8. Das Gravitationsfeld

In den Kapiteln 2.1.3. und 2.2.2. hatten wir bereits über die Gravitationskraft zwischen zwei punktförmigen Teilchen gesprochen.

Wie sieht die Gravitationskraft $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ auf ein Teilchen der Masse $m = m_1$ aus, die von einer beliebigen ausgedehnten Masseverteilung hervorgerufen wird?

Wir definieren zunächst die Feldstärke $\mathbf{g}$ des Gravitationsfeldes über

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$$

Das Grundgesetz der klassischen Gravitation besagt dann, dass gilt

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{g} = -4\pi G\, \rho(r)}$$

mit der Massendichte $\rho = \rho(\mathbf{r})$ und der Gravitationskonstante $G = 6.67430 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$.

Weiterhin ist die Feldstärke wirbelfrei $\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{g} = 0}$

Die Gleichungen der klassischen Gravitation sind mathematisch völlig äquivalent zu den Gleichungen der Elektrostatik im nächsten Semester (Klassische Experimentalphysik II).

Insofern bereiten wir uns hier schon einmal auf das kommende Semester vor.

Zur Erinnerung: Der Satz von Gauß lautet (siehe Kap. 2.1.6. und Kap. 5.2.)

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, \mathrm{d}V = \oint_{(V)} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

Das Volumen V, über das auf der linken Seite integriert wird, kann beliebig gewählt werden. Die geschlossene Oberfläche (V) ist die Oberfläche dieses Volumens.

Bei dem Oberflächenintegral auf der rechten Seite ist wie üblich die (nach außen gerichtete) Normalkomponente des Vektors $\mathbf{f}$ bzgl. der Oberfläche über die geschlossene Oberfläche (V) zu integrieren (siehe Kringel am Integral).

Zur Erinnerung: Der Satz von Stokes lautet (siehe Kap. 2.1.6.)

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f} \, \mathrm{d}\mathbf{A} = \oint_{(F)} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Die Fläche F, über die auf der linken Seite integriert wird, kann beliebig gewählt werden. Der geschlossene Weg (F) auf der rechten Seite ist der Rand dieser Fläche.

Bei dem Wegintegral auf der rechten Seite ist wie üblich die Tangentialkomponente des Vektors $\mathbf{f}$ bzgl. des Weges über den geschlossenen Weg (F) zu integrieren (siehe Kringel am Integral).

Mit Hilfe des Satzes von Gauß können wir das Grundgesetz der klassischen Gravitation umschreiben zu der Integralgleichung

$$\boxed{\oint_{(V)} \mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 4\pi G \int_V \rho \, \mathrm{d}V}$$

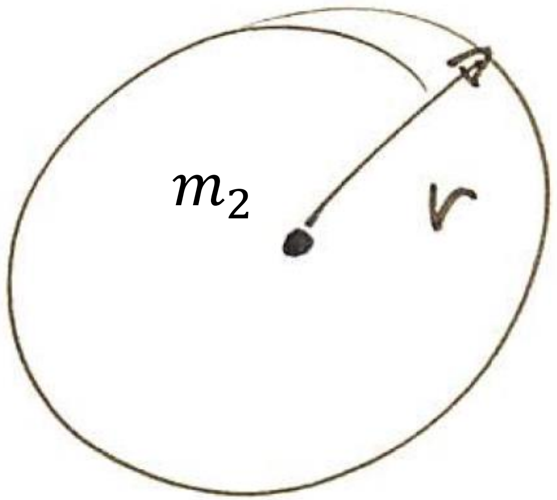
Mit Hilfe des Satzes von Stokes gilt weiterhin

$$\boxed{\int_{(F)} \mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0}$$

Beispiel

Wir betrachten eine einzelne punktförmige Masse m_2. Als Integrationsvolumen wählen wir eine konzentrische Kugel mit Radius r.

$$\Rightarrow \int_{(V)} \mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = -4\pi G \int_V \rho \, \mathrm{d}V = -4\pi G \, m_2$$



Das Problem ist kugelsymmetrisch, d.h.,
die Normalkomponente (= Radialkomponente)
von $\mathbf{g}$ muss auf der Kugeloberfläche konstant sein.

