wenn ja: Steigung bestimmen!
Wenn nein: Modell falsch, Steigung irrelevant!

(in unseren Praktika wird die erste Frage leider fast immer ausgeblendet)

Ziel: 1. <u>Hypothesentest:</u> stimmt das Modell
2. Bestimmung von Modellparametern

Zufall und statistische Methoden anderswo

- Medizin: Wirksamkeit von Therapien und Medikamenten
- Umfragen: Wähler-, Kunden-, Studentenbefragungen o.Ä.
- Qualitätssicherung in der Produktion
- Risikobewertung bei Versicherungen
- Angebotsplanung im Handel
- Glücksspiel
- Aktienmarkt und Kursentwicklung

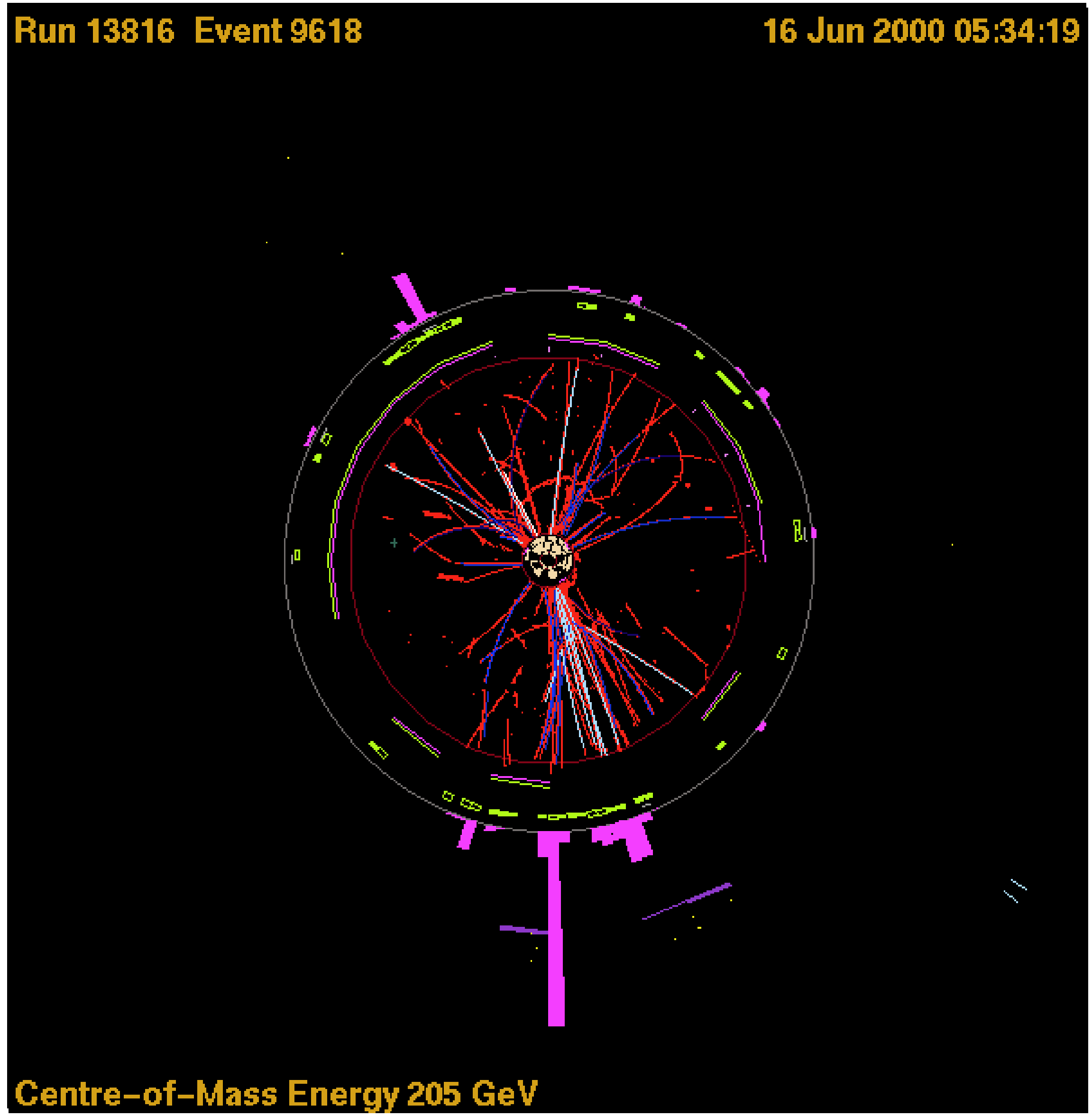
sowie viele, viele andere Beispiele

Statistik: Einführung

Quantenmechanik:

jedes Mal passiert
etwas anderes!

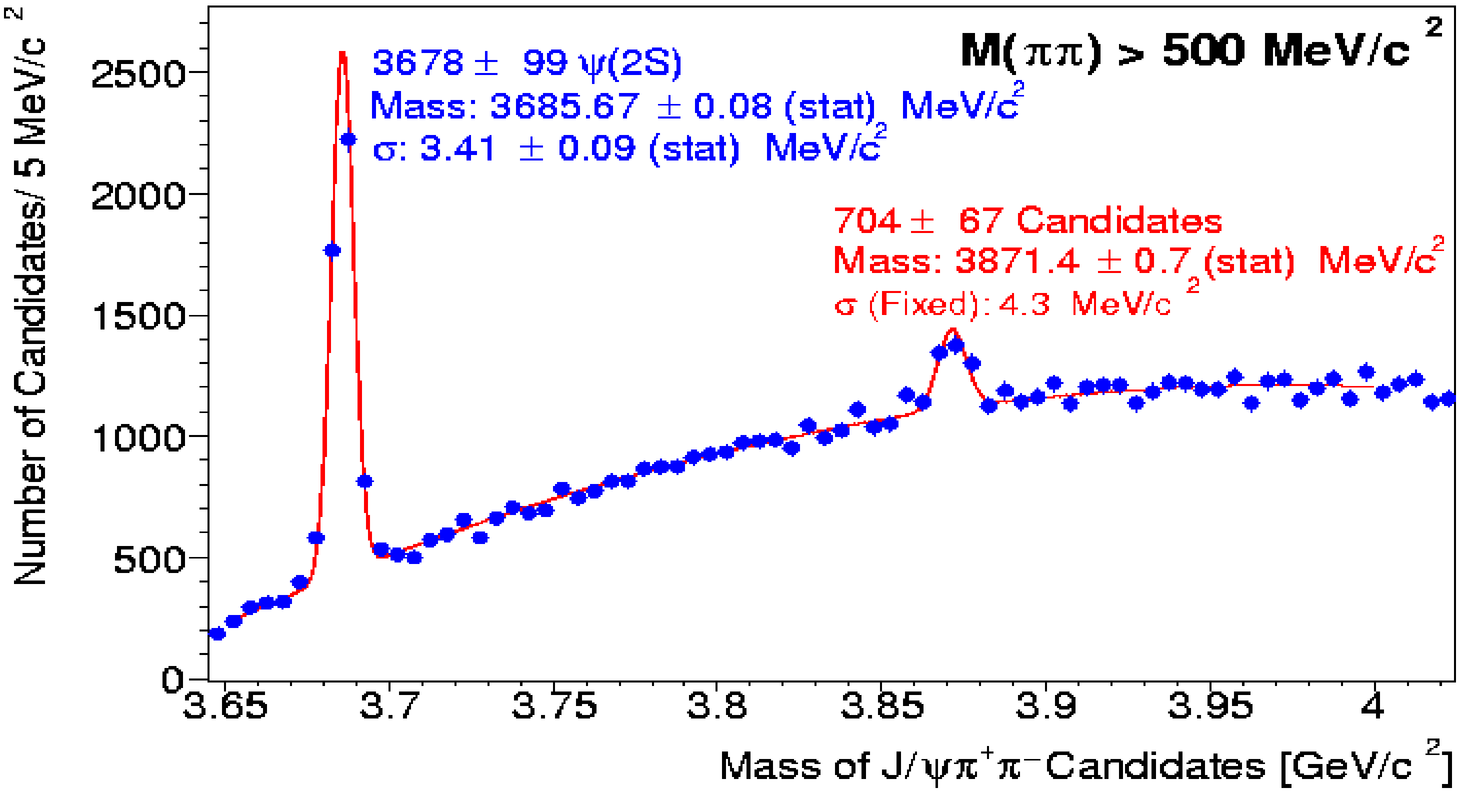
OPAL Experiment am LEP



e^+e^- - Kollisionen im Opal-Experiment am LEP-Collider

Statistik: Einführung

Experiment: Messe Häufigkeitsverteilungen



Fehlerbehaftete Messdaten und **Parameter-abhängiges Modell**

Zahl der beobachten Ereignisse mit einer invarianten Masse in einem bestimmten Intervall ist ein **Zufallsereignis**

Statistik: Einführung

(Zufalls-)Ereignis im Sinne der Statistik:

durch spezifische Eigenschaften definiertes Ergebnis eines Prozesses

Beispiele:

- eine „3“ würfeln
- ein Tor fällt in den ersten fünf Minuten eines Fußballspiels
- beim Angeln einen Hecht fangen
- eine „2“ und dann eine „5“ würfeln
- eine Zahl größer als „3“ würfeln
- Messung eines Werts für *e* zwischen $1.60 \cdot 10^{-19}$ C und $1.61 \cdot 10^{-19}$C

Kompatible Ereignisse:

- eine gewürfelte Zahl ist „>3“ **und** „5“ („>3“ $\cap$ „5“)
- eine Karte aus einem Kartenspiel ist rot **und** ein As „rot“ („rot“ $\cap$ „As“)
- eine Karte ist ein As **oder** eine Dame („As“ U „Dame“)
- Karte ist As oder kein As (gilt für beliebige, d.h. alle Karten!)

Exklusive Ereignisse:

- „3“ und gleichzeitig „5“ würfeln
- eine Karte ist ein As **und** eine Dame (gilt für keine Karte)

Wahrscheinlichkeit

Definition Wahrscheinlichkeit

Frequentist-Wahrscheinlichkeit = „objektive” Definition

für beliebig wiederholbare Ereignisse oder bei Vohandensein von Symmetrien anwendbar

auch „Klassische Statistik“ genannt

Bayes-Wahrscheinlichkeit = „subjektive´´ Definition

auch für einmalige Ereignisse anwendbar

Streit der Schulen zwischen **Frequentisten** und **Bayesianern** bis heute

Physiker nehmen meist einen pragmatischen Standpunkt ein –

Anwendung “hybrider” Verfahren

Frequentist-Definitionen von Wahrscheinlichkeit

Kombinatorische Definition:

Wenn ein Ereignis in n verschiedenen Arten auftreten kann, die alle gleiche Wahrscheinlichkeit haben, und wenn k Ereignisse davon die Eigenschaft A aufweisen, ist die Wahrscheinlichkeit für A: $P(A) = k/n$

Empirische Definition:

Eine Beobachtung ist unter identischen Bedingungen unabhängig voneinander n mal wiederholt.
Wenn Eigenschaft A dabei k mal beobachtet wird, ist das Verhältnis k/n die empirische Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit P(A) wird definiert als der Grenzwert für unendlich viele Beobachtungen n.

Beide Definitionen können kritisiert werden:

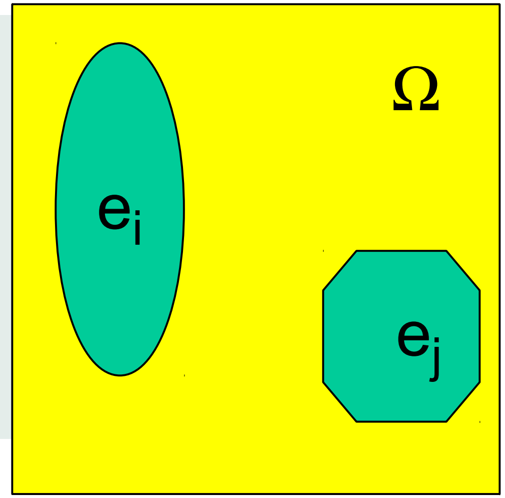
Kombinatorisch: Schlange, die sich in den Schwanz beisst.
Empirisch: Grenzwert kann in der Praxis nie erreicht werden.

Formale Definition von Wahrscheinlichkeit: Kolmogorov-Axiome (1931)

Betrachte Elementarereignisse e_i

Elementary events e_i are considered, which *exclude* each other:

$$\begin{aligned} e_i &= \text{elementary event} \\ \Omega &= \text{set of all elementary events} \\ P(e_i) &= \text{probability of event } e_i \end{aligned}$$

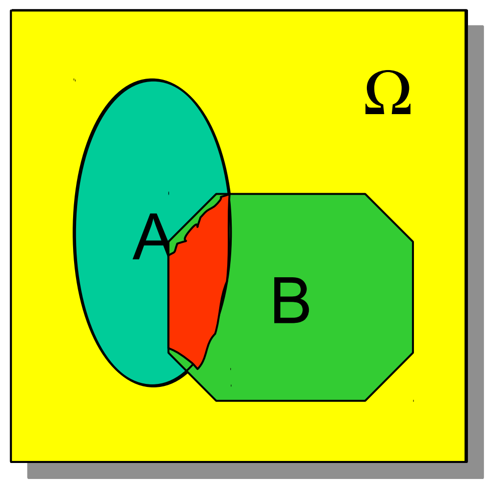


1. $P(e_i) \geq 0$ for all i — positiv
2. $P(e_i \vee e_j) = P(e_i) + P(e_j) \quad (\vee = \text{or})$ — additiv
3. $\sum_\Omega P(e_i) = 1$ — normiert

Kombination von Wahrscheinlichkeiten

$P(\mathcal{A} \text{ or } \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) - P(\mathcal{A} \text{ and } \mathcal{B})$	$\mathcal{A}$ or $\mathcal{B}$
$P(\mathcal{A} \text{ and } \mathcal{B}) = 0$	if $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ exclude each other
$P(\mathcal{A} \text{ or } \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B})$	if $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ exclude each other
$P(\mathcal{A} \text{ or } \overline{\mathcal{A}}) = P(\mathcal{A}) + P(\overline{\mathcal{A}}) = 1$	$(\overline{\mathcal{A}} = \text{not } \mathcal{A})$
$P(\mathcal{A} \text{ and } \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) \cdot P(\mathcal{B}\|\mathcal{A}) = P(\mathcal{B}) \cdot P(\mathcal{A}\|\mathcal{B})$	$\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$
$P(\mathcal{A} \text{ and } \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) \cdot P(\mathcal{B})$	if $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ independent

Bedingte Wahrscheinlichkeit, dass A wahr ist, wenn B wahr ist.



Bayes'sche Definition von Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit ist der Grad des Glaubens, dass ein Experiment ein bestimmtes Ergebnis haben wird.

- Subjektive Wahrscheinlichkeit -
(erfüllt Kolmogorov-Axiome !)

Reverend Thomas Bayes (1702 – 1761)

Essay "Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances" (1763), posthum veröffentlicht in *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.*

Frequenz-Aussagen oft nicht möglich.

Dann ist Bayes- Interpretation die einzig mögliche:

Wahrscheinlichkeit ist der Grad des Glaubens, dass eine Aussage zutrifft.

Beispiele für Bayes-Wahrscheinlichkeit:

- das Teilchen in diesem Ereignis ist ein Positron.
- die Natur ist supersymmetrisch.
- es wird morgen regnen.
- Deutschland wird 2014 Fußball-Weltmeister.
- es hat am 8. März 1792 in Kairo geregnet.

Oft kritisiert, weil „subjektiv‘‘ und „unwissenschaftlich‘‘.
Beruht jedoch auf einfacher Wahrscheinlichkeitsrechnung und ist – richtig angewendet – nicht im Widerspruch zu Frequentist-Ansatz.

Bayes' Theorem:

Bedingte (conditional) Wahrscheinlichkeiten:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Wegen $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ gilt:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\, P(A)}{P(B)}$$

BayesTheorem

Statistik: Wahrscheinlichkeit, Bayes' Theorem (2)

Besonders wichtig durch die Interpretation

A: Richtigkeit einer Theorie

B: Wahrscheinlichkeit der Beobachtung bestimmter Daten

$$\underbrace{P(Theorie|Daten)}_{\text{„Posterior“}} = \frac{\overbrace{P(Daten|Theorie)}^{\text{„Likelihood“}}\overbrace{P(Theorie)}^{\text{„Prior“}}}{\underbrace{P(Daten)}_{\text{„Evidenz“}}}$$

P(Theorie | Daten) Wahrscheinlichkeit, dass die Theorie stimmt, wenn bestimmte Daten beobachtet wurden

P(Daten | Theorie) Wahrscheinlichkeit, bestimmte Daten zu beobachten, wenn die Theorie stimmt

Interessant ist die erste Frage, häufig wird jedoch nur die zweite beantwortet!

