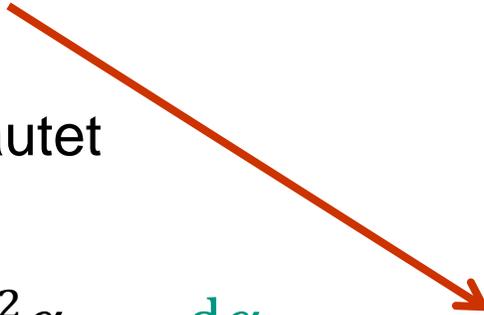


2.1.10. Anharmonische Oszillatoren, deterministisches Chaos

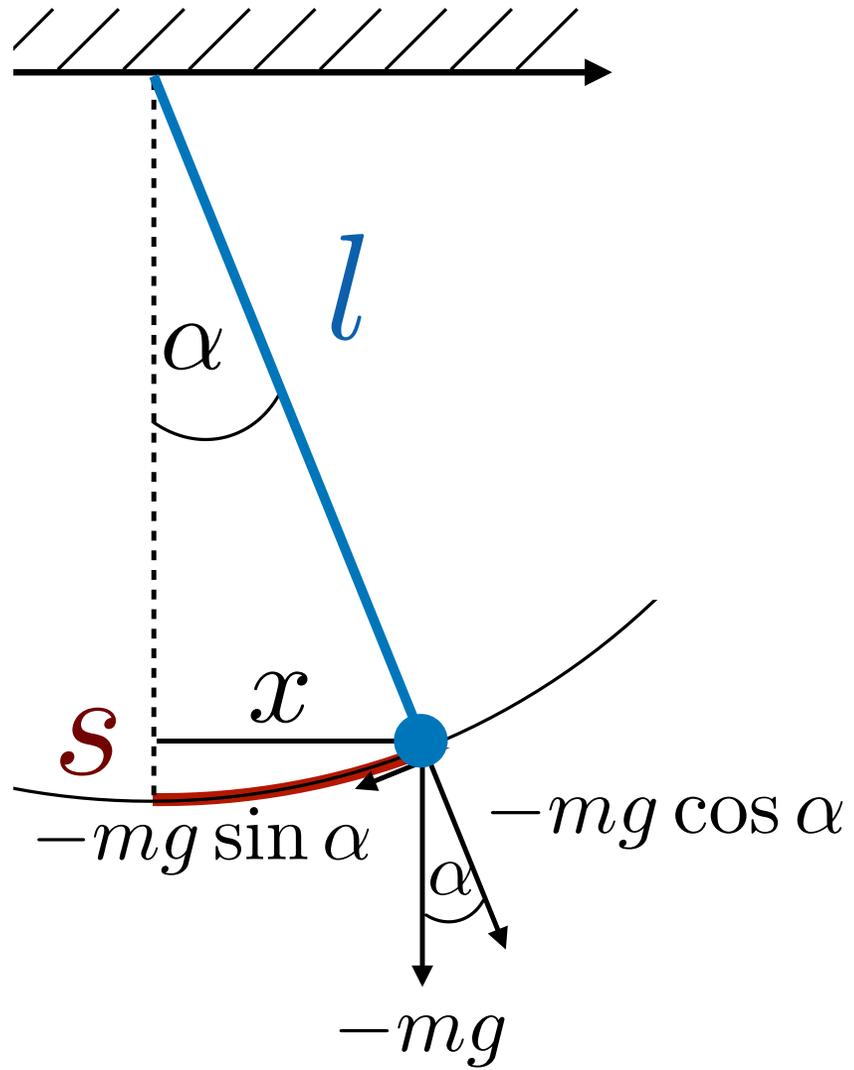
Wir betrachten das mathematische Pendel als Beispiel, um charakteristische Eigenschaften von **nichtlinearen** Bewegungsgleichungen kennen zu lernen.

