2.1.12. Der Virialsatz

- Bei der Bewegung von Massepunktsystemen findet ständig eine Umwandlung von kinetischer in potentieller Energie und zurück statt.
- Dies gilt im speziellen bei einem konservativen Kraftfeld, wo der Energiesatz lediglich eine Aussage über die Summe der beiden Energien trifft.
- Der Virialsatz trifft eine Aussage darüber, wie groß diese beiden Energien im zeitlichen Mittel sind!
- Er gilt nur für konservative Kraftfelder!

- Bewegungs des i'ten Teilchens verursacht durch Gesamtkraft → Multiplikation mit $\mathbf{r}_i$

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^G \rightarrow m_i\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i^G \cdot \mathbf{r}_i \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) - m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2 = \mathbf{F}_i^G \cdot \mathbf{r}_i$$

- Summe über alle Teilchen und ausdrücken der Kraft als Gradient eines Potentials

$$\sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \sum_i m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2 = -\sum_i \mathrm{grad}_i\, V_i^G \cdot \mathbf{r}_i$$

- Interessant ist das zeitliche Mittel dieser Ausdrücke:

$$\overline{f(t)} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} f(t')\mathrm{d}t'$$

- Betrachten zunächst den ersten Term

$$\overline{\sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i)} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i)\,\mathrm{d}t' = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i \Big|_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}}$$

- Für endliche Bewegungen die beschränkt bleiben, welche wir annehmen, bleiben $\mathbf{r}_i$ und $\dot{\mathbf{r}}_i$ endlich für $t \to \infty$. Das zeitliche Mittel verschwindet!

- Virialsatz:

$$\boxed{\overline{\sum_i \left(\frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2\right)} = \frac{1}{2} \overline{\sum_i \mathrm{grad}_i\, V_i^G \cdot \mathbf{r}_i}}$$

- Zeitlicher Mittelwert der kinetischen Energie ist das halbe Virial des Teilchensystems.

Beispiel 1: harmonischer Oszillator

- Wenn das Potential eine homogene Funktion zweiten Grades $V \propto \mathbf{r}_i^2$ ist, gilt nach dem Eulerschen Theorem über homogene Funktionen gerade

$$\sum_i \operatorname{grad}_i V_i^G \cdot \mathbf{r}_i = 2V$$

- Für einen harmonischen Oszillator ist die mittlere kinetische und potentielle Energie gerade gleich groß.

Beispiel 2: Zentralkraftfeld, Gravitationsfeld

- Betrachten ein Gravitationsfeld mit einem geeigneten effektiven Potential befinden, so dass die Massepunkte eine endliche (oszillatorische) Bewegung durchführen.

- Folgende Assoziationskette über den prinzipiellen funktionellen Zusammenhang gilt:

$$V \propto -\frac{1}{r} \rightarrow \operatorname{grad} V \propto \frac{\mathbf{r}}{r^3} \rightarrow \operatorname{grad} V \cdot \mathbf{r} \propto \frac{1}{r} \rightarrow -V$$

- Mittlere kinetische Energie ist gerade genau $\bar{T} = -\frac{1}{2}\bar{V} \rightarrow 2\bar{T} = -\bar{V} \rightarrow E = -\bar{T}$

- Ist die Gesamtenergie kleiner als null, entspricht der Betrag der Energie dem negativen Mittelwert der kinetischen Energie.

Anwendung

- Abschätzen der Masse stabiler Sternenhaufen mit Hilfe des Virialsatzes.
- Kinetische Energie schätzt man aus der Bewegung des Sternhaufens ab ($T = \frac{M}{2} v^2$).
- Diese kann in Bezug zur potentiellen Energie gesetzt wird ($V = \frac{M^2}{R}$) mit dem messbaren Radius des Sternhaufens.
- Kombination dieser beider Größen erlaubt die Bestimmung der Masse M.
- Wichtig: Sternhaufen bleibt stabil.