Statistik: Wahrscheinlichkeit, Bayes' Theorem (3)

Bsp: AIDS-Test

Wahrscheinlichkeit in allgemeiner Bevölkerung:

$$P(\text{AIDS}) = 0.001$$
$$P(\text{no AIDS}) = 0.999$$

a priori-Wissen

Ziemlich zuverlässiger AIDS-Test (Resultat + oder -):

$$P(+|\text{AIDS}) = 0.98$$
$$P(-|\text{AIDS}) = 0.02$$

$$P(+|\text{no AIDS}) = 0.03$$
$$P(-|\text{no AIDS}) = 0.97$$

Messung, Likelihoods

Wie besorgt sollte man sein, wenn man ein positives Testresultat hat?
d.h. wie groß ist (die posteriori-Wahrscheinlichkeit) P(AIDS|+) ?

Bsp.: AIDS-Test (2)

$$P(\mathrm{AIDS}|+) = \frac{P(+|\mathrm{AIDS})\, P(\mathrm{AIDS})}{P(+|\mathrm{AIDS})\, P(\mathrm{AIDS}) + P(+|\text{no AIDS})\, P(\text{no AIDS})}$$

$$= \frac{0.98 \times 0.001}{0.98 \times 0.001 \, + \, 0.03 \times 0.999}$$

$$= 0.032$$

Die Posterior-Wahrscheinlichkeit P(AIDS|+) beträgt nur 3,2%!

Warum? Wegen der kleinen Prior-Wahrscheinlichkeit von 0.01% und der nicht vernachlässigbaren Mißidentifikationswahrscheinlichkeit!

Vorsicht: Prior nicht richtig, wenn man zu einer Risikogruppe gehört!

Bayes'sche vs. klassische Statistik

Klassische Statistik (basierend auf Maximieren derLikelihood) ist nur Sonderfall der Bayes-Statistik:

„Likelihood“ „Prior“

$$P(Theorie|Daten) = \frac{P(Daten|Theorie)P(Theorie)}{P(Daten)}$$

„Posterior“ „Evidenz“

Maximieren der Likelihood **statt der a posteriori-Wahrscheinlichkeit** heisst:
Implizite Annahme, dass die Prior-Wahscheinlichkeit flach verteilt ist, d.h. jeder Wert ist gleich wahrscheinlich.

Hört sich vernünftig an, ist aber oft falsch!
Heisst nicht, dass man nichts weiss!

Nicht-informativer Prior

Wenn man über eine dimensionsbehaftete Größe x nichts (nicht einmal die Größenordnung) weiss, dann ist

$$f(x) = \text{const.} \qquad \text{FALSCH!}$$

Vielmehr ist

$$f(ln(x)) = \text{const.} \qquad \text{RICHTIG!}$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$f(x) \propto 1/x.$$

Bradfordsche Zahlengesetz: Die Ziffer 1 ist viel öfter die signifikanteste Ziffer einer Zahl als die 9. Wie auf logarithmischer Skala. Übrigens: Finanzamt weiss Bescheid: Steuererklärungen richtig fälschen!

Verteilungen von Zufallsgrößen:

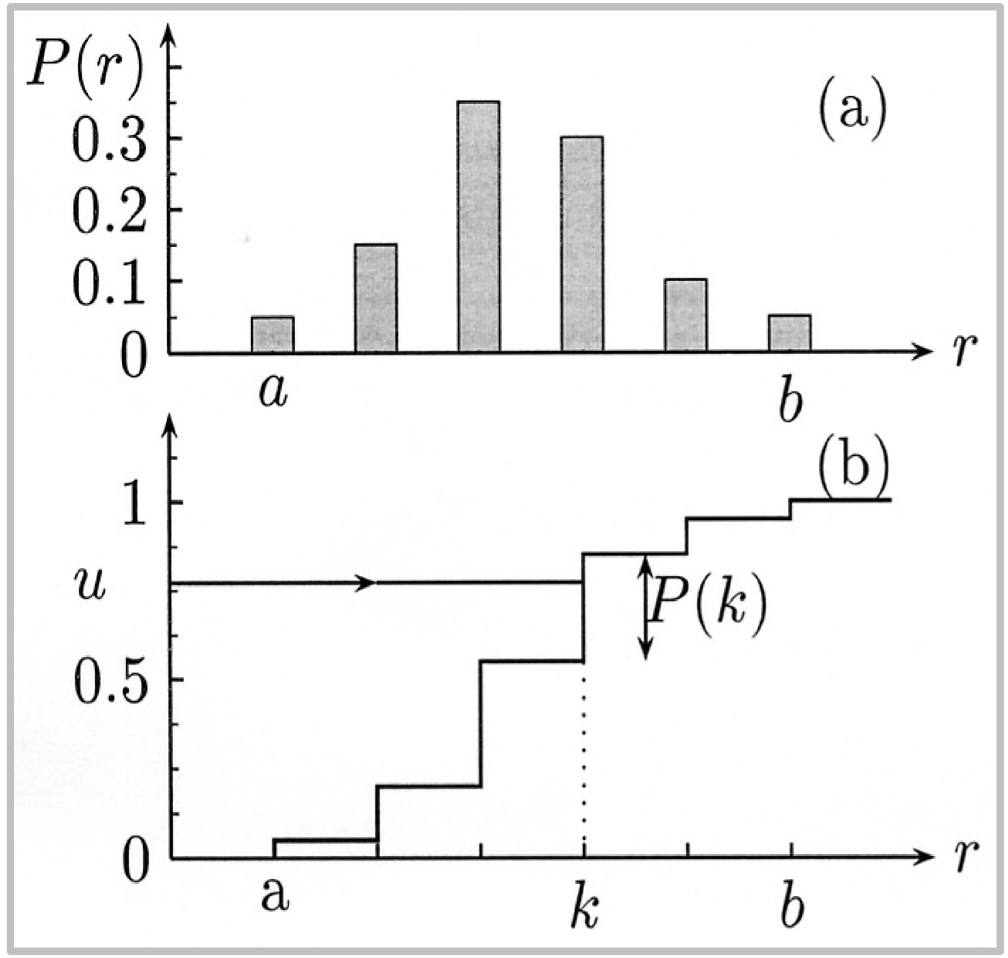
Wahrscheinlichkeitsverteilungen
und
Wahrscheinlichkeitsdichten

Kumulative Verteilungen

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **diskrete** Zufallszahl k kann eine endliche oder unendliche Anzahl von Werten k_i mit $i=a, a+1, \ldots, b$ annehmen. Die Wahrscheinlichkeit für den Wert k_i ist $P(k_i)$ und erfüllt die Normierungsbedingung

$$\boxed{\sum_{\text{alle } i} P(k_i) = 1}$$

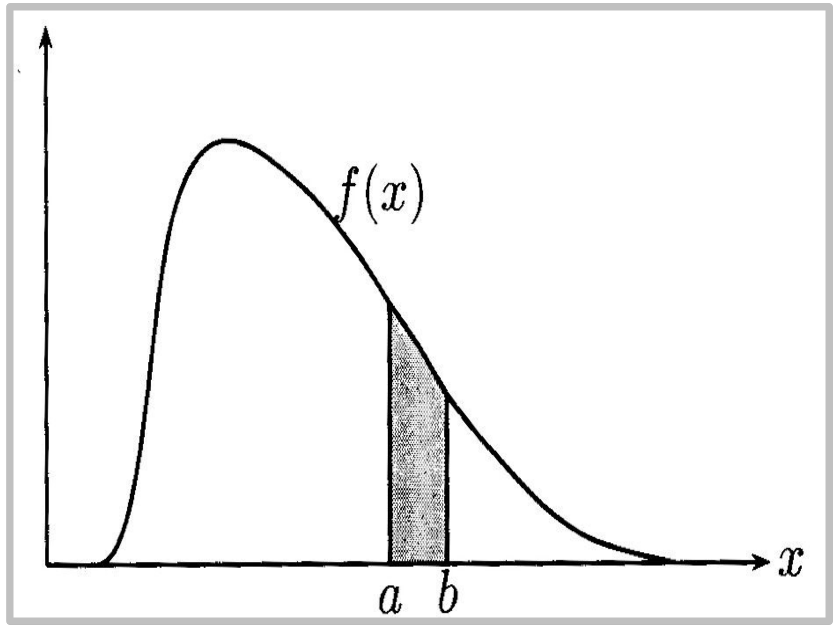


Kumulierte Verteilungsfunktion
= Wahrscheinlichkeit, einen Wert k_i oder kleiner zu beobachten.

Wahrscheinlichkeitsdichte

Eine **kontinuierliche** Zufallsvariable kann relle Werte annehmen. Die Wahrscheinlichkeit, das x in das *Intervall* $a \leq x < b$ fällt, ist

$$\boxed{P(a \leq x < b) = \int_a^b f(x)dx}$$



dabei ist f(x) die **Wahrscheinlichkeitsdichte** ***(probability density function, pdf)*** der Zufallsvariablen x; die Dichte ist nicht-negativ und auf 1 normiert:

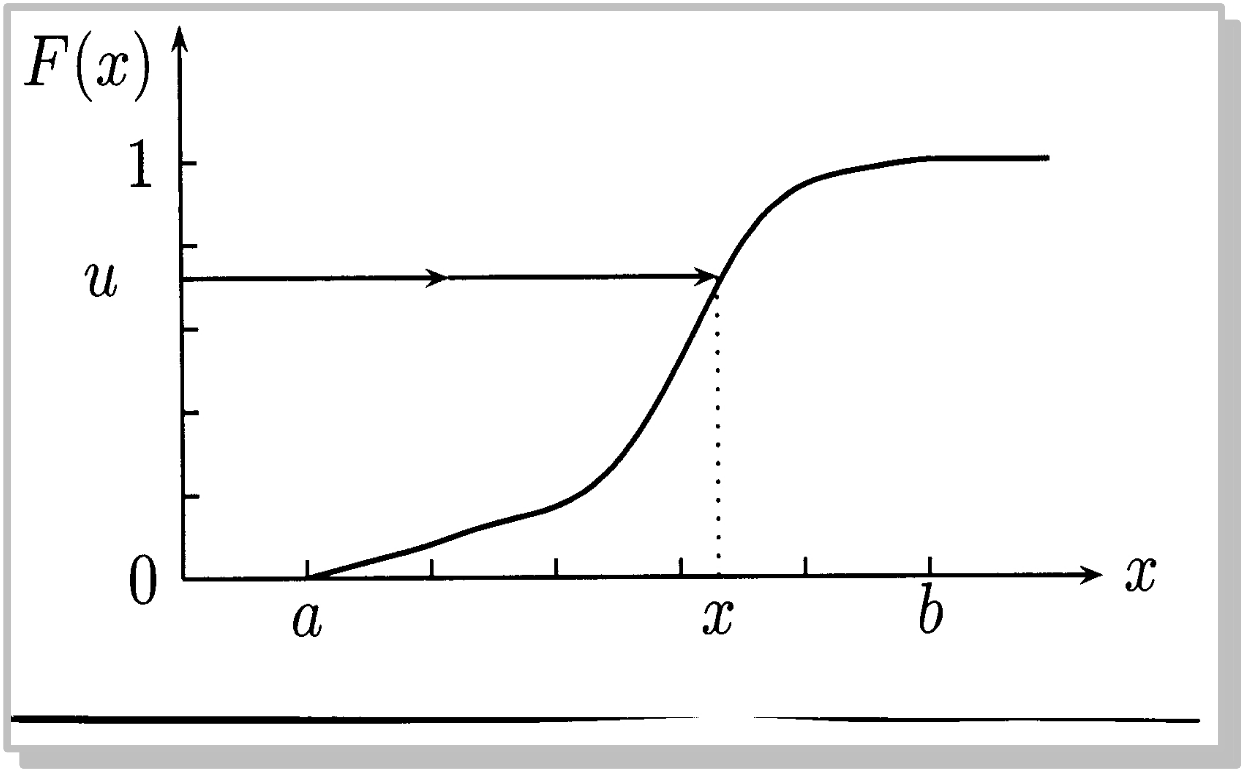
$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \end{array}}$$

Verteilungsfunktion

Die **Verteilungsfunktion** (*(cumulative) distribution function, cdf*)
F(x) ist die Wahrscheinlichkeit, einen kleineren Wert als x zu finden:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')dx'}$$

mit $F(-\infty)=0$ und $F(+\infty)=1$



Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist also die Ableitung der Verteilungsfunktion:

$$\boxed{f(x) = \frac{dF(x)}{dx}}$$

Erwartungswert und Varianz

Der **Erwartungswert** einer Funktion h(x) einer Zufallsvariablen mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f(x) bzw. Wahrscheinlichkeit P(x_i) ist definiert durch:

$$\mathrm{E}[h] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx \qquad \mathrm{E}[h] = \sum_{\text{alle } i} h(x_i) P(x_i)$$

Wichtige Spezialfälle: a) h(x)=x: **Erwartungswert (auch Mittelwert)**

$$\underline{\mathrm{E}[x]} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx = \underline{\langle x \rangle = \overline{x}} \qquad \mathrm{E}[x] = \sum_{\text{alle } i} x_i\, P(x_i) = \underline{\langle x \rangle = \overline{x}}$$

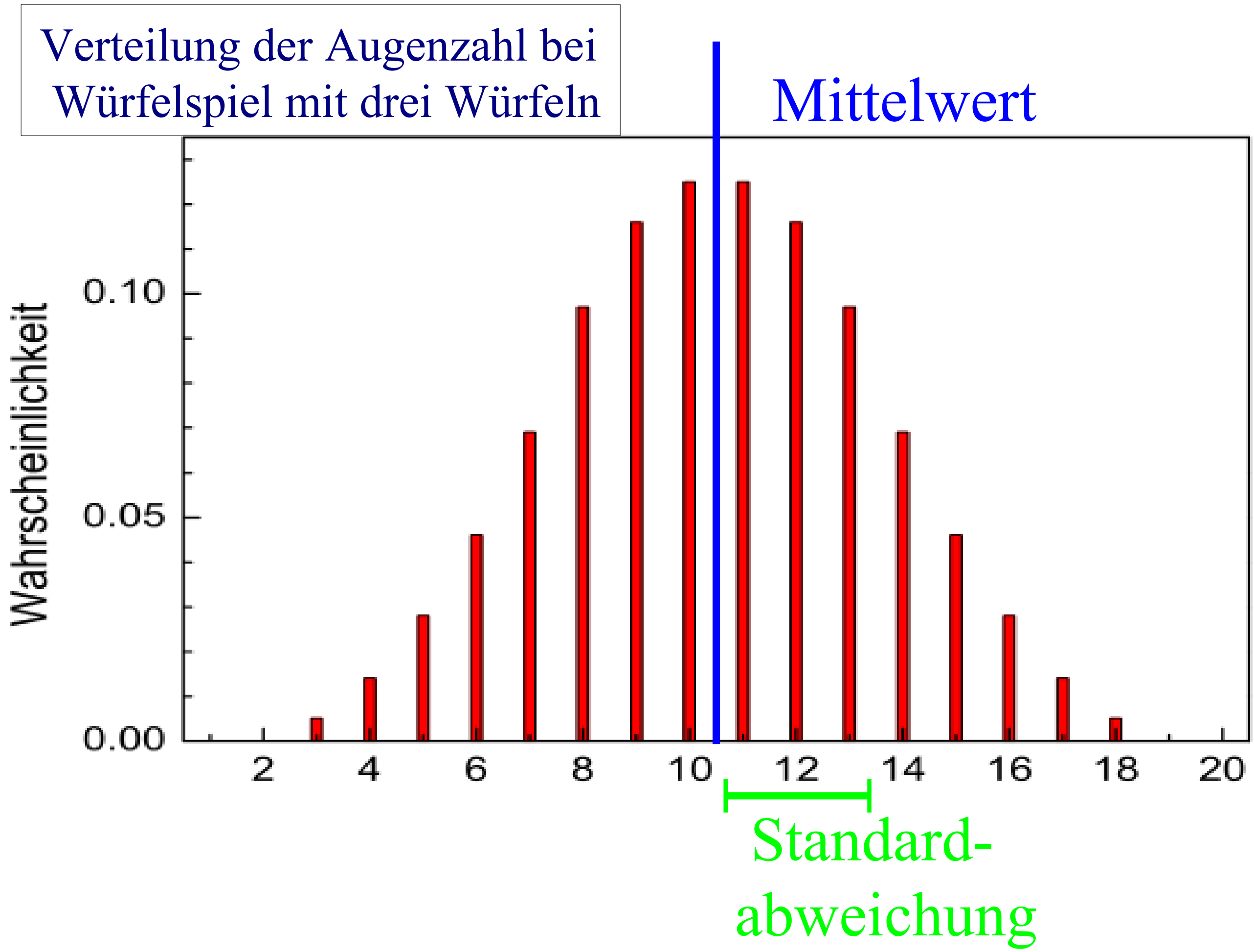
b) **Varianz**

$$\mathrm{V}[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x) dx \qquad \mathrm{V}[x] = \sum_{\text{alle } i} (x_i - \langle x \rangle)^2 P(x_i)$$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V}$