Die Bewegungsgleichung lautet


$$m l \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \gamma \frac{d\alpha}{dt} + mg \sin(\alpha) = +F_0 \cos(\omega t)$$

mit der **Stokesschen Reibungskraft**, der **Tangentialkomponente der Schwerkraft** und der **äußeren periodischen Antriebskraft**.

Zur Erinnerung:



Zur Erinnerung: (Taylorreihenentwicklung)

Für kleine Winkel $\alpha \ll \pi$ gilt näherungsweise mit $\sin(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \dots$

$$m l \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \gamma \frac{d\alpha}{dt} + mg \alpha = +F_0 \cos(\omega t)$$

Für diese Bewegungsgleichung haben wir im Kap. 2.1.9. eine geschlossene analytische Lösung gefunden. Diese erlaubt es uns, bei gegebenen Anfangsbedingungen $\alpha(0)$ und $\dot{\alpha}(0)$ den Winkel $\alpha = \alpha(t)$ für beliebige Zeitpunkte $t \geq 0$ mathematisch exakt vorherzusagen.

Was geschieht nun aber, wenn wir die **Anfangsbedingungen** nicht exakt, sondern **nur mit einer bestimmten Unsicherheit** kennen? Zum Beispiel könnte für den Winkel selbst gelten

$$\alpha(0) \rightarrow \alpha(0) + \epsilon(0)$$

wobei $\epsilon(0)$ mit $|\epsilon(0)| \ll |\alpha(0)|$ unbekannt sei. Kennen wir z.B. den Anfangswinkel nur auf ein Promille genau, wäre $|\epsilon(0)| \leq 0.001 \cdot |\alpha(0)|$.

Was bedeutet dies für die Vorhersage von $\alpha(t)$ für $t > 0$?

Die Vorhersage ist dann für beliebig große zukünftige Zeiten t auch nur auf ungefähr ein Promille genau.

Dieser Aspekt ändert sich im Allgemeinen für nichtlineare Bewegungsgleichungen. Hier kann es passieren, dass eine anfängliche Ungenauigkeit im Laufe der Zeit für „große“ Zeiten t exponentiell anwächst wie

$$\alpha(t) \rightarrow \alpha(t) + \epsilon(t)$$

mit

$$|\epsilon(t)| = |\epsilon(0)| \cdot \exp(\lambda t); \quad [\lambda] = s^{-1}$$

Den Faktor λ nennt man **Lyapunov-Exponent**. Je größer $\lambda > 0$ ist, umso schlechter kann man gute Vorhersagen über das künftige Verhalten des Systems machen.

Der Exponent kann auch $\lambda \leq 0$ sein. Natürlich greift das exponentielle Wachstum nur für nicht zu große Zeiten, weil $\alpha(t)$ begrenzt ist mit $\alpha \in [-\pi, +\pi]$.

Generell wirkt das Verhalten $\alpha(t)$ auf den ersten Blick irregulär bzw. „chaotisch“ bzw. „zufällig“. Es ist aber definitiv nicht zufällig, weil das Verhalten einer **deterministischen Bewegungsgleichung** folgt.

Man spricht daher auch von **deterministisch chaotischem** Verhalten.

