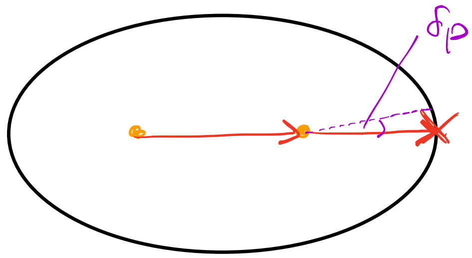
Perihel - Drehung



In unserer Rechnung dreht sich die Ellipse nicht

571,91 Bogensekunden beim Merkur

(280 durch die Venus)

150 Jupiter

100 alle anderen Planeten)

$\Rightarrow$ Verbleibende Diskrepanz.

Nehmen wir an, die Newton'sche Theorie der Gravitation ist falsch!!

Annahme $$V(r) = -\frac{G\mu M}{r}\left(1 + \frac{\eta}{r}\right)$$

typische Längenskalen bei $\eta = 0$

$$r_0 = \frac{L^2}{G\mu^2 M} \quad (= k)$$

Wenn $\eta \ll r_0$, dann kann man obige Korrektur leicht übersehen.

modifizierte Gravitationskraft

$$\vec{F} = -\frac{dV(r)}{dr}\,\vec{e}_r = -G\frac{M\mu}{r^2}\left(1 + \frac{2\eta}{r}\right)\vec{e}_r$$

$$\mu\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = -\frac{G\mu M}{r^2}\left(1 + \frac{2\eta}{r}\right)$$

$$r = \frac{1}{s} \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{=\frac{L}{\mu r^2}}$$

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + s\left(1 - \frac{2\eta}{r_0}\right) = \frac{1}{r_0} \qquad s_0 = \frac{1}{r_0}$$

$$s = C_1' \cos\left(\underbrace{\sqrt{1 - \frac{2\eta}{r_0}}}_{\alpha}\,\theta\right) + s_0$$

$$s = C_1' \cos(\alpha\theta) + s_0$$

$$r(\theta) = \frac{r_0\left(1 - \frac{2\eta}{r_0}\right)}{1 + \varepsilon\cos(\alpha\theta)}$$

Welches physikalische Prinzip ist für die Konstanz des Perihels verantwortlich.

Runge-Lenz Vektor

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - G\mu^2 M \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{L} + \underbrace{\vec{p} \times \underbrace{\frac{d\vec{L}}{dt}}_{= 0}}_{0} - G\mu^2 M \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

N.R. $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{r}\,\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -G\mu M \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{G\mu^2 M}{r^3}\left(\vec{r} \times \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right) - \vec{r}^{\,2}\frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{r}\left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right)\right)$$

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{a})$$

$$\Rightarrow \vec{r} \times \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{r}\left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right) - \vec{r} \cdot \vec{r}\,\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{0}}$$

Erhaltungsgrößen sind Konsequenten von Symmetrien !!!!!!

Zeittranslationsinvarianz $\longrightarrow$ Energie

räuml. Translationsinvarianz $\longrightarrow$ Impuls

Isotropie des Raumes $\longrightarrow$ Drehimpuls

Skalensymmetrie

$$\left.\begin{aligned} t &\to \lambda^3 t \\ \vec{r} &\to \lambda^2 \vec{r} \end{aligned}\right\} \quad \vec{p} \to \lambda^{-1} \vec{p}$$

Gravitationsgesetz bleibt unverändert

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{G\mu M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\lambda^4}{\lambda^6} \mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{G\mu M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$