Zufallsgrößen: Beispiel Mittelwert und Varianz

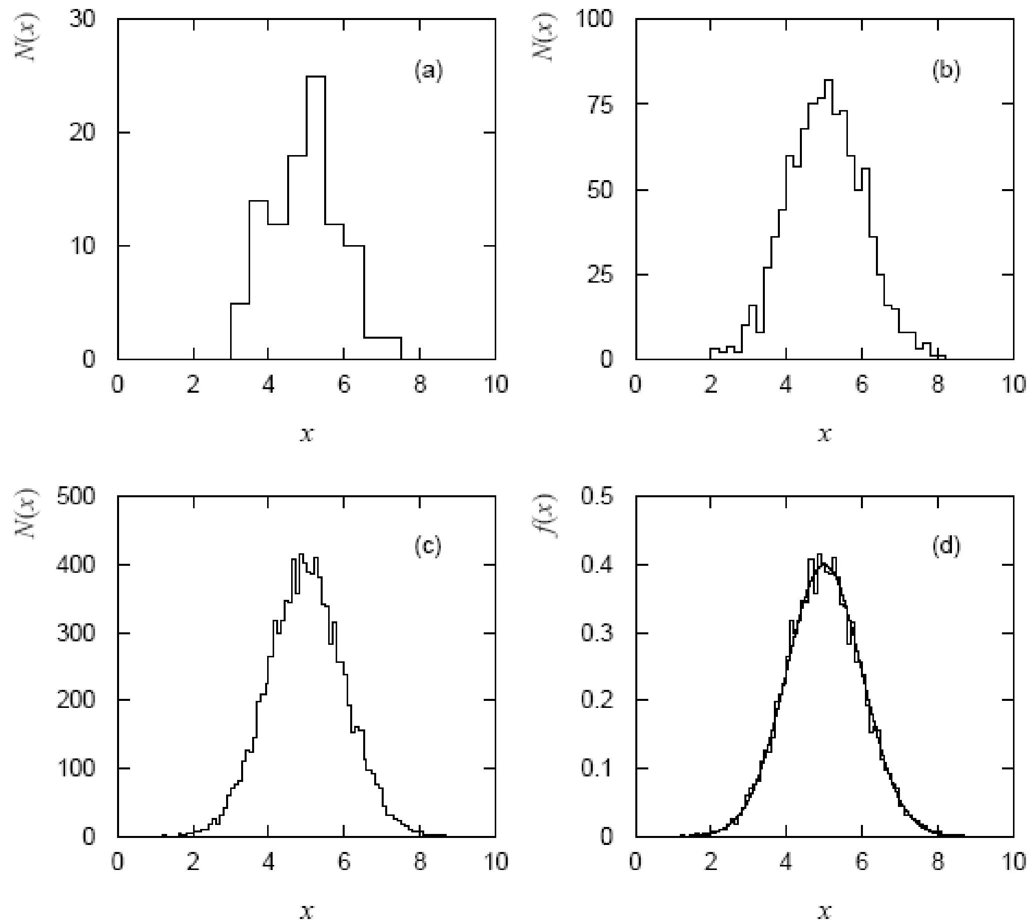
Mittelwert: „Position“ der Verteilung
Standardabweichung: „Breite“ der Verteilung



Histogramme

Häufigkeitsverteilung:
Anzahl Ereignisse in endlichen Intervallen (*Bins*)

Wahrscheinlichkeitsdichte
f(x) = Histogramm mit
- undenlicher Statatistik;
- Bin-Breite 0,
- normiert auf Fläche 1

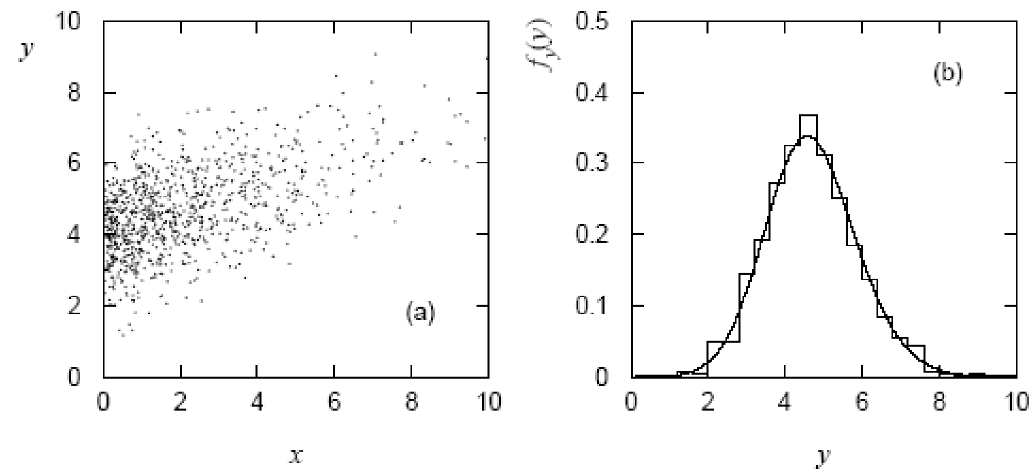


Mittelwert („mean"): $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$,

Standardabweichung („RMS" in Root): $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$

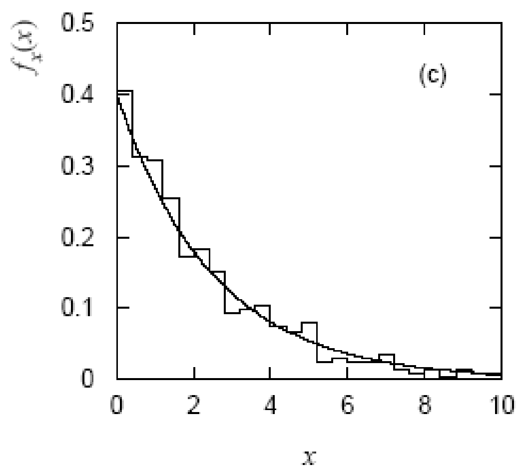
Mehrdimensionale Zufallszahlen

Darstellung einer 2-dimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichte f(x,y) als Punktewolke (*scatter plot*)



Normierungsbedingung:

$$\int \int f(x,y)dxdy = 1$$



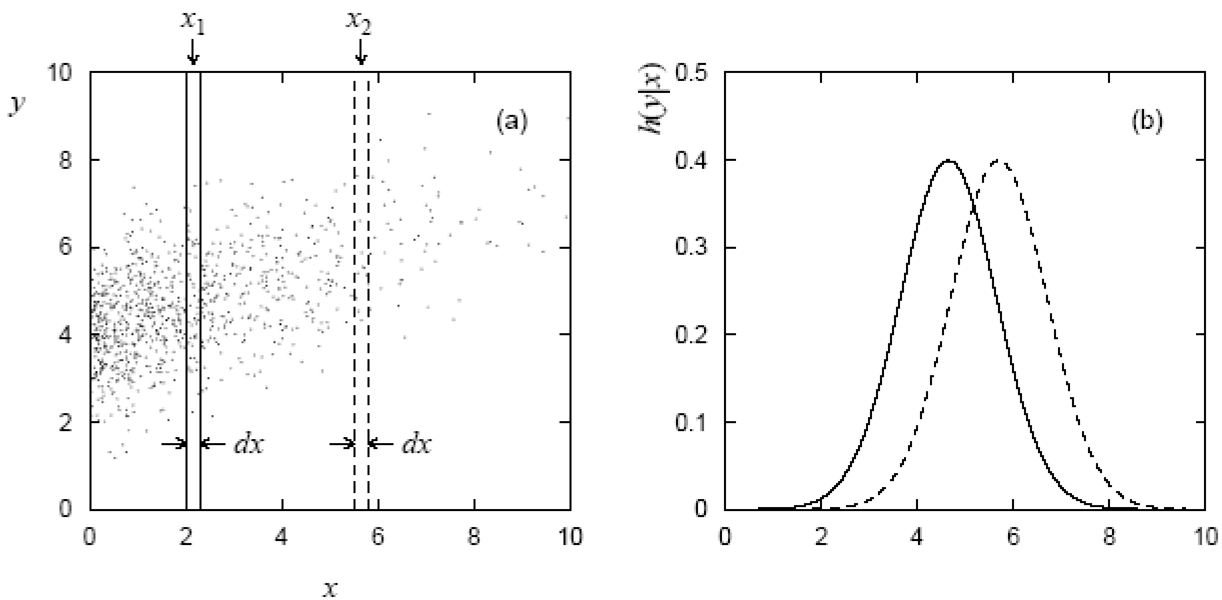
Randverteilungen
= Projektionen auf Achsen

$$f_x(x) = \int f(x,y)\,dy$$

$$f_y(y) = \int f(x,y)\,dx$$

Lässt sich leicht auf n Dimensionen erweitern;
in ROOT: Klassen `TH1`, `TH2` und `TH3`

Mehrdimensionale Zufallszahlen (2)



Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $h(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_x(x)}$ Wahrscheinlichkeitsdichte für y falls x bekannt

Bedingte Wahrscheinlichkeit für Y unter der Bedingung das X bekannt ist:

$$P(y \leq Y < y + dy \,|\, x \leq X < x + dx) \;=\; h(y|x)dy$$

Grundlegende Verteilungen

Binomialverteilung (1)

Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung eines bestimmten Ereignisses ist p.
Was ist die Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen k solcher Ereignisse zu beobachten ?

z.B.
- bei 10 Versuchen 3 mal eine 6 würfeln.
- bei 100 Einträgen in einem Histogramm 10 Einträge im ersten Bin

Binomialverteilung

$$\boxed{P(k;n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , k = 1, \ldots, n}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ist die Anzahl der Kombinationen, k aus N Elementen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen („Binomialkoeffizient")

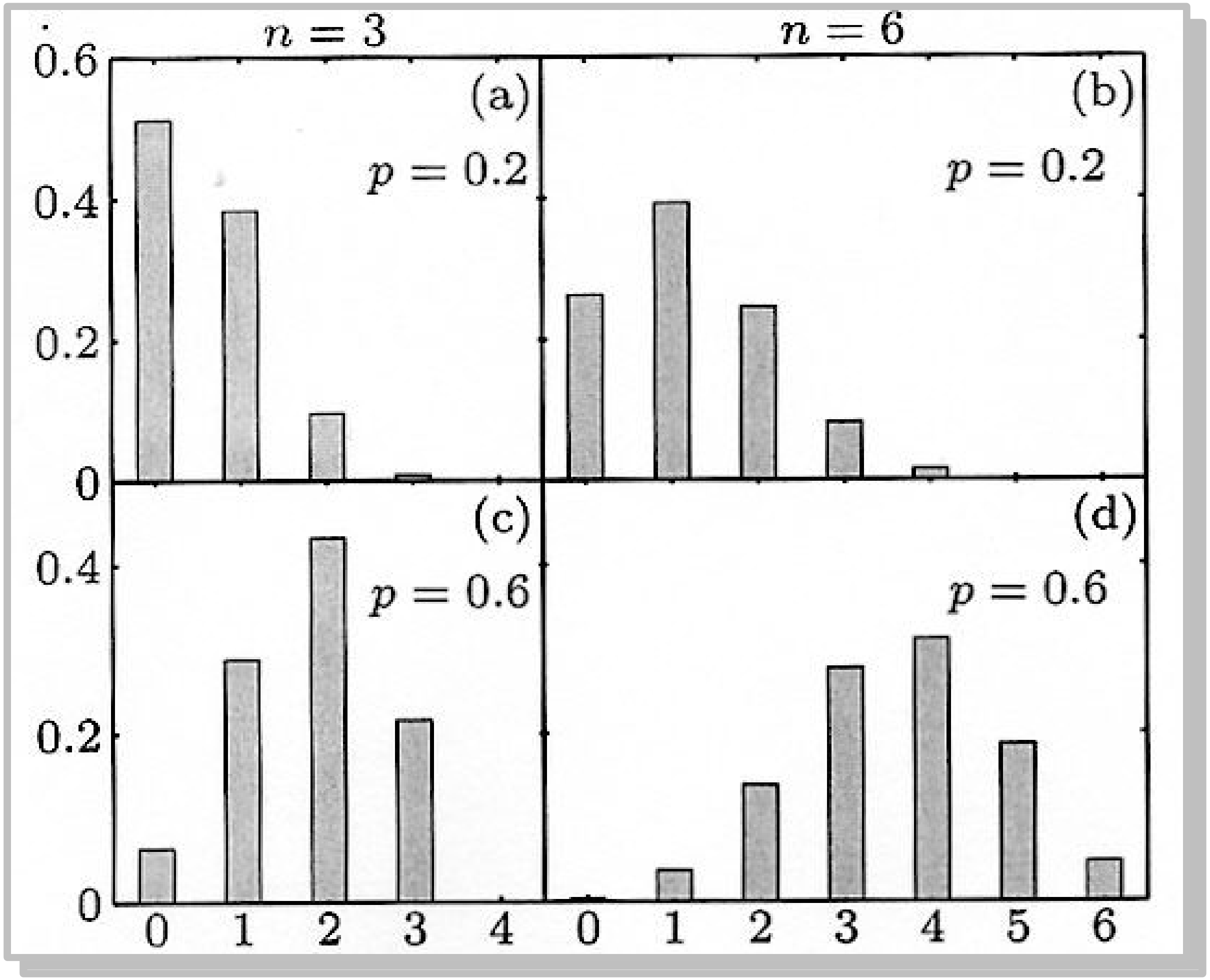
Erwartungswert $\boxed{\mathrm{E}[k] = np}$

Varianz $\boxed{\mathrm{V}[k] = np(1-p)}$

Binomialverteilung (2)

$\mu = 0.6$
$\sigma = \sqrt{3 \cdot 0.2 \cdot 0.8}$
$\sigma \approx 0.7$

$\mu = 1.2$
$\sigma = \sqrt{6 \cdot 0.2 \cdot 0.8}$
$\sigma \approx 0.98$



$\mu = 1.8$
$\sigma = \sqrt{3 \cdot 0.6 \cdot 0.4}$
$\sigma \approx 0.85$

$\mu = 3.6$
$\sigma = \sqrt{6 \cdot 0.6 \cdot 0.4}$
$\sigma = 1.2$

Poissonverteilung

BinomialverteilungB(k;p,n) im Grenzfall **n →∞ , p → 0, np=μ** fest:

→ Poisson-Verteilung $\boxed{P(k;\mu) = \frac{\mu^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu}}$

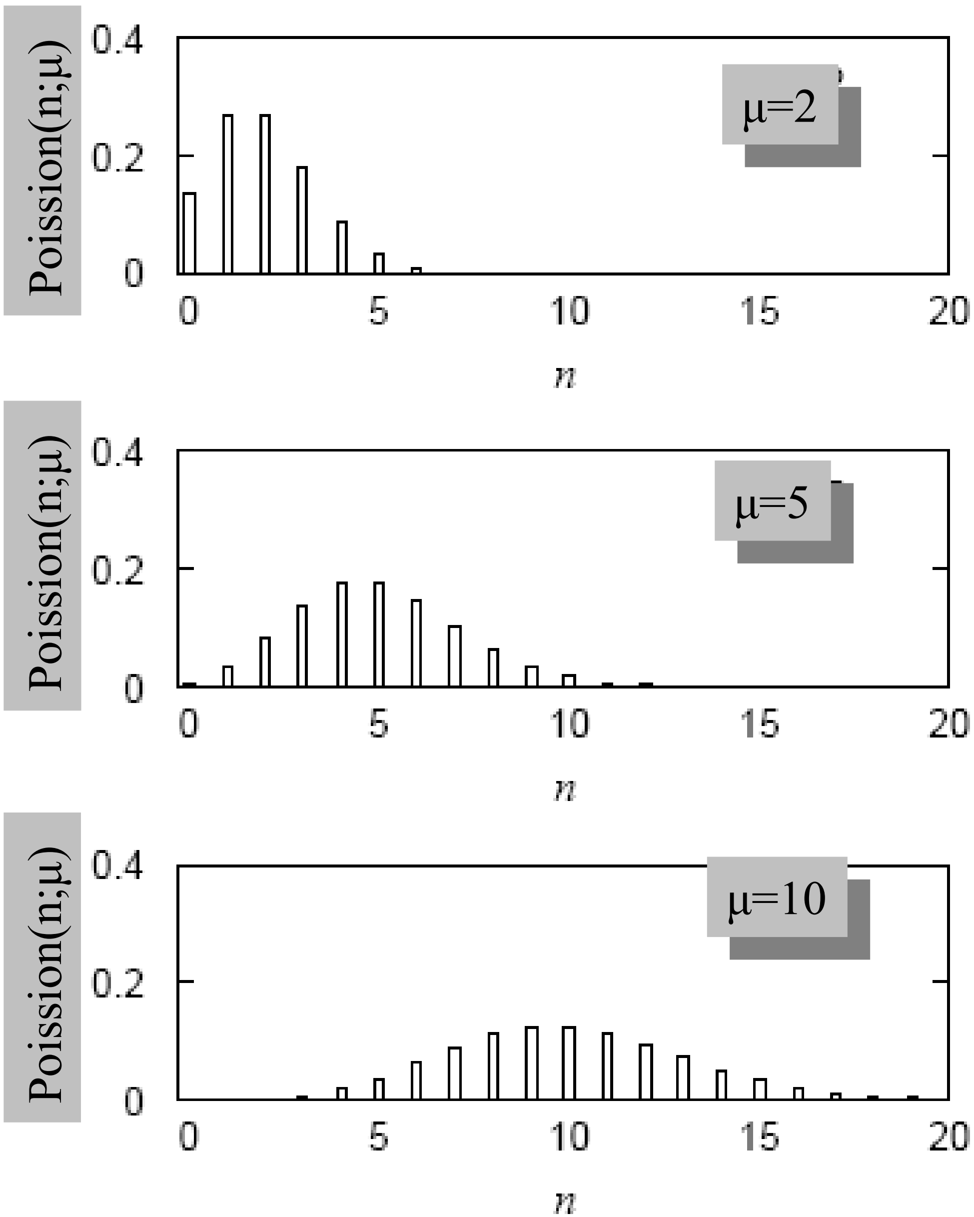
Erwartungswert $\boxed{\mathrm{E}[k] = \mu}$ Varianz $\boxed{\mathrm{V}[k] = \mu}$

Grenzwert bedeutet: Gesamtzahl beobachteter Ereignisse k in n → ∞ Intervallen Δx , in denen jeweils ein Ereignis mit der (sehr kleinen) konstanten Wahrscheinlichkeit p erwartet wird .