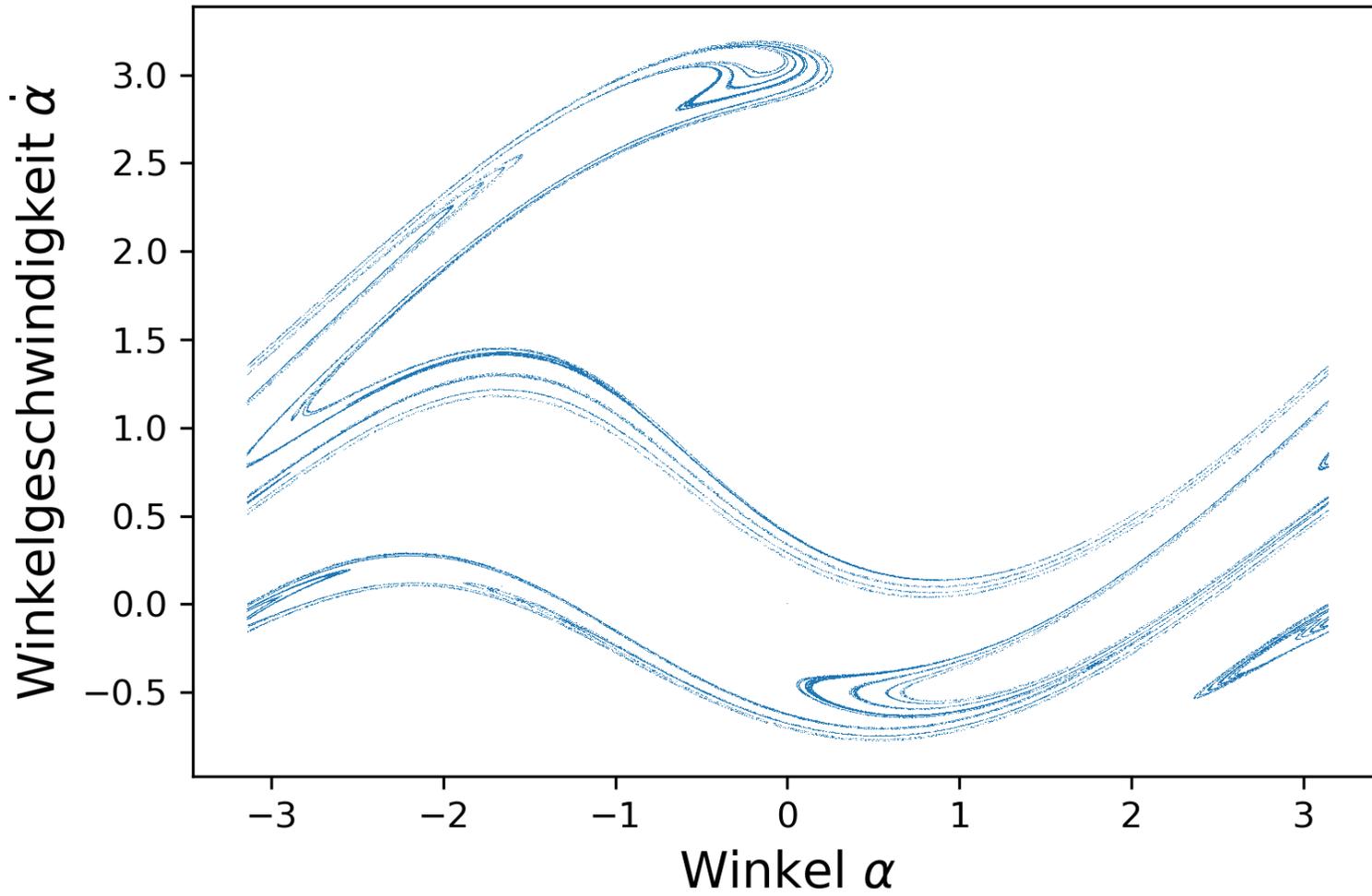
In diesem Regime sind nur noch numerische Lösungen der Bewegungsgleichung möglich.

Um diese Lösungen zu visualisieren, kann man **Poincaré Abbildungen** verwenden. Hierzu trägt man $\alpha(t_n) = \alpha_n$ und $\dot{\alpha}(t_n) = \dot{\alpha}_n$ zu den äquidistanten Zeitpunkten t_n mit $t_n = n \cdot 2\pi/\omega$ auf, wobei $n = 1, 2, \dots$ ist (ω ist weiterhin die Kreisfrequenz der treibenden Kraft).

Jupyter Notebook

- In diesem Beispiel illustrieren wir Lösungen der nichtlinearen Bewegungsgleichung des Pendels jenseits des Regimes kleiner Winkel.

