Harmonische Polylogarithmen

(a) Logarithmen, Di-Logarithmen

Die "Standard-Funktionen" reichen oft nicht aus, um Ergebnisse von DGlen, Integrationen, ... darzustellen

Bsp:
$$\int_0^z \frac{dz'}{1-z'} = -\ln(1-z)$$
$$\int_0^z dz' \, \frac{\ln(1-z')}{z'} = ?$$

$\Rightarrow$ 1.) Führe für geg. z die Integration numerisch aus

2.) Definiere neue (Klasse von) Funktionen; studiere Eigenschaften dieser Funktionen

Di-Logarithmus: $$Li_2(z) := -\int_0^z \frac{\ln(1-z')}{z'}\, dz'$$

Eigenschaften des Di-Logarithmus

* $\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$

* $\mathrm{Li}_2(1) = \pi^2/6 \,,\quad \mathrm{Li}_2(0) = 0$

* $$\mathrm{Li}_2(-1) = -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \pm \dots = \underbrace{-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \dots}_{= -\mathrm{Li}_2(1)} + 2\underbrace{\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right)}_{= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(1)}$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(1)$$

* $$\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{z}\right) + \mathrm{Li}_2(-z) = 2\,\mathrm{Li}_2(-1) - \frac{1}{2}\ln^2(z)$$

folgt aus:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dz}\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{z}\right) &= \frac{\ln(1+z)}{z} - \frac{\ln z}{z} \\ \frac{d}{dz}\mathrm{Li}_2(-z) &= -\frac{\ln(1+z)}{z} \end{aligned}\right\}$$

$\oplus$, dann $\int dz$

$$\Rightarrow \mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{z}\right) + \mathrm{Li}_2(-z) = -\frac{1}{2}\ln^2 z + C$$

$$z = 1: \underbrace{\mathrm{Li}_2(-1)\cdot 2}_{-\pi^2/6} \stackrel{!}{=} C$$

* . . .

Eine erste Quelle für $\mathrm{Li}_2(z)$: LEIBNIZ 1696

(b) Polylogarithmen

* Tri-logarithmus: $\mathrm{Li}_3(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{Li}_2(z')}{z'}\, dz'$

* Allgemein: $\mathrm{Li}_n(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{Li}_{n-1}(z')}{z'}\, dz'$

* Mathematica: $\mathrm{Li}_n(z) \equiv$ PolyLog[n, z] $\rightsquigarrow$ kap_3_polylog.m

* Schnelle Implementation in FORTRAN / C++ verfügbar

* In der Praxis: Wirkungsquerschnitt $e^+e^- \to e^+e^-$

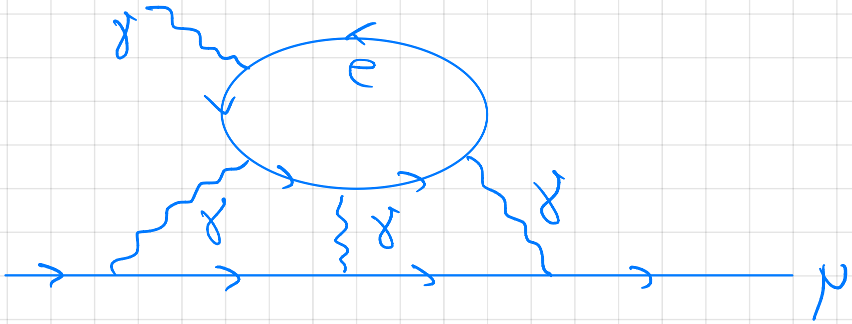
$\longrightarrow$ Ergebnis enthält $\mathrm{Li}_2\left(\frac{E}{m_e}\right)$ E: Gesamtenergie des (e^+e^-)-Paars

(c) Verallgemeinerung: Harmonische Polylogarithmen

Lit:
E. Remiddi
J.A.M. Vermaseren, 1999

Motivation: Für komplizierte (physikalisch sehr wichtige) Prozesse reichen $Li_n(z)$ nicht aus

Bsp: anomales magnetisches Moment des Myons



Def: <u>Harmonische Polylogarithmen</u> (HPL)

$$H(1;x) \equiv \int_0^x f_1(t)\,dt = -\ln(1-x) \qquad \text{mit} \qquad f_1(t) = \frac{1}{1-t}$$

$$H(0;x) \equiv \ln(x)$$

$$H(-1;x) \equiv \int_0^x f_{-1}(t)\,dt = \ln(1+x) \qquad \text{mit} \qquad f_{-1}(t) = \frac{1}{1+t}$$

HPL mit Gewicht 1

Rekursive Def: $H(\underbrace{0,\dots,0}_{n};x) \equiv \frac{1}{n!}\ln^n(x)$

HPL mit Gewicht $n+1$

$$\longrightarrow \quad H(a,a_1,\dots,a_n;x) \equiv \int_0^x dt\, f_a(t)\, \overbrace{H(a_1,\dots,a_n;x)}^{\text{HPL mit Gewicht } n}$$

$a = 0, \pm 1$

$f_0(t) = \frac{1}{t}$

Bem:

* Ableitung: $\frac{d}{dx} H(a, a_1, \dots, a_n; x) = f_a(x)\, H(a_1, \dots, a_n; x)$

* Beispiele:

$$H(1,1;x) = \frac{1}{2} \ln^2(1-x)$$

$$H(0,-1;x) = -\mathrm{Li}_2(-x)$$

$$H(\underbrace{0,\dots,0}_{n-1},1;x) = \mathrm{Li}_n(x)$$

$$H(1,\dots,1;x) = (-1)^n \frac{\ln^n(1-x)}{n!}$$

* komplizierteres Bsp $\rightsquigarrow$ hep_3_hpl.m

* Mathematica-Implementierung: D. Maître arXiv:hep-ph/0507152
0703052
(arxiv.org)

* Alternative Notation (wird in Mma benutzt):

Streiche Nullen im Argument von H und addiere 1 zum Absolutwert vom nächsten Eintrag $\neq 0$.

Bsp: $H(0,0,1,0,-1;x) \equiv H(3,-2;x)$

$H(0,\dots,0,1;x) \equiv H(n;x)$

↘ Eigenschaften:

- Produkte von HPLs $\longrightarrow$ HPLs
- Reihenentwicklung
- Transformation der Argumente
- komplexwertige Argumente (analytische Fortsetzung)