Beispiele für Poisson- verteilte Zahlen:

- *ein Klassiker:* Zahl der pro Jahr durch Huftritt getöteten preußischen Kavallerieoffiziere
- *näherungsweise*: Zahl der Einträge in einem Bin eines Histogramms mit vielen Bins
- Zahl der bei fester Ereignisrate im Zeitintervall T beobachteten Ereignisse,
  übrigens: Zeitdifferenz Δt zwischen zwei Ereignissen
  folgt einer Exponenitalverteilung: $f(\Delta t; \tau) = \frac{1}{\tau} \mathrm{e}^{-\Delta t/\tau}$

Statistik: grundlegende Verteilungen



Poissonverteilung

Erwartungswert μ

Standarabweichung $\sqrt{\mu}$

„Statistischer Fehler" auf eine Anzahl n von Beobachtungen ist

$$\sqrt{\mathbf{n}}$$

(dabei wird **$n \approx \mu$** angenommen)

(Gauß`sche) Normalverteilung

Die **Normalverteilung** (oder Gauß-Verteilung) ist die wichtigste kontinuierliche Verteilung

$$\boxed{N(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}} \qquad x \in \,]-\infty,\infty[$$

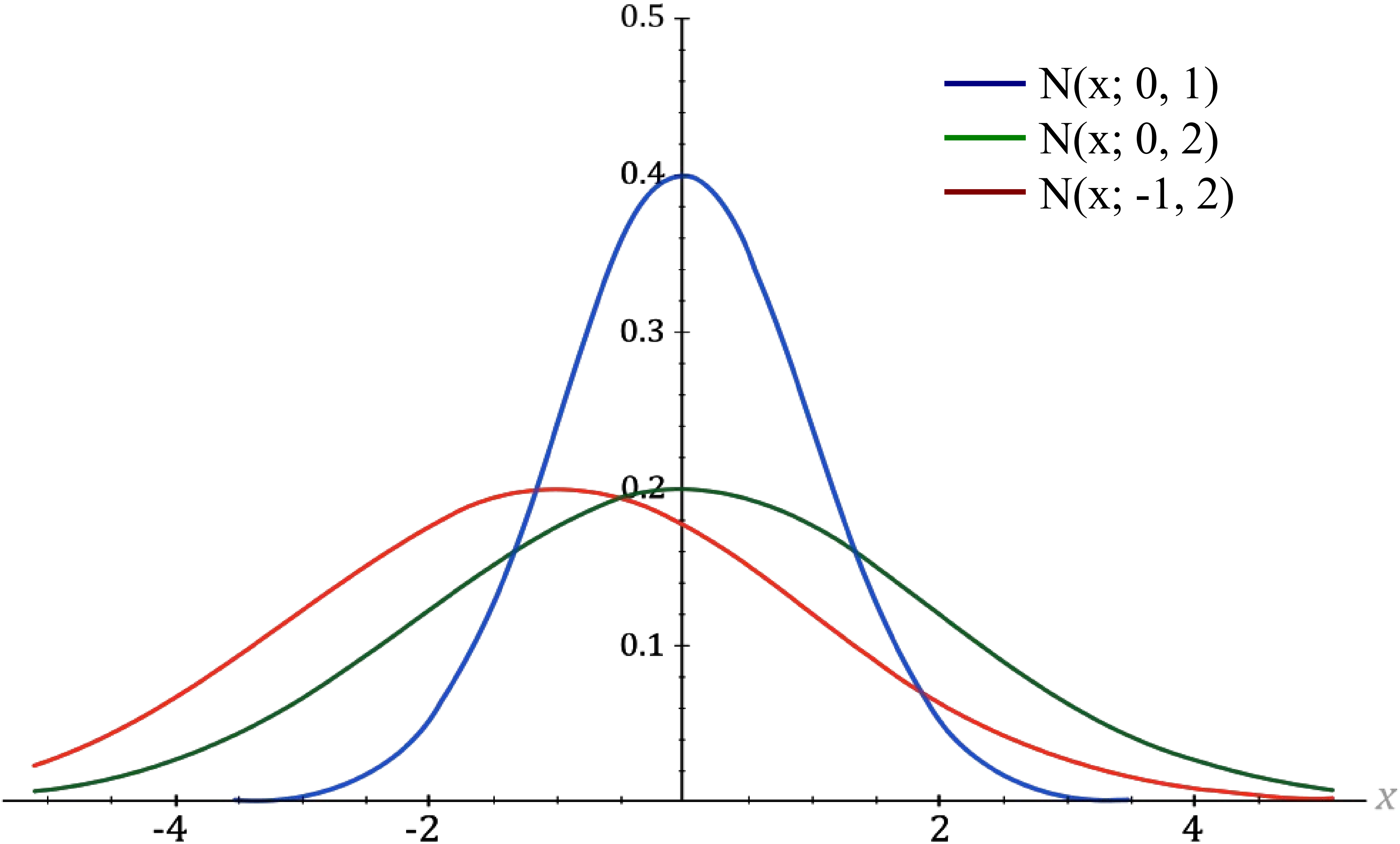
Erwartungswert $\boxed{\mathrm{V}[x] = \sigma}$

Quantile der Gauß-Verteilung:

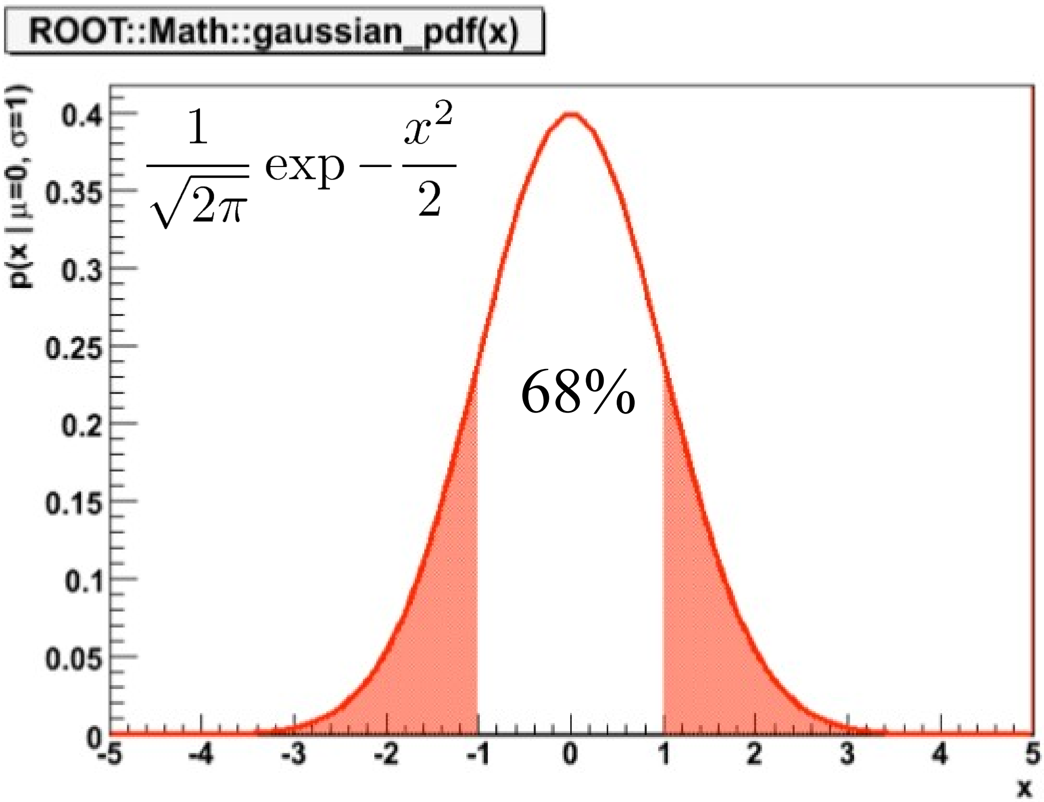
$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{P}(|x-\mu| < 1\cdot\sigma) &= 68.26\% \\ \mathrm{P}(|x-\mu| < 2\cdot\sigma) &= 95.45\% \\ \mathrm{P}(|x-\mu| < 3\cdot\sigma) &= 99.73\% \end{aligned}}$$

Für große n bzw. µ nähern sich Binomial- und Poisson-Verteilung der Gauß-Verteilung an.

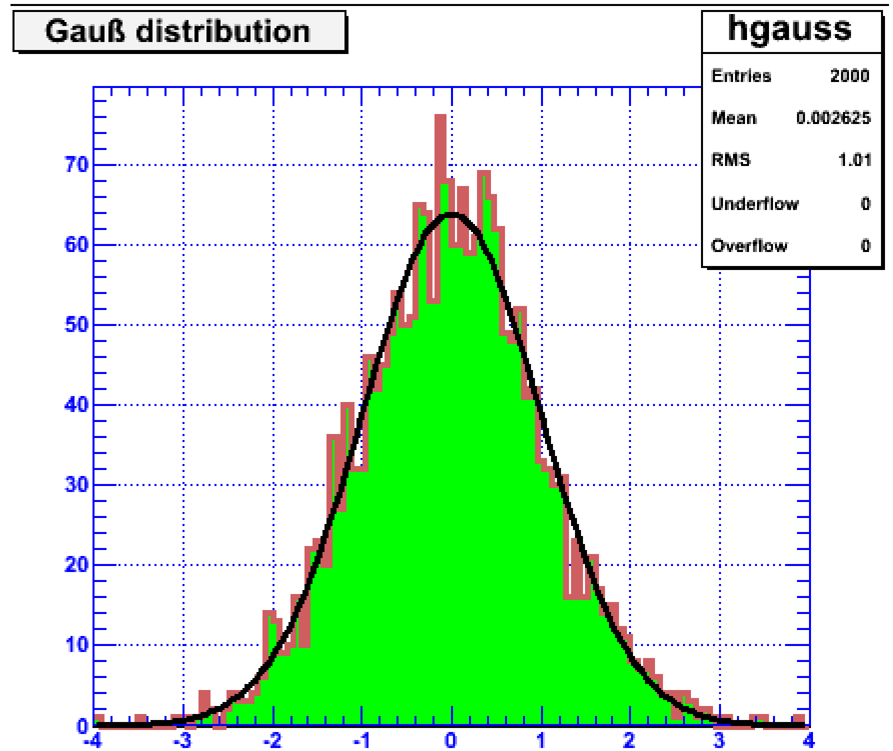
Gauß- oder Normal-Verteilung



Gauß- oder Normal- Verteilung

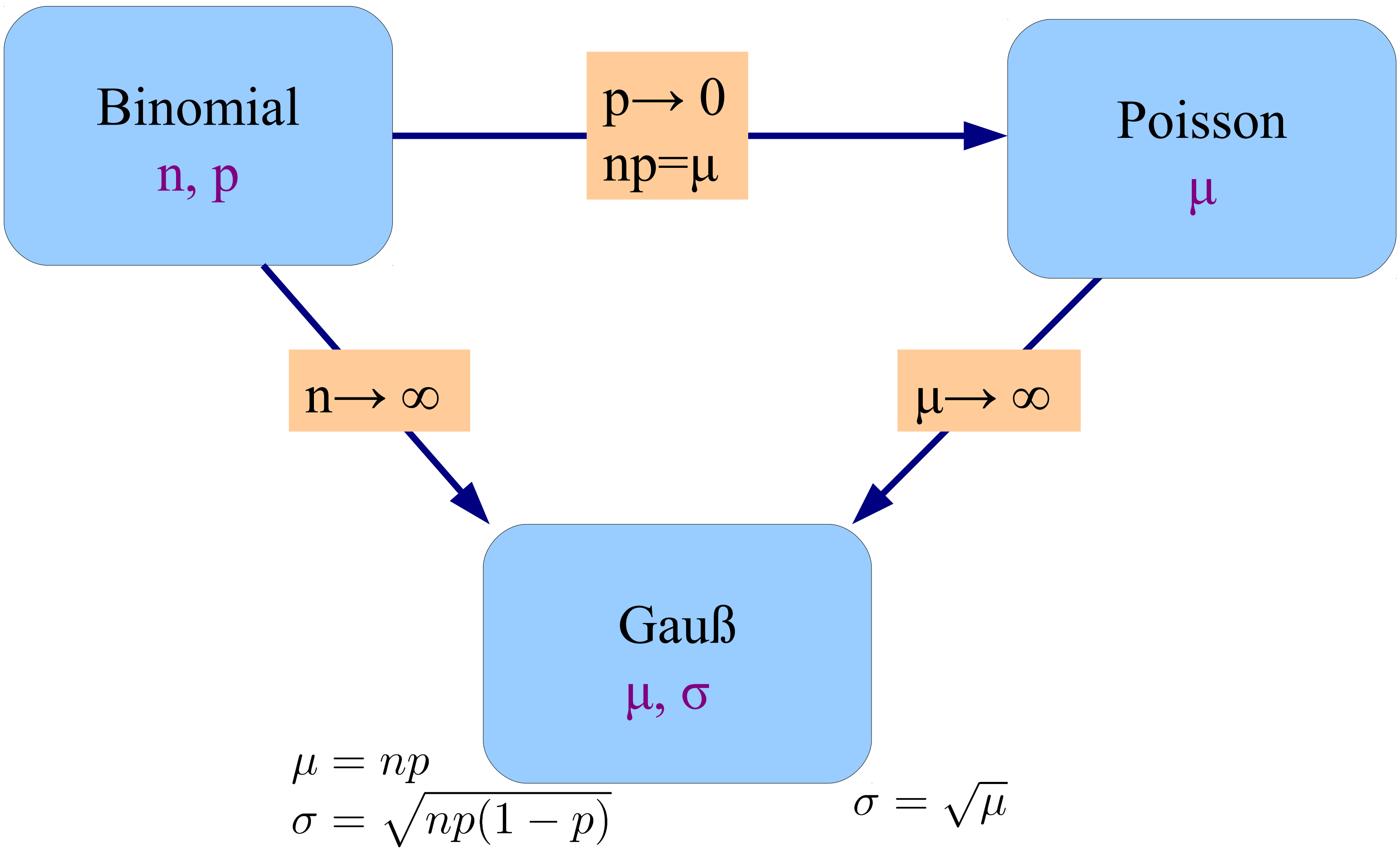


Standard-Normalverteilung (μ=0 und σ=1)



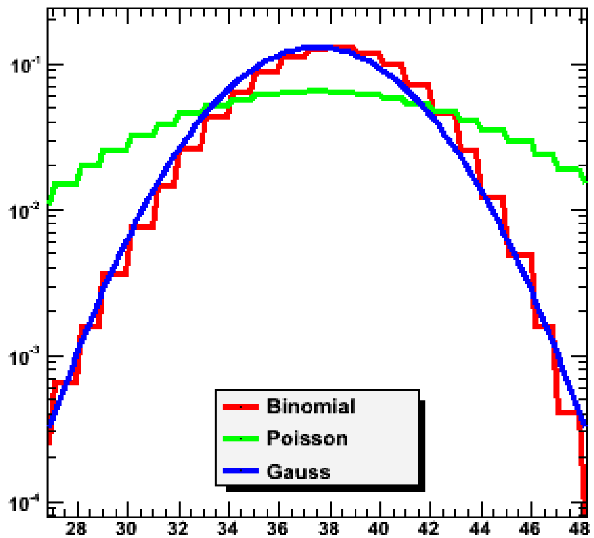
Gauß-verteilte Zufallszahlen in ROOT mit Hilfe der Klasse `TRandom` und Methode `Double_t Gaus()` über globalen Zeiger `gRandom->Gaus()`