Beispiel einer Poincaré Abbildung



$$b = \frac{\gamma}{ml} = 0.220$$

$$f = \frac{F_0}{ml} = 2.70$$

Für eine gegebene Bewegungsgleichung hängen α_{n+1} und $\dot{\alpha}_{n+1}$ nur von α_n und $\dot{\alpha}_n$ ab. Mathematisch ist dies eine **rekursive Folge** der Form

$$(\alpha_n, \dot{\alpha}_n) \rightarrow (\alpha_{n+1}, \dot{\alpha}_{n+1})$$

In eindimensionaler bzw. skalarer Form sind **rekursive Folgen** der Art

$$x_n \rightarrow x_{n+1} = f(x_n)$$

mit einer **nichtlinearen Funktion** $f(x)$ und einem Startwert (bzw. einer Anfangsbedingung) x_0 in der **Mathematik** wohl bekannt.

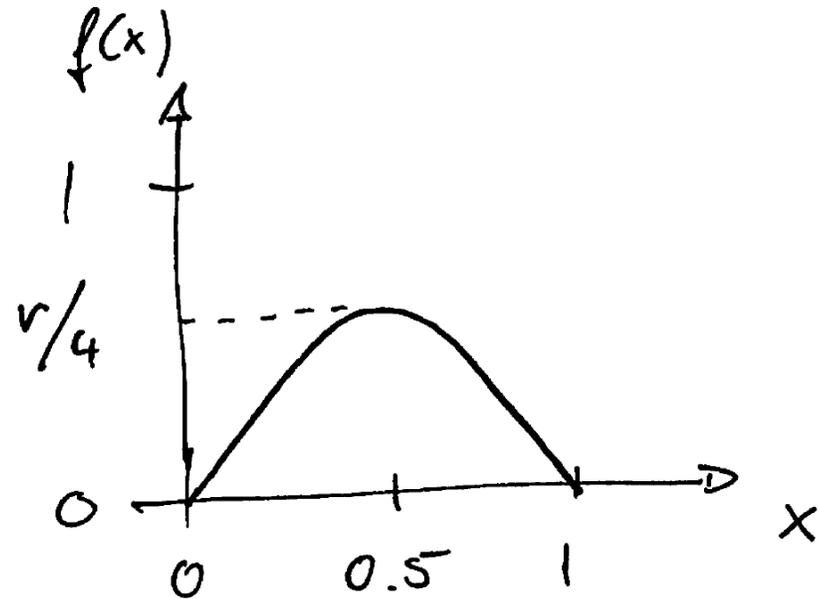
In der Physik kennen wir jedoch im Allgemeinen die Funktion f nicht.

Beispiel

Die so genannte **logistische Abbildung** ist gegeben durch

$$f(x) = r x(1 - x)$$

$$x_n \rightarrow x_{n+1} = f(x_n)$$



<https://www.j-berkemeier.de/LogistischeAbbildung.html>

Man findet als Funktion des **Kontrollparameters r** eine Abfolge von **Bifurkationen**, also eine Abfolge fortgesetzter Verdopplungen der Periodendauer. Jenseits eines kritischen Wertes wird die Periodendauer unendlich lang, das Verhalten ist nicht mehr periodisch.

Dieses Szenario ist **ein Weg ins deterministische Chaos**.

Für rekursive mathematische Folgen kann man den **Lyapunov-Exponenten** relativ einfach numerisch bestimmen. Wir starten von $x_0 \rightarrow x_0 + \epsilon_0$ mit $x_0 > 0$ und $\epsilon_0 > 0$ und **setzen an**

$$x_n + \epsilon_n = f \left(f \left(\dots f(x_0 + \epsilon_0) \right) \right) = f^n(x_0 + \epsilon_0); \quad |\epsilon_n| = \epsilon_0 \exp(\lambda n)$$

Im Limes $\epsilon_0 \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$ („große Zeiten“) erhalten wir (Herleitung folgende Folie)

