Beispiel nicht-lin. Oszillator

Hamilton-Operator: $H = \frac{p^2}{2m} + U(x)$; $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + V(x)$

$V(x) \equiv 0 \rightarrow$ harmonischer Oszillator

$\rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$; $\omega_0^2 = k/m$

$\rightarrow x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$

$V(x)$ "klein" $\rightarrow V(x)$ entwickelbar in Potenzreihe:

$$V(x) = \sum_{n\geq 3} \frac{c_n}{n} x^n$$ c_n sind bekannt

wähle Einheiten so, dass $m = 1 = k$ $(\rightarrow \omega_0^2 = 1)$

$\Rightarrow$ Bew. Gl.:

$$\ddot{x} + x = R(x) = -\frac{dV}{dx} = -\sum_{n\geq 3} c_n x^{n-1}$$

Ziel: Berechne approximative Lösung $x(t)$ in Abhängigkeit der c_n

Bem.:
- $x(t)$ ist periodisch in t
- Wähle $t=0$ für $x(0)=x_{max}$

  $\Rightarrow x(t)$ ist gerade Fkt.

  (da $x(t)=x(-t)$ falls $x(0)=x_{max}$)
- Betrachte $V(x)$ als Störung
- niedrigste Ordnung: $x(t)= a\cos t$

Korrektur 1. Ordnung d.h. nur $c_3 \neq 0$ $\qquad V(x) = \sum_{n\geq 3} \frac{c_n}{n} x^n$

$$\Rightarrow R_1 = -c_3 x^2(t) = -c_3 a^2 \cos^2 t = -\frac{c_3 a^2}{2}(1+\cos(2t))$$

Ansatz für Lösung: $$x(t) = \underbrace{a\cos t}_{\text{niedrigste Ordnung}} + a^2 \underbrace{(b_{20} + b_{22}\cos 2t)}_{\text{gerade Fkt; cos t kommt bereits im niedrigsten Term vor}} + \mathcal{O}(a^3)$$

Einsetzen in Bew. Gl.: $\ddot{x} + x = -c_3 x^2$

$$\Rightarrow \quad a^2\left[-4b_{22}\cos 2t + b_{20} + b_{22}\cos 2t\right] = -c_3 a^2 \frac{1}{2}(1+\cos 2t) + \mathcal{O}(a^3)$$

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \times \quad -3b_{22} + c_3/2 &= 0 \\ \times \quad b_{20} + c_3/2 &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \begin{aligned} b_{20} &= -c_3/2 \\ b_{22} &= c_3/6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = a\cos t + a^2 c_3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos 2t\right) + \mathcal{O}(a^3) \qquad (*)$$

Korrektur 2. Ordnung : $\ddot{x} + x = -c_3 x^2 - c_4 x^3$

Setze (*) in rechte Seite ein; entwickle bis zur Ordnung a^3

$\Rightarrow$ $\cos t$ – und $\cos(3t)$ – Terme

$\hat{=}$ externe Kraft in Resonanz ($\omega_0 = 1$) $\to$ kann nicht sein, da dann $x(t)$ nicht beschränkt

ok

$\Rightarrow$ Periode hängt von a ab!

(Das hatten wir bisher nicht berücksichtigt)

$\Rightarrow$ Bew. Gl. ändert sich zu

$$\omega^2 \ddot{x} + x = R \quad \text{mit} \quad \omega^2 = 1 + \sum_{k \geq 2} u_k a^k$$

(**)

Beachte: es gibt keinen lin. Term.

Ansatz: $x(t) = a \cos t + a^2 (b_{20} + b_{22} \cos 2t) + a^3 b_{33} \cos 3t + O(a^4)$

Einsetzen in (**)

$\to$ betrachte Koef von a^2 und a^3

b_{20}
b_{22}

$$u_2 = \frac{9c_4 - 10c_3^2}{12}$$

$$b_{33} = \frac{2c_3^2 + 3c_4}{96}$$

$$\Rightarrow x(t) = a \cos t + a^2 c_3 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos 2t\right) + \frac{a^3}{96} (2c_3^2 + 3c_4) \cos 3t + O(a^4)$$

Bem: • Korrekturen 1. und 2. Ordnung ok

• Höhere Korrekturen "lästig" mit "Bleistift und Papier"

$\longrightarrow$ Verwende Computeralgebraprogramm

z.B. Mathematica.