Zusammenhang der Standardverteilungen

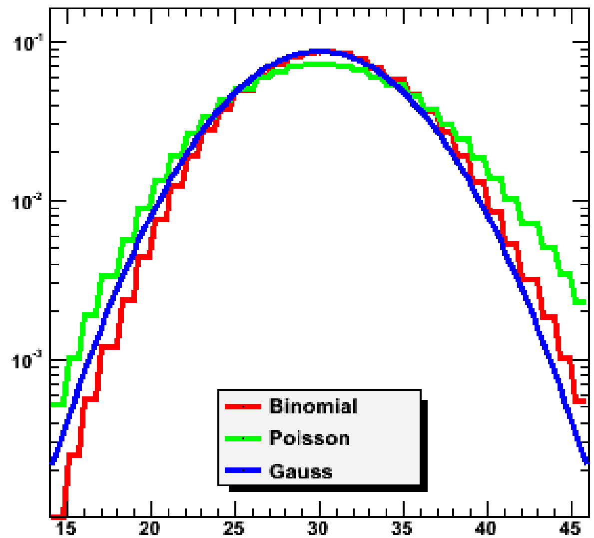


Vergleich: Binomial- und Poisson mit Gauß-Verteilung

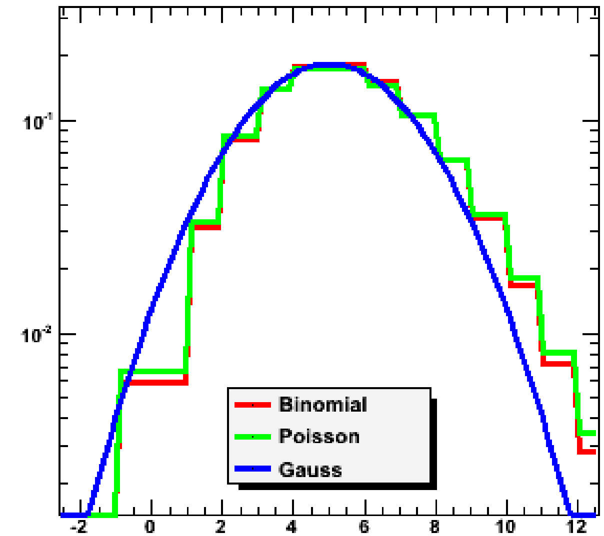
p=0.75 , n= 50



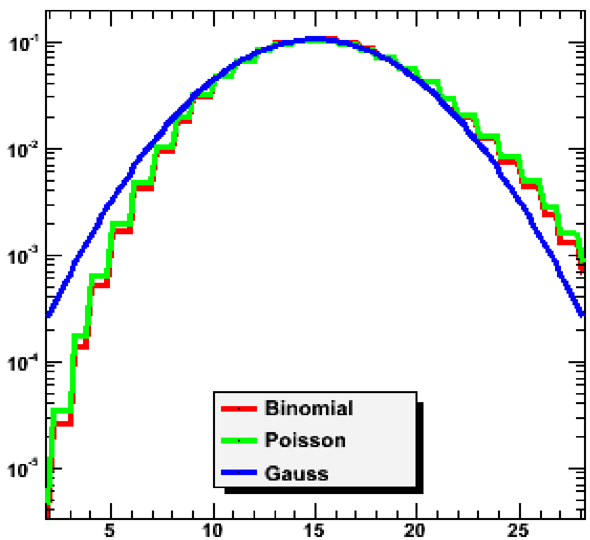
p=0.3 , n=100



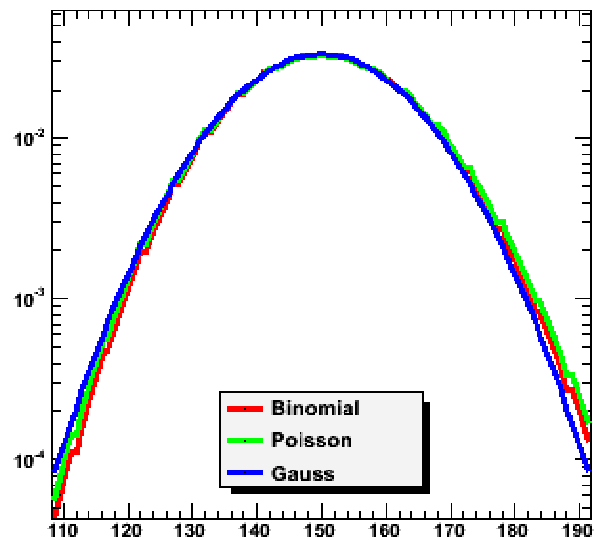
p=0.05 , n=100



p=0.05 , n=300



p=0.05 , n=3000



- gute Annäherung Poisson - Binomial-V. für $np > \sim 50$
- Asymmetrie von Binomial-V. bei kleinen p von Gauß-V. nicht gut beschrieben
- Problematisch: Ausläufer bei großen Werten | n - <n> |

Script `BaseDistributions.C`

Statistik: Zentraler Grenzwertsatz oder: warum sind Messfehler gaußförmig?

Im Grenzfall von großen N ist die Summe von N unabhängigen Zufallszahlen eine Zufallszahl, die einer Gauß-Verteilung folgt.

$$x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

x_i aus beliebiger Verteilung mit Mittelwert μ_i und **endlicher Varianz** σ_i

Bedingung von Lyapunov: $\sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}\left(|x_i - \mu_i|^3\right)$ endlich für alle n $\Rightarrow$

x ist Gauß-verteilt mit Erwartungswert $\mu = \sum_{i=1}^{N} \mu_i$ und Varianz $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} {\sigma_i}^2$

Beweis im Prinzip einfach; erfordert neues Konzept: die „charakteristische Funktion" einer Verteilung, s. z.B. S. Brand, Datenanalyse

s. Demonstration mit Root

weitere Verteilungen: χ^2

x_i standard-normalverteilt

$$\chi^2 = z = \sum_{i_1}^{N} x_i^2$$

folgt der sogenannten

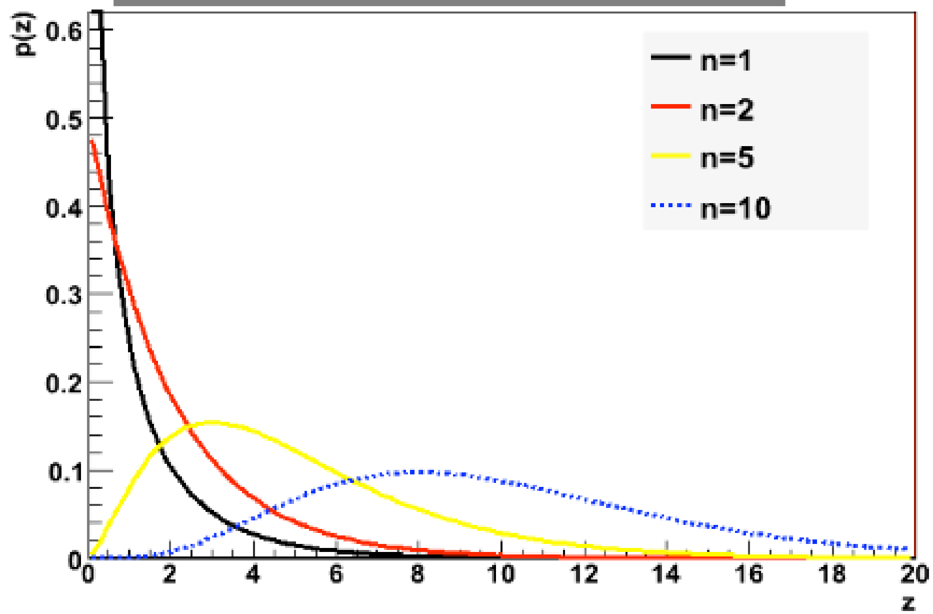
χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden:

$$f(z;n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} z^{n/2-1} e^{-z/2} \qquad (z \geq 0)$$

Erwartungswert $\boxed{\mathrm{E}[z] = \mathrm{E}[\chi^2] = n}$

Varianz $\boxed{\mathrm{V}[z] = \mathrm{V}[\chi^2] = 2n}$

ROOT::Math::chisquared_pdf(x,n_f)



Es gilt: $\chi2_{(n)} + \chi2_{(m)} = \chi2_{(n+m)}$

für große n ist $^{(\chi2\,-\,n)}/\sqrt{(2n)}$ standard-normalverteilt.

Anwendung: Summe der quadratischen Abweichung von Messwerten von einer Funktion,

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - t_i)^2}{\sigma_i^2}$, folgt einer $\chi2$-Verteilung (für Gauß-förmige Fehler σ_i, s. auch später: $\chi2$-Anpassung)

Weitere Verteilungen: Cauchy (=Breit-Wigner) - Verteilung

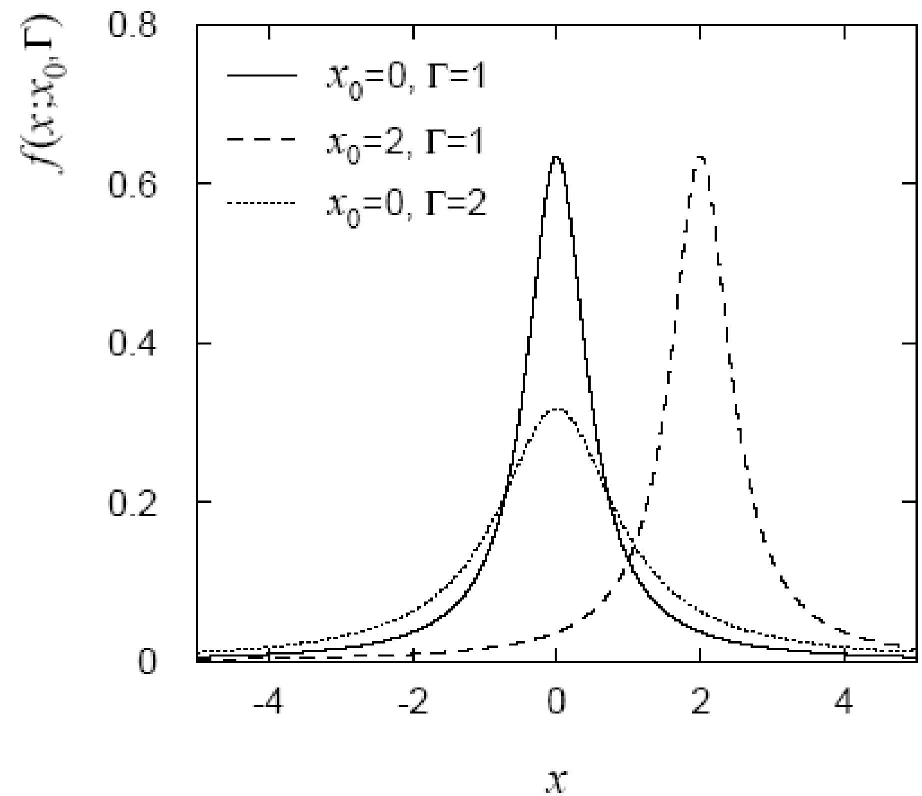
$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x;\Gamma,x_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{\Gamma^2/4 + (x-x_0)^2}$$

Erwartungswert $\boxed{\mathrm{E}[x] = x_0}$

(aber schecht definiert!)

Varianz existiert nicht, statt dessen
Halbwertsbreite („FWHM“) = Γ



– tritt bei allen Resonanzphänomenen auf,

$\mathrm{V}[x] = \sigma$

– ist Fouriertransformierte (im Frequenz- (=Energie) -Raum)
der Exponentialverteilung (in Zeit t).

– Unschärferelation: Resonanzbreite = h/Lebensdauer

Generalisierte Poisson-Verteilung: Gamma-Verteilung

Verteilung des Erwartungswertes einer Poissonverteilung, bestimmt aus der mit dem Faktor α skalierten Beobachtung von N Poisson-verteilten Ereignissen, $n=\alpha N$, z.B:

- N simulierte Ereignisse, α N Ereignisse in Daten erwartet
- Untergrundbeobachtung in Seitenband, α N Ereignisse im Signalbereich erwartet

$n=\alpha N$ folgt

$$\boxed{p(n;\alpha,N) = \frac{1}{\alpha}\frac{n/\alpha}{N!}\exp\left(-n/\alpha\right)}$$

Spezialfall einer Gamma-Verteilung

Maximum bei αN
Mittelwert $\alpha(N+1)$
Varianz $\alpha^2(N+1)$

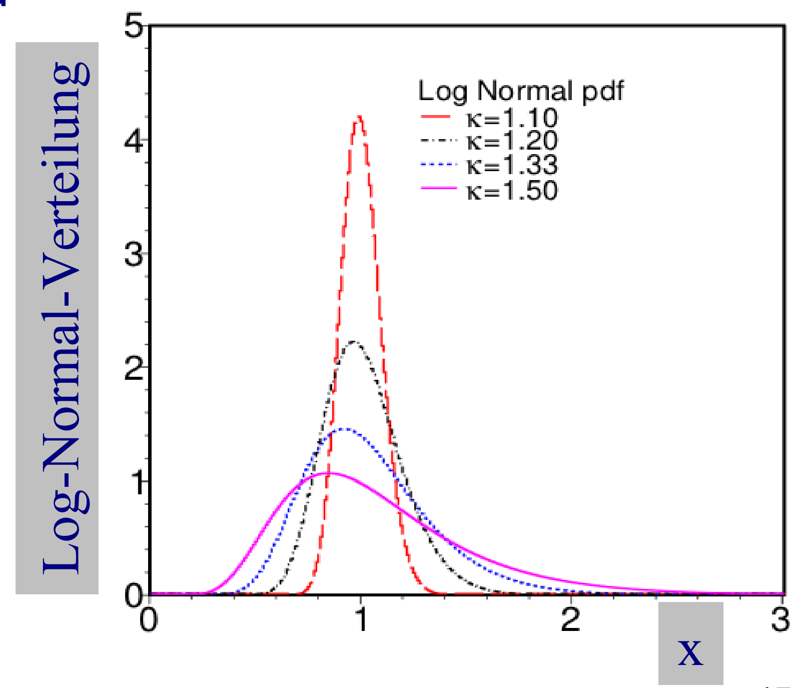
Logarithmische Normalverteilung

Logarithmus einer Zufallsgröße ist normalverteilt:

$$\boxed{f(x;\tilde{x},\kappa)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}x\ln\kappa}\exp\left(-\frac{(ln(x/\tilde{x}))^2}{2(\ln\kappa)^2}\right)}$$

Eigenschaften:

- $f(x=0)=0$; längere Ausläufer als Gaußverteilung für große x
- geht für Werte von $\kappa \approx 1$ mit $\kappa=\exp(\varepsilon)\approx 1+\varepsilon$ und $\varepsilon=\sigma/\mu$
  asymptotisch in die Gaußverteilung $G(x;\mu,\sigma)$ über



<u>Anwendung:</u> **Größen, die sich als Produkt von fehlerbehafteten Faktoren ergeben**

<u>Bsp:</u> **Aussage „Faktor zwei Unsicherheit“ gut beschrieben durch Log-Normal-verteilung mit κ=2**

Mehrere, nicht unabhängige Zufallsgrößen

Kovarianz und Korrelation

Kovarianzmatrix

Kovarianz zweier Zufallsvariablen ist **Erwartungswert** von

```
(Abweichung vom Erwartungswert in Variable x) *
(Abweichung vom Erwartungswert in Variable y)
```

$$\mathrm{cov}[x,y] = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)] = E[xy] - \mu_x\mu_y$$

Diagonalwerte sind die Varianzen:
Erwartungswert von `(Abweichung vom Erwartungswert in Variable x)**2`

$$\begin{aligned} cov[x,x] = V_x = \sigma_x^2 &= E[(x-\mu_x)^2] \\ &= E[x^2] - 2E[x]\mu_x + \mu_x^2 \\ &= E[x^2] - \mu_x^2 \end{aligned}$$

Analog auch bei mehr als zwei Variablen:
$\mathrm{cov}(x_i,x_j)$ bildet die **Kovarianzmatrix**