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \ln |f'(x_m)|$$

<https://oak.ucc.nau.edu/jws8/classes/667.2017.1/Lyapunov.html>

Herleitung:

$$\epsilon_0 \exp(n\lambda) = |\epsilon_n| = |f^n(x_0 + \epsilon_0) - f^n(x_0)|$$

$$\Rightarrow \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \epsilon_0) - f^n(x_0)}{\epsilon_0} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right|$$

$$\text{z. B. } \frac{df^2}{dx}(x_0) = \frac{df(f(x))}{dx}(x_0) = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = f'(x_1) \cdot f'(x_0)$$

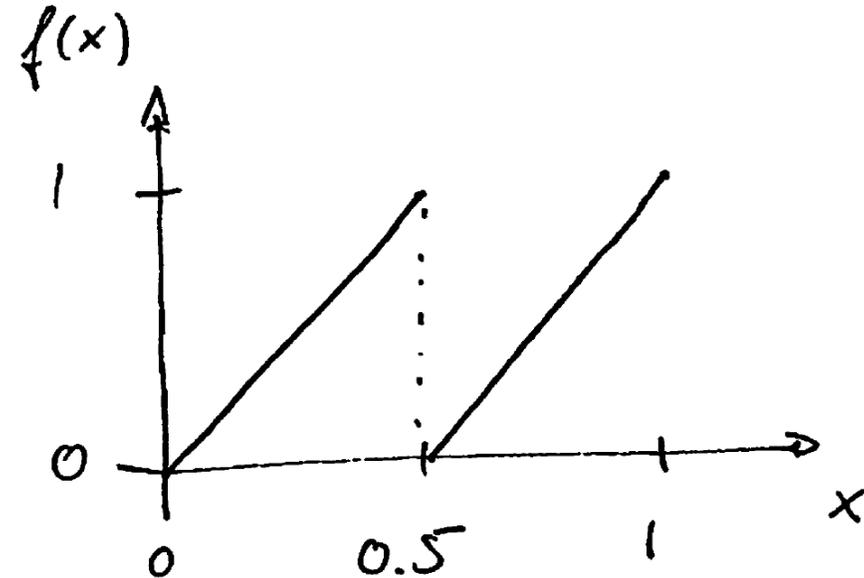
$$\Rightarrow \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{m=0}^{n-1} f'(x_m) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \ln |f'(x_m)| \quad \text{q. e. d.}$$

Beispiel

Die so genannte **Bernoulli-Folge** ist gegeben durch

$$f(x) = 2x \bmod 1$$

$$x_n \rightarrow x_{n+1} = f(x_n)$$



Besonders einfach wird die Diskussion, wenn man die reellen Zahlen x_n im Binärsystem darstellt wie

$$x_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m 2^{-m} ; \quad a_m = 0, 1$$

also zum Beispiel $x_0 = 0,1101011 \dots$

Die ersten Folgenglieder sind dann:

$$x_0 = 0,1101011 \dots$$

$$x_1 = 0,101011 \dots$$

$$x_2 = 0,01011 \dots$$

$$x_3 = 0,1011 \dots$$

$$x_4 = 0,011 \dots$$

Das bedeutet anschaulich, dass nach einer Zeit z.B. die dreißigste Nachkommastelle des Startwerts x_0 das Verhalten dominiert. Der Lyapunov-Exponent ist $\lambda = \ln 2 \approx +0.7$

Eine anfängliche Abweichung wächst also wieder exponentiell im Laufe der Zeit an.

Störungsrechnung

Wir kommen zur **Pendelgleichung**

$$m l \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \gamma \frac{d\alpha}{dt} + mg \sin(\alpha) = +F_0 \cos(\omega t)$$

zurück, halten uns aber fern von den Überschlagspunkten ($\alpha = \pm\pi$) des Pendels.