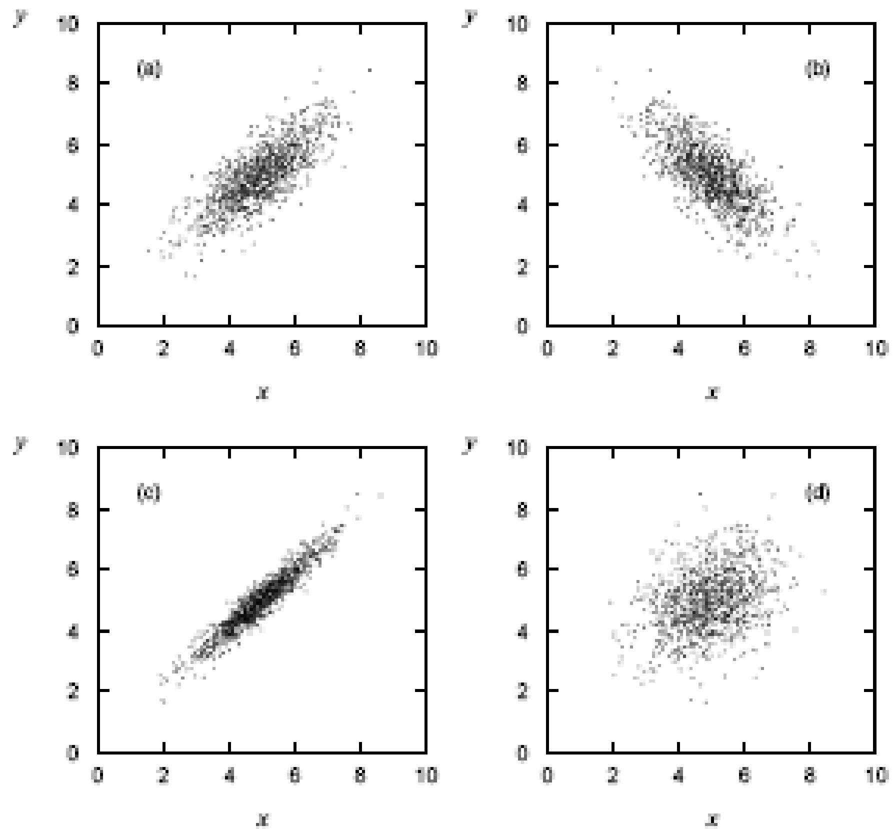
Korrelationsmatrix

Normiere Kovarianzmatrix, so dass die Diagonalelemente alle 1 sind:

$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{cov}[x,y]}{\sigma_x \sigma_y}\,, \qquad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

$\rho = 0.75$ $\quad$ $\rho = -0.75$

$\rho = 0.95$ $\quad$ $\rho = 0.25$



Korrelation

Wenn x, y unabhängig, d.h. $f(x,y) = f_x(x) f_y(y)$, dann gilt

$$E[xy] = \int\int xy\, f(x,y)\, dx dy = \mu_x \mu_y$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{cov}[x,y] = 0$ x und y „unkorreliert“

Achtung: Die umgekehrte Aussage gilt nicht:

Beispiel: $x \in [-1, 1], y = x^2$

Praktisches Beispiel: Konstruktion einer Kovarianz-Matrix

Anfängerpraktikum: 6 Studenten in 3 Gruppen mit jeweils eigenem Messgerät vom gleichen Typ, von allen angewandte „Theorie-Korrektur“ mit Unsicherheit, 6 Einzelergebnisse.

Fehlerbeiträge:

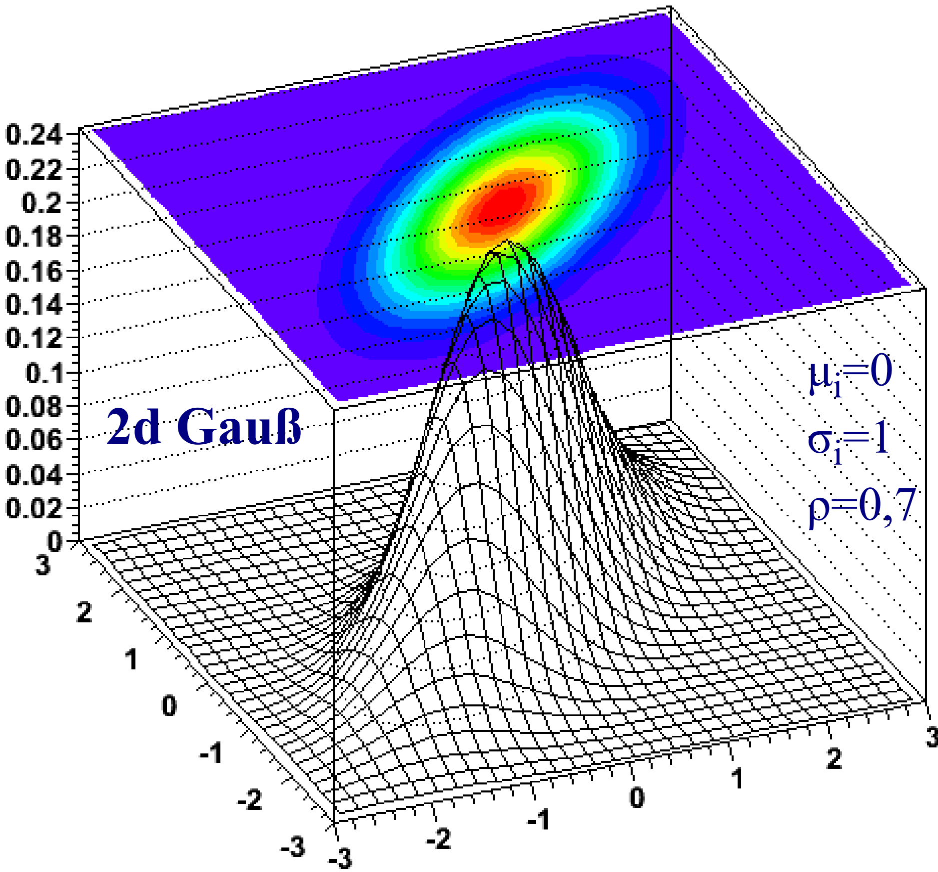
- Systematischer Fehler eines Messgeräts: s (korreliert innerhalb einer Gruppe, d.h. Studierende 1-2, 3-4 und 5-6, unabhängig zwischen den Gruppen)
- Theoriefehler: t (korreliert für allen Messungen)
- Unabhängiger Messfehler jeder Gruppe: $f_1, \ldots, f_6$

Jede Messung hat den Gesamtfehler $\boxed{g_i = \sqrt{(f_i^2 + s^2 + t^2)}}$

$$\mathbf{COV} = \begin{pmatrix} g_1^2 & s^2+t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 \\ s^2+t^2 & g_2^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 \\ t^2 & t^2 & g_3^2 & s^2+t^2 & t^2 & t^2 \\ t^2 & t^2 & s^2+t^2 & g_4^2 & t^2 & t^2 \\ t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & g_5^2 & s^2+t^2 \\ t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & s^2+t^2 & g_6^2 \end{pmatrix}$$

Gauß-Verteilung in mehreren Dimensionen

$$p(\vec{x}|\vec{\mu}, V) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|V|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T V^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\right]$$



$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & . & . & . & \sigma_1\sigma_n\rho_{1n} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & . & . & . & \sigma_2\sigma_n\rho_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \sigma_n\sigma_1\rho_{n1} & . & . & . & \sigma_n\sigma_{n-1}\rho_{n-1} & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Kovarianzmatrix

ρ_{ij} : Korrelationskoeffizienten

2-dimensional

$$g(x_1, x_2 \,|\, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u_1^2 + u_2^2 - 2\rho u_1 u_2)\right]\right)$$

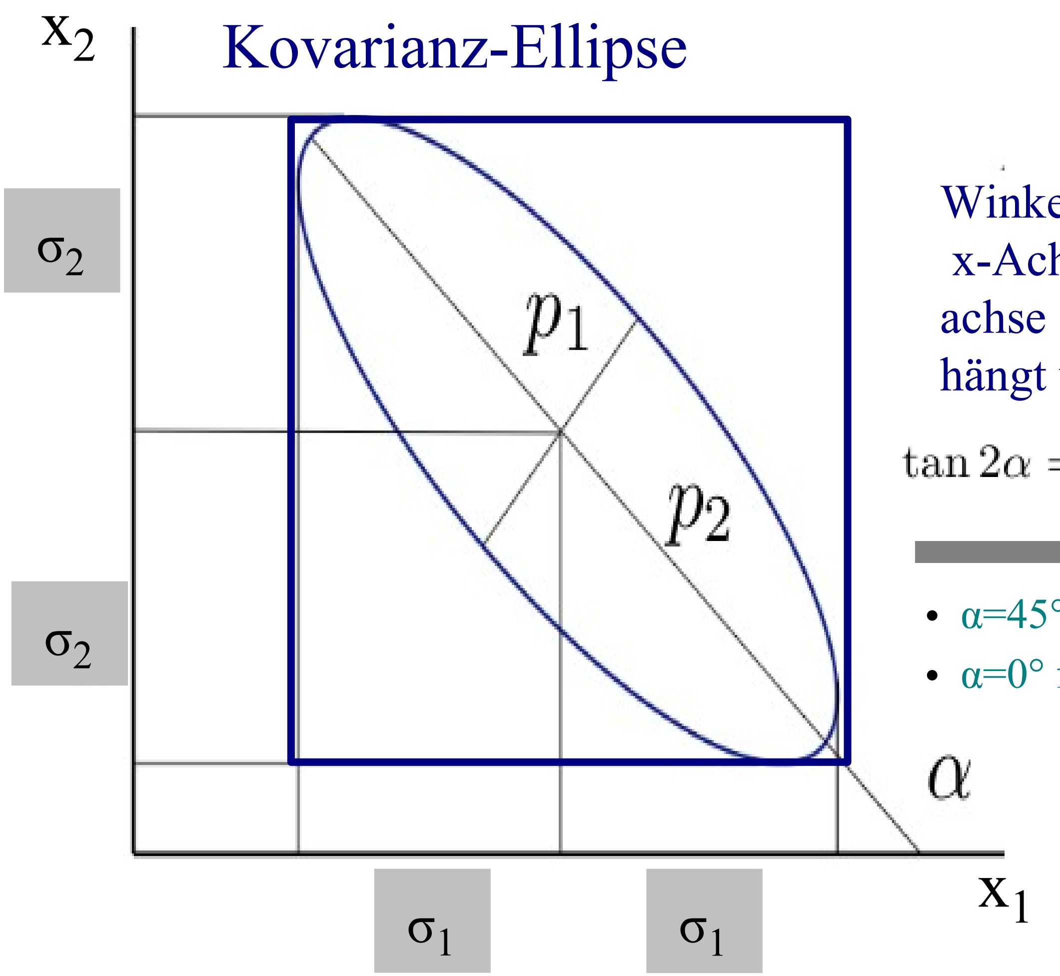
$$\text{mit } u_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}$$

2-dim. Gauß-Verteilung und Kovarianzellipse

Kontur konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2-2\rho_{12}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_1-\mu_2}{\sigma_2}\right)=1-\rho_{12}^2$$

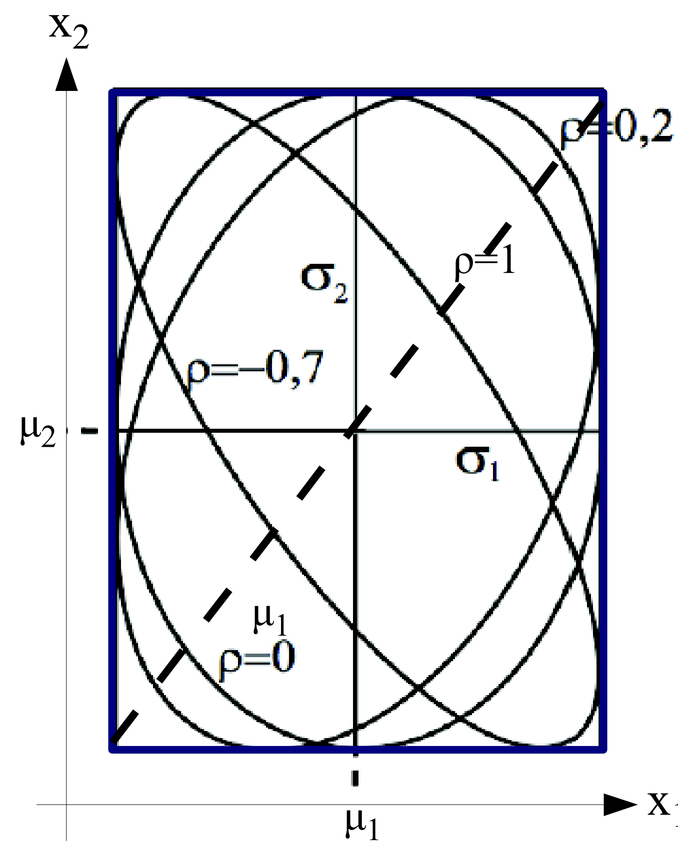
ist eine **Ellipsengleichung**



Winkel zwischen x-Achse und Haupt-achse der Ellipse hängt von ρ_{12} ab:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-\sigma_2^2}$$

- α=45° nur für $\sigma_1 = \sigma_2$
- α=0° für $\rho_{12}=0$

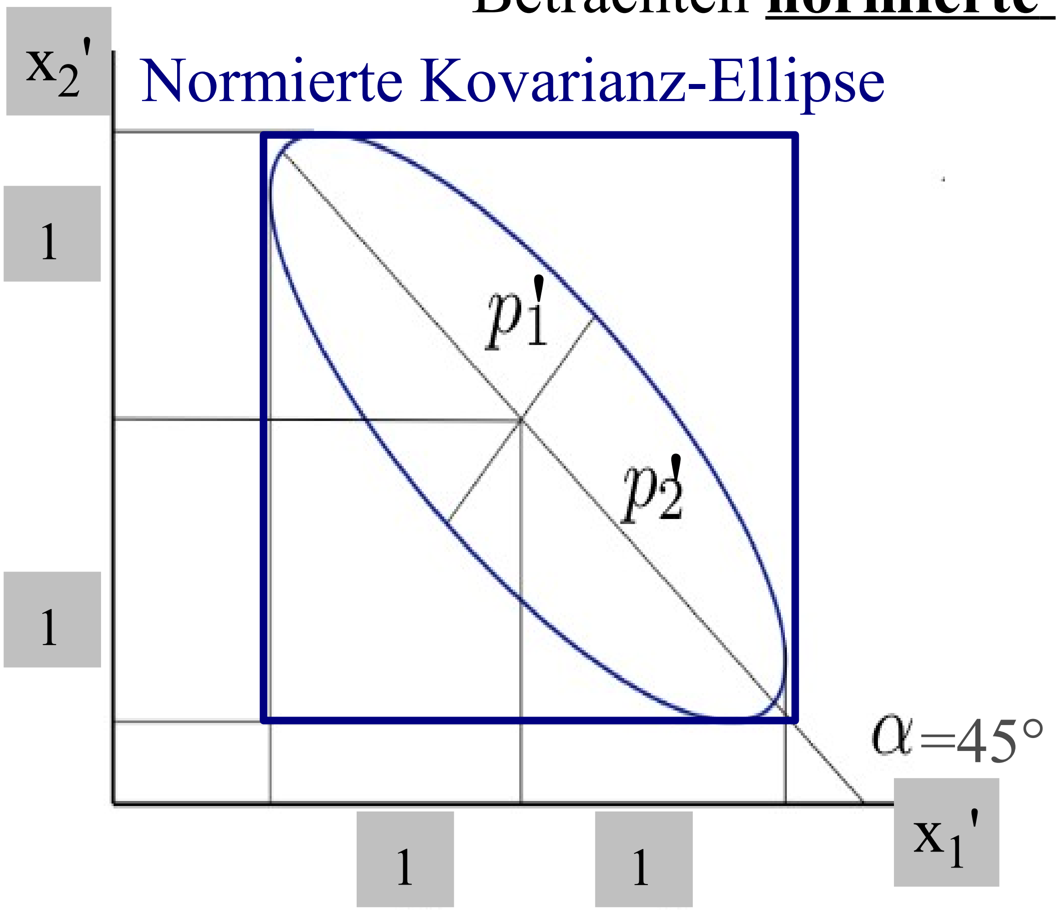


Fläche innerhalb der 1-σ Ellipse entspricht ~39%

Ellipsen berühren das Rechteck mit den Kantenlängen $2\sigma_1$ und $2\sigma_2$ an vier Stellen

Kovarianzellipse - Ablesen des Korrelationskoeffizienten

Betrachten **normierte** Variable $x_1'=x_1/\sigma_1$ und $x_2'=x_2/\sigma_2$

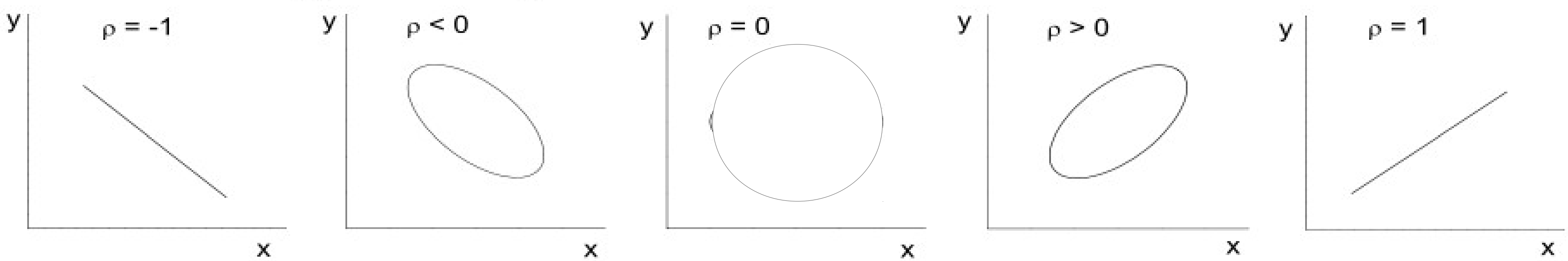


$\rightarrow$ **Halbachsen P_1' und P_2'**

$$P_1'^2 + P_2'^2 = 2 \qquad \frac{P_1'^2 - P_2'^2}{2} = \rho$$

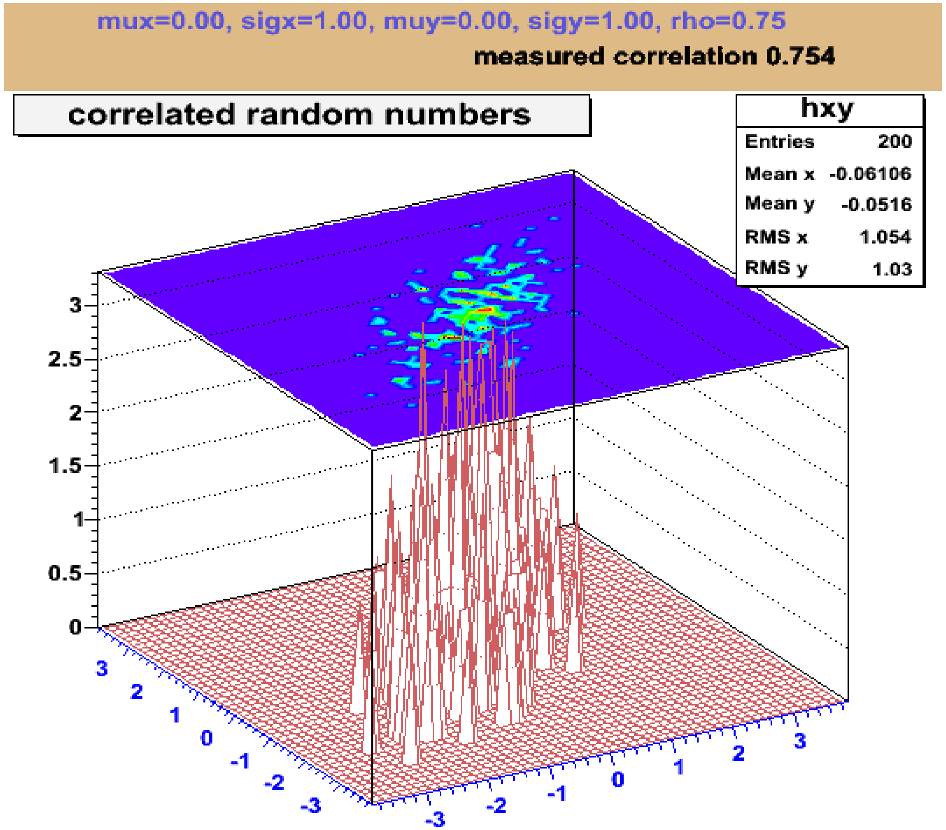
$$\rho = \frac{P_1'^2 - P_2'^2}{P_1'^2 + P_2'^2}$$

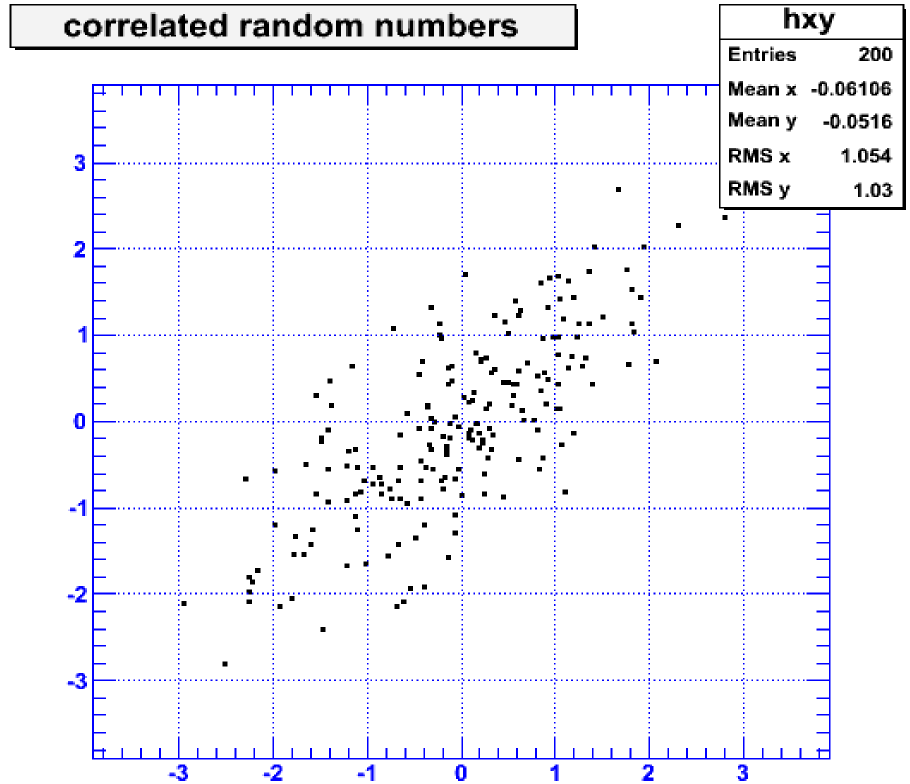
Korrelationskoeffizient lässt sich aus Längen der Halbachsen bestimmen



Kovarianz in ROOT

Standard-normalverteilte Zufallszahlen mit ρ=0.75





`TH2::Draw("surf3");`

„scatter plot" `TH2::Draw();`

Methoden `TH2::GetCovariance` und `TH2:GetCorrelationFactor` zur Berechnung der Kovarianz oder des Korrelations-Koeffizienten

Multinomial-Verteilung

Verallgemeinerung der Binomialverteilung von zwei auf k mögliche Ergebnisse,

Verteilung der Anzahlen $\mathbf{n_k}$ für die Beobachtung von Ereignis k bei **N** Versuchen

$$P(n_1 \ldots n_k; N, p_1 \ldots, p_k) \frac{N!}{n_1! \ldots n_k!} {p_1}^{n_1} \ldots {p_k}^{n_k}, N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Eigenschaften:

Erwartungswert $E[n_i] = Np_i$

Varianz $V[n_i] = \mathrm{cov}(\mathrm{n_i}, \mathrm{n_i}) = \mathrm{Np_i}(1 - \mathrm{p_i})$

Kovarianz $\mathrm{cov}[n_i, n_j] = -Np_i p_j$

Korrelationskoeffizient $\rho_{ij} = -\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}$

Beschreibt z.B. Verteilung der Bin-Inhalte eines Histogramms mit k Bins und N Einträgen

Randverteilung $\mathbf{P(n_i)=Binomial(n_i; N, p_i)}$

Grenzverteilung für große N und k: $\mathbf{P(n_i)=Poisson(n_i; Np_i)}$

Funktionen von Zufallsgrößen

Einfacher Fall: lineare Funktionen von Zufallsvariablen

Zufallsvariable: $x = \sum_i^N a_i x_i$

Erwartungswert E[x]: $E\left[\sum_i^N a_i x_i\right] = \sum_i^N a_i E\left[x_i\right] = \sum_i^N a_i \mu_{x_i}$

Varianz V[x]: $V\left[\sum_i^N a_i x_i\right] = \sum_i^N a_i{}^2 V[x_i] + 2\sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N a_i a_j \mathrm{cov}(x_i, x_j)$

Bitte **nicht die Kovarianzen** vergessen, nur für unkorrelierte Zufallsvariable gilt die einfache Fehlerfortpflanzung

$V\left[\sum_i^N a_i x_i\right] = \sum_i^N a_i{}^2 V[x_i]$ bzw. $\sigma_x{}^2 = \sum_i a_i{}^2 \sigma_{x_i}{}^2$

Variablentransformation

Eine Funktion **u(x)** einer Zufalls- Variablen x mit *pdf* **f(x)** ist ebenfalls eine Zufallsvariable mit *pdf* **g(u)**

Oft ist die Kenntnis von **g(u)** notwendig:

- kinetische Energie ist eine Funktion des Quadrats der Geschwindigkeiten
- eine Größe ist eine Funktion verschiedener Messgrößen; außer dem Fehler interessiert oft auch die pdf
- Erzeugung beliebiger Verteilungen durch Transformation von gleichverteilten Zufallszahlen

Für **diskrete Verteilungen** ist die Berechnung trivial:

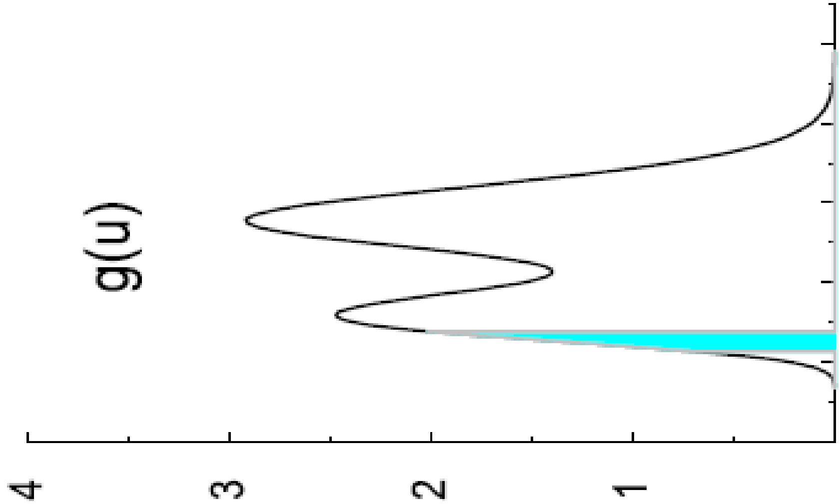
$u_k = u(x_k)$ (u ist umkehrbar eindeutige Funktion von x)

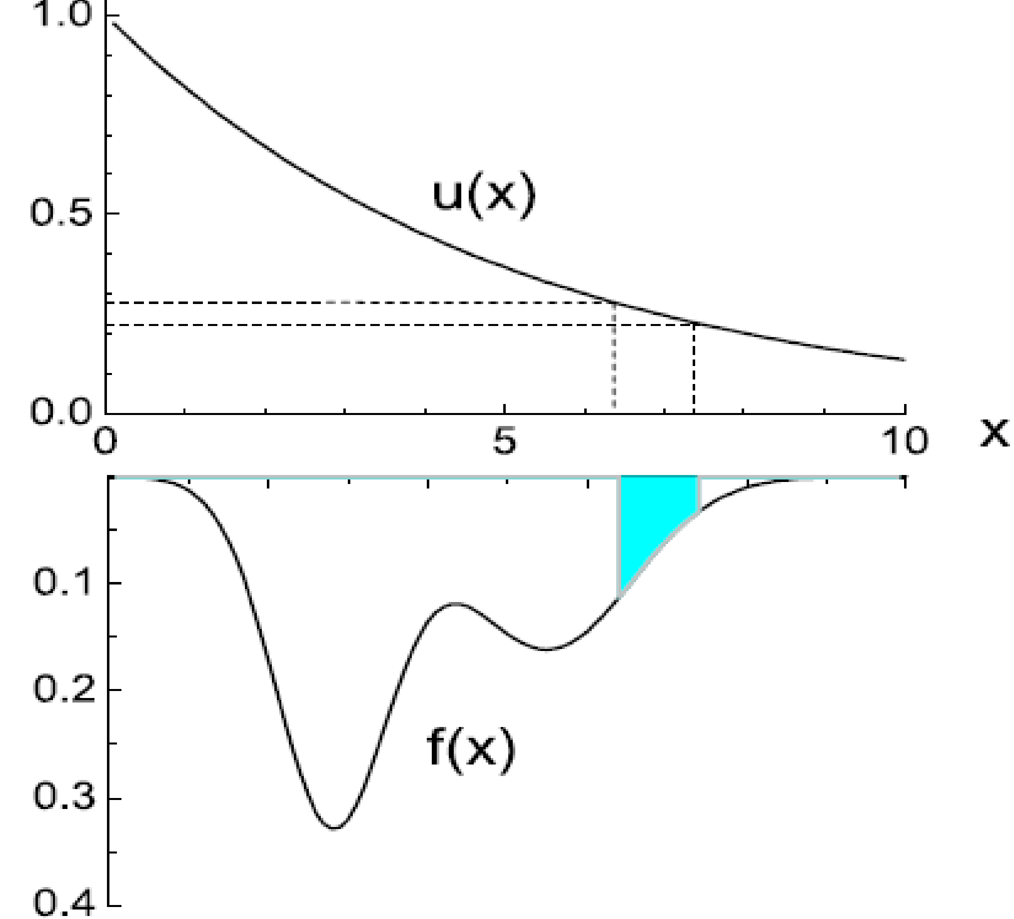
$\text{Prob}\,[\, u(x_k) \,] = \text{Prob}\,[\, x_k \,]$ für jedes k

Variablentransformation II

- Kontinuierliche Verteilungen

u(x) ist eindeutig umkehrbare Funktion von x





Es muss gelten:

$P(x_1 < x < x_2) = P(u_1 < u < u_2)$

mit $u_1 = u(x_1)$, $u_2 = u(x_2)$

(blau unterlegte Flächen)

Differentiell geschrieben:

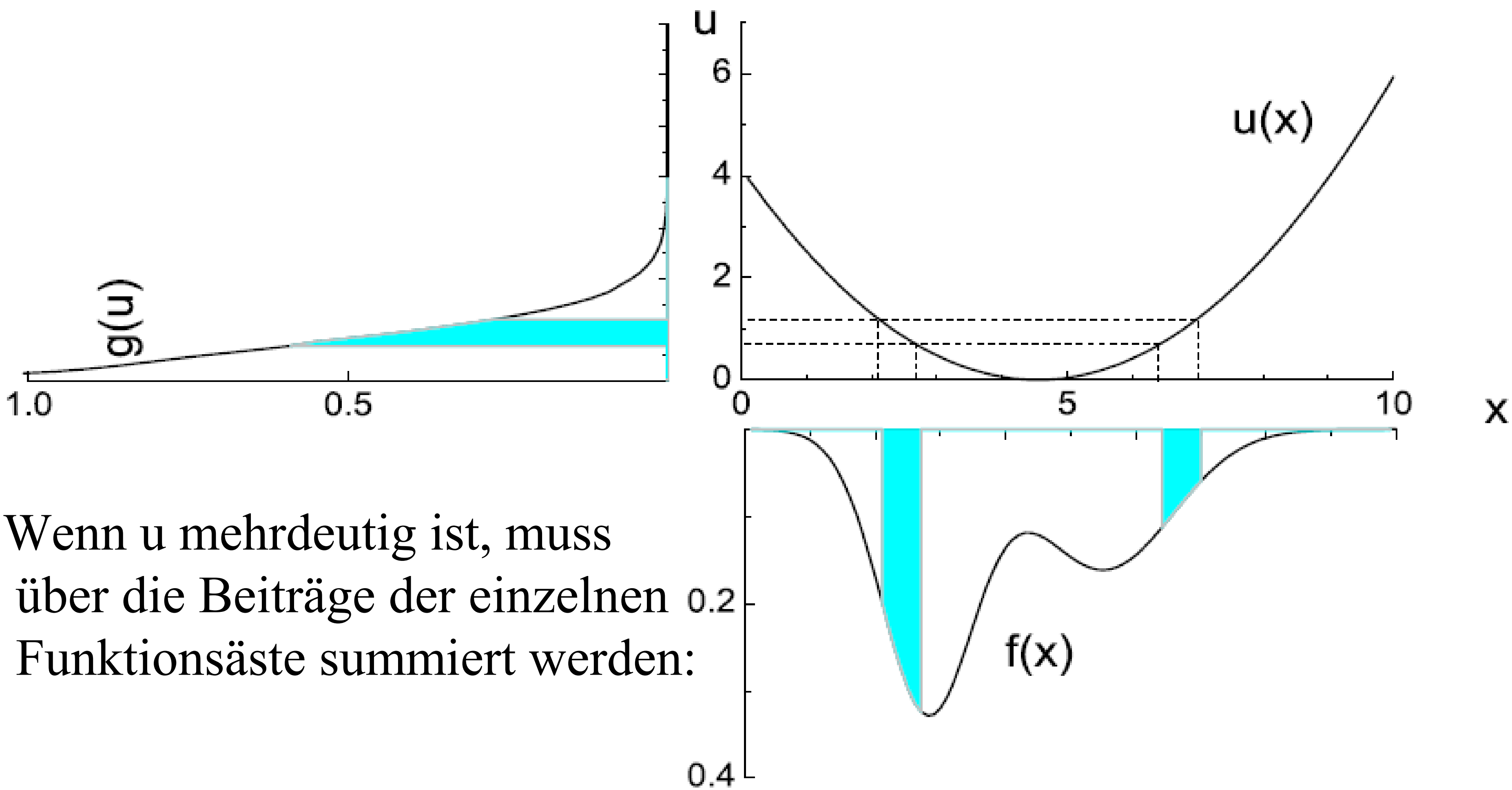
$| g(u)\, du | = | f(x)\, dx |$ oder

$$g(u) = f(x) \; |dx / du|$$

durch Integration folgt **Gleichheit der Verteilungsfunktionen: $F(x) = G(u)$**

Variablentransformation III

u(x) ist mehrdeutig



Wenn u mehrdeutig ist, muss über die Beiträge der einzelnen Funktionsäste summiert werden:

$$g(u) = \{f(x)\,|dx / du|\}_{\text{Ast1}} + \{f(x)\,|dx / du|\}_{\text{Ast1}} + \ldots$$