Wieder **Taylorreihenentwicklung**, jetzt aber mehr als nur den ersten Term mitnehmen

$$\sin(\alpha) \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \dots$$

Wir betrachten den kubischen Term als **Störung** und setzen die **Störungsreihe** an

$$\alpha(t) = \alpha^{(1)}(t) + \alpha^{(3)}(t) + \dots ; \quad |\alpha^{(3)}| \ll |\alpha^{(1)}|$$

wobei $\alpha^{(1)}(t) \propto \cos(\omega t + \varphi)$ die bekannte Lösung des linearen Problems ist.

$\alpha(t)$ ist die Lösung des Problems mit dem kubischen Term, also

$$m l \frac{d^2(\alpha^{(1)} + \alpha^{(3)})}{dt^2} + \gamma \frac{d(\alpha^{(1)} + \alpha^{(3)})}{dt} + mg \left(\alpha^{(1)} + \alpha^{(3)} - \frac{(\alpha^{(1)} + \alpha^{(3)})^3}{6} \right) = +F_0 \cos(\omega t)$$

Durch Einsetzen der linearen Lösung erhalten wir

$$m l \frac{d^2(\alpha^{(3)})}{dt^2} + \gamma \frac{d(\alpha^{(3)})}{dt} + mg \left(\alpha^{(3)} - \frac{(\alpha^{(1)} + \alpha^{(3)})^3}{6} \right) = 0$$

Wenn wir im letzten Term weiterhin approximieren $\alpha^{(1)} + \alpha^{(3)} \approx \alpha^{(1)}$, erhalten wir

$$m l \frac{d^2(\alpha^{(3)})}{dt^2} + \gamma \frac{d(\alpha^{(3)})}{dt} + mg\alpha^{(3)} = +mg \frac{(\alpha^{(1)})^3}{6} \propto \cos^3(\omega t + \varphi)$$

Der rote Term in dieser linearen Differentialgleichung ist eine treibende Kraft für die Korrektur $\alpha^{(3)}$. Diese treibende Kraft ist bekannt, sie enthält $\alpha^{(1)} = \alpha^{(1)}(t)$.

Betrachten wir nur die Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung für $\alpha^{(1)}$, so haben wir für die rechte Seite (trigonometrische Identität)

$$\cos^3(\omega t + \varphi) = \frac{1}{4} (3 \cos(\omega t + \varphi) + \cos(3(\omega t + \varphi)))$$

Die Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung für $\alpha^{(3)}$ hat damit zwei Beiträge, einen, der mit der Frequenz ω oszilliert, und einen zweiten, der mit der **Frequenz 3ω** oszilliert. Man spricht auch von der **dritten Harmonischen**.

Die Gesamtlösung $\alpha(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3)$ ist also **keine rein harmonische Oszillation** mehr, sondern enthält **Verzerrungen**.

Nehmen wir bei der Taylorreihenentwicklung des Sinus Terme bis zur Ordnung N mit, so ergibt sich für die Lösung der Pendelgleichung die Form einer **Fourier-Reihe**

$$\alpha(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

wobei der Summationsindex n nur über **ungerade** natürliche Zahlen läuft.

In der Näherung der Störungsrechnung kann man **also niemals Periodenverdopplungen oder deterministisches Chaos korrekt beschreiben**. Man kann aber kleine Verzerrungen bzw. Abweichungen vom linearen Verhalten erhalten.

Änderungen der Periodendauer der *homogenen Lösung* der Pendelgleichung haben wir übrigens nicht diskutiert.

Im Allgemeinen wird die Periodendauer des Pendels bei einer *freien Schwingung* mit steigender Amplitude des Pendels größer als in der linearen Näherung, weil die rücktreibende Kraft **kleiner** wird als in der linearen Näherung:

$$\sin(\alpha) \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \dots$$

Im Grenzfall $\alpha(0) = \pm\pi$ wird die Periodendauer sogar unendlich groß, also $T \rightarrow \infty$.