Variablentransformation - Beispiele

$u = -\ln(x)$; $\quad \left|{}^{dx}/_{du}\right| = \exp(-u)$

x gleichverteilt in]0,1], d.h. f(x)=1 $\Rightarrow$

$$g(u) = \exp(-u)$$

- -

$u = \exp(x)$; $\quad {}^{dx}/_{du} = 1/u$

x gleichverteilt in]0,1] $\Rightarrow$

$$g(u) = 1/u$$

Oder andersherum: x=ln(u) gleichverteilt $\rightarrow$ pdf 1/u

Variablentransformation - Beispiele

x normalverteilt,

$u = (x - \mu)^2 \; / \; \sigma^2$

$dx/_{du} = (2\sqrt{u})^{-1}$ =>

$$g(u) = \left\{ \frac{s}{2\sqrt{u}} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-u/2} \right\}_{Ast1} + \{\ldots\}_{Ast2}$$

Beiträge beider Äste sind gleich, also:

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-u/2}$$

χ^2- Verteilung für einen Freiheitsgrad

Variablentransformation in mehreren Dimensionen

„Multivariate Verteilungsdichten“

Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x,y)$;

x und y werden transformiert in $u=u(x,y)$ und $v=v(x,y)$

Wieder muss gelten:

$$\mathbf{g(u,v)\,du\,dv = f(x,y)\,dx\,dy}$$

d.h. $\mathbf{g(u,v) = f(x,y) \cdot |J|}$ **; dabei ist**

$$|J| = \det\begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{pmatrix}$$

die Jakobi- oder Funktional-Determinante

Ganz analog:

Erweiterung auf n Dimensionen, $\mathbf{x_i = x_i(u_1, u_2, \ldots , u_n)}$, $i=1, \ldots , n$

Funktionen von Zufallsvariablen

Fehlerfortpflanzung

Fehlerfortpflanzung

Problem: eine Größe y hängt von Zufallsgrößen x_i ab;

was ist die Varianz von y ?

Fragestellung tritt auch auf bei der Mittelung von Messungen

(der Mittelwert ist schließlich eine Funktion aller Einzelmessungen x_i)

Falls die Verteilungsdichten der x_i bekannt sind, könnte man mittels Variablen-transformation die Verteilungsdichte von y bestimmen und die Varianz berechnen.

Wenn die Varianz der x_i so klein ist, dass sich die Funktion $y(\mathbf{x})$ im Bereich der Variation der x_i durch eine Gerade annähern läßt, hilft eine Taylor-Entwicklung um den Vektor der Mittelwerte $\mathbf{x_m}$

$$y(\mathbf{x}) = y(\mathbf{x_m}) + \left({}^{\partial y}/_{\partial x1}, \ldots, {}^{\partial y}/_{\partial xn} \right) (\mathbf{x}-\mathbf{x_m}) + \ldots$$

y ist näherungsweise eine lineare Funktion der x_i

Fehlerfortpflanzung (2)

Betrachten allgemeinen Fall eines Vektors y_j von Funktionen der x_i, $\mathbf{y(x)}$

(der Fall von eben entspricht z.B. $y_1=y(x_1,\ldots,x_n)$, $y_2=x_2$, ..., $y_n=x_n$)

$$\Rightarrow \quad \mathbf{y}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{y}(\mathbf{x_m}) + T\,(\mathbf{x}-\mathbf{x_m}), \quad \boxed{T_{ij} = \left(\partial y_i/\partial x_j\right)}$$ ist Matrix der ersten Ableitungen

Der Erwartungswert von **y** ist $\langle \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y_m} = \mathbf{y}(\mathbf{x_m})$

Die Kovarianz-Matrix der y_j ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\boxed{C_y} &= \langle (\mathbf{y}-\mathbf{y}_m)(\mathbf{y}-\mathbf{y}_m)^T \rangle \\
&= \langle \; (\mathbf{y}(\mathbf{x}_m) + T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_m) - \mathbf{y}_m) \; (\mathbf{y}(\mathbf{x}_m) + T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_m) - \mathbf{y}_m)^T \; \rangle \\
&= \langle \; (T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_m)) \; (T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_m))^T \; \rangle \\
&= \langle \; T\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_m) \; (\mathbf{x}-\mathbf{x}_m)^T \, T^T \; \rangle \\
&= T \, \langle (\mathbf{x}-\mathbf{x}_m) \; (\mathbf{x}-\mathbf{x}_m)^T \rangle \, T^T = \boxed{T \; C_x \; T^T}
\end{aligned}$$

Zu den Fehlern von y trägt auch die Kovarianz der x_i entscheidend bei !

Fehlerfortpflanzung (3)

Falls die Kovarianzmatrix-Elemente der x_i verschwinden (bzw. vernachlässigbar sind), C_x also eine Diagonalmatrix ist, erhält man das bekannte Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\sigma_{y_j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

für x_1, x_2 unkorreliert:

$$y = x_1 + x_2$$

$$\Rightarrow \sigma_y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\mathrm{cov}[x_1, x_2]$$

Quadrierter *absoluter* Fehler auf Summe (oder Differenz) zweier Zahlen ist die quadratische Summe ihrer *absoluten* Fehler

$$y = x_1 x_2$$

$$\sigma_{y_j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_y^2}{y^2} = \frac{\sigma_1^2}{x_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{x_2^2} + 2\,\frac{\mathrm{cov}[x_1, x_2]}{x_1 x_2}$$

Quadrierter *relativer* Fehler auf Produkt (oder Verhältnis) zweier Zahlen ist die quadratische Summer ihrer *relativen* Fehler

Fehlerfortpflanzung (4)

Korrelationen können das Bild sehr stark verändern:

Beispiel: $y = x_1 - x_2$

$\mu_1 = \mu_2 = 10$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, Korrelationskoef-
fizient $\rho = 0$:

$$==> \sigma_y = 1.4$$

Aber mit Korrelationskoeffizient $\rho = 1$:

$$==> \sigma_y = 0!$$

Tücken der **Fehlerfortpflanzung**

Achtung: bei nichtlinearen Transformationen y(x) auf den Erwartungswert aufpassen:

Es gilt NICHT allgemein

$$E[y(x)] = y(E[x])$$

sondern:

$$E[y(x)] \approx y(E[x]) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=E[x]} \sigma_x^2$$

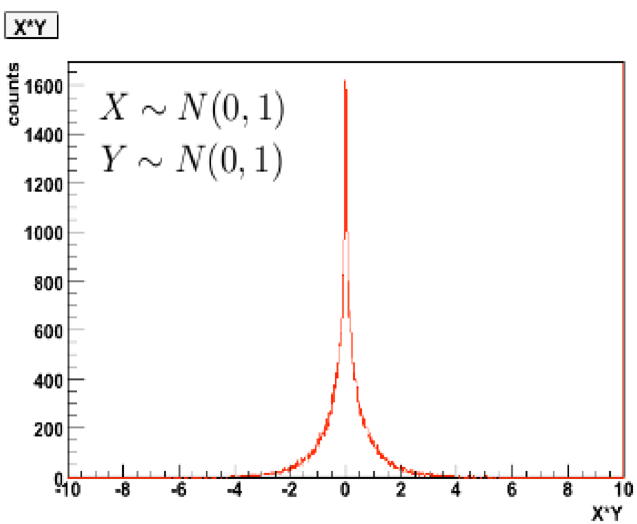
Der zweite Term ist wichtig, wenn sich die Steigung der Transformation innerhalb einer Standardabweichung von x erheblich ändert, d.h. bei großer Krümmung.

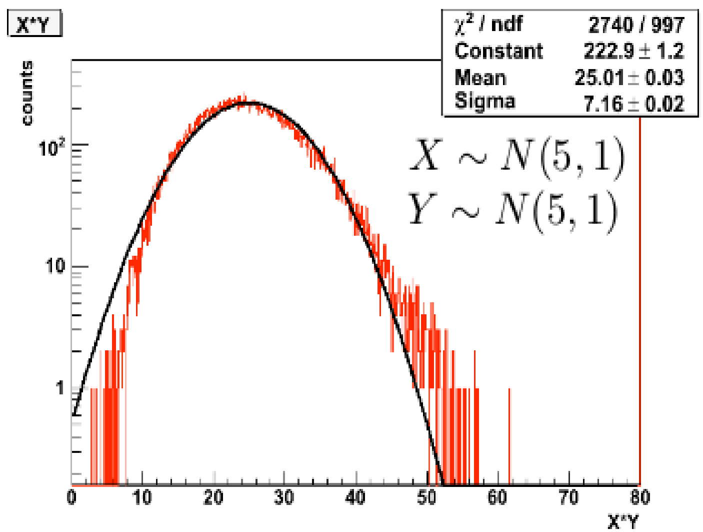
Fehlerfortpflanzung: Tücken (2)

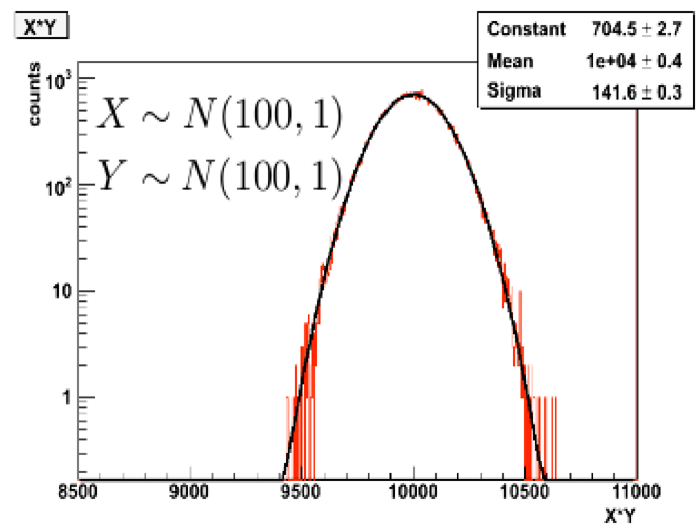
Einfache Operationen mit gaußverteilten Zufallsvariablen (wie z.B. Anfängerpraktikum)

z=x+y **oder z=x-y** klarer Fall: lineare Transfomation → **z gaußförmig**

z=x*y ? **nach Vorschrift:** $\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ **, aber ist z gaußverteilt ???**







jedenfalls nicht immer !

Fehlerfortpflanzung: Tücken (3)

z=x/y **wieder nach Vorschrift:** $\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2,$ **aber wie ist z verteilt ???**

z folgt meistens keiner Gaußverteilung !

Für normalverteilte x,y mit μ=0 und σ=1 folgt z sogar einer Cauchy-Verteilung:

$$p(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$$

σ ist hier gar nicht endlich !

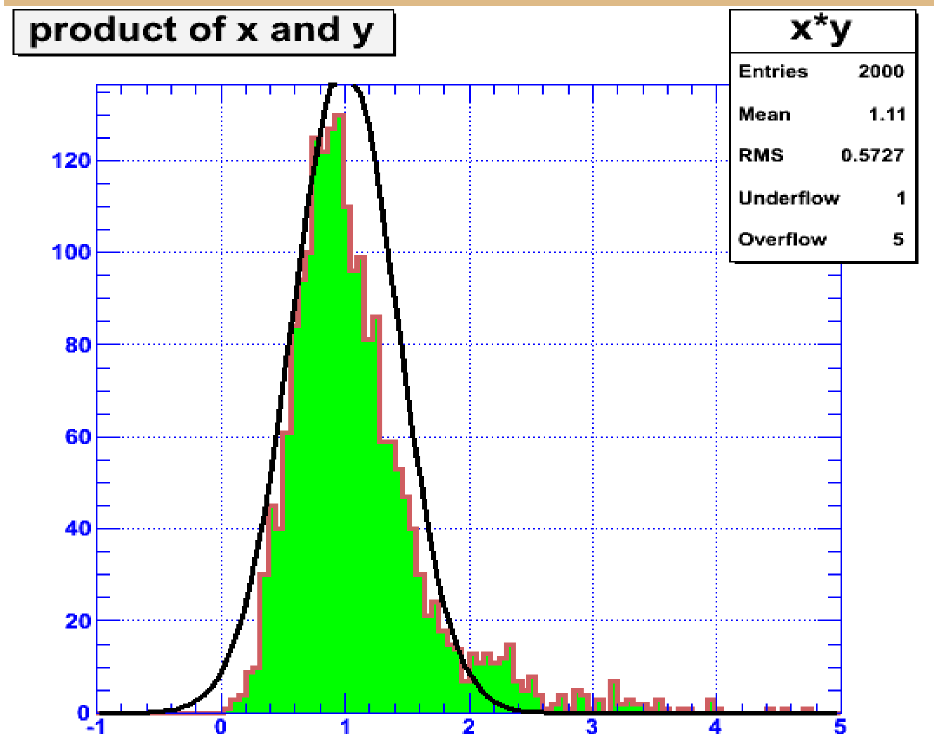
Falls μ_y /y so groß, das y nicht negativ wird:

$$p(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mu_Y \sigma_X^2 + \mu_X \sigma_Y^2 Z}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 Z^2)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(\mu_X - \mu_Y Z)^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 Z^2}\right]$$

s. Eadie et al.

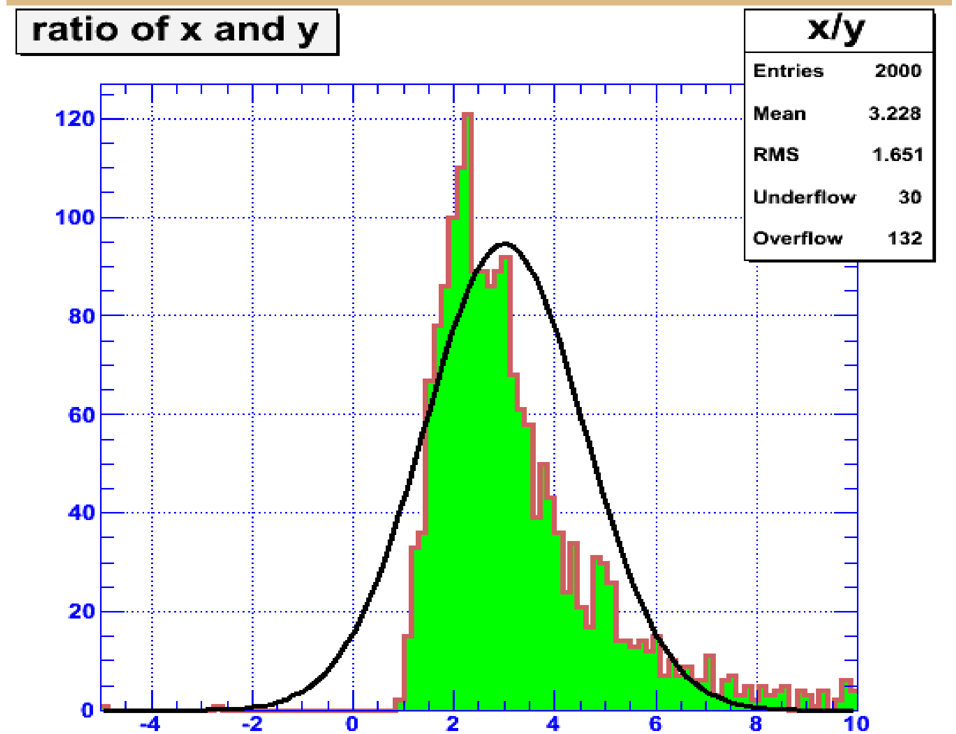
Was tun ? Simulation zur Überprüfung der statistischen Verfahren !

1.0 (+-0.30) * 1.0(+-0.30)



Verteilung des Produktes zweier Zufallszahlen, je Gauss(μ=1, σ=0.3), u. Gauß-Funktion mit Parametern aus naiver Fehlerfortpflanzung
(Beispiel xtimesy.C)

6.0 (+-1.0) / 2.0 (+-1.0)



Verteilung des Quotienten zweier Zufallszahlen, Gauss(μ=6, σ=1) u. Gauss(μ=2, σ=1), u. Gauß-Funktion mit Parametern aus naiver Fehlerfort-pflanzung
(Beispiel xovery.C)

Simulation mit Zufallszahlen ist der nächste Teil dieser Vorlesung !