$$\Rightarrow g_\mathrm{N} \, 4\pi r^2 = -4\pi G \, m_2 \;\Rightarrow g_\mathrm{N} = -G m_2 / r^2$$

Wir erhalten für die Radialkomponente (= Normalkomponente) der Schwerkraft

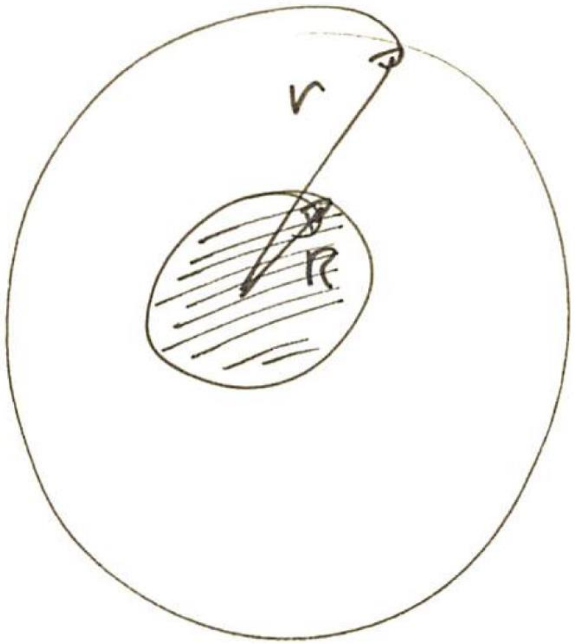
$$F_{\mathrm{N}} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Die Tangentialkomponente ist gleich Null, weil sonst die Rotation der Feldstärke nicht gleich Null wäre (und sich somit eine nicht-konservative Kraft ergäbe).

Dieses Ergebnis insgesamt ist identisch zu dem bereits in Kap. 2.1.3. diskutierten Gravitationsgesetz für zwei punktförmige Massen.

8.2. Beispiel: Homogene Kugel

Wir betrachten nun eine homogene Kugel mit endlichem Radius R statt einer Punktmasse. Die Masse der Kugel sei m_2.



$$\rho = \frac{m_2}{V} = \frac{m_2}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $r \geq R$ (siehe Skizze auf der letzten Folie):

$$\Rightarrow g_\mathrm{N}\, 4\pi r^2 = -4\pi G\, m_2 \;\Rightarrow g_\mathrm{N} = -G m_2 / r^2$$

Wir finden also, dass die Feldstärke im Außenraum der homogenen Kugel identisch ist zur Feldstärke einer Punktmasse.

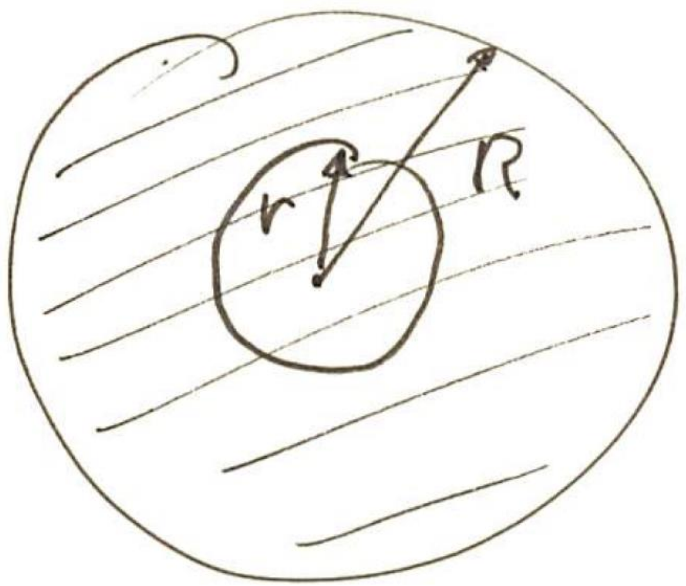
Davon waren wir im Kapitel 2 bei der Gravitation der Erde schon ausgegangen.

Wir betrachten nun den Fall $r \leq R$ (siehe Skizze auf dieser Folie):

$$\int_{(V)} \mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = -4\pi G \int_V \rho \, \mathrm{d}V$$

$$= g_\mathrm{N} \, 4\pi r^2 = -4\pi G \, \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = -4\pi G \, \frac{m_2}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow g_N = -G m_2 \frac{r}{R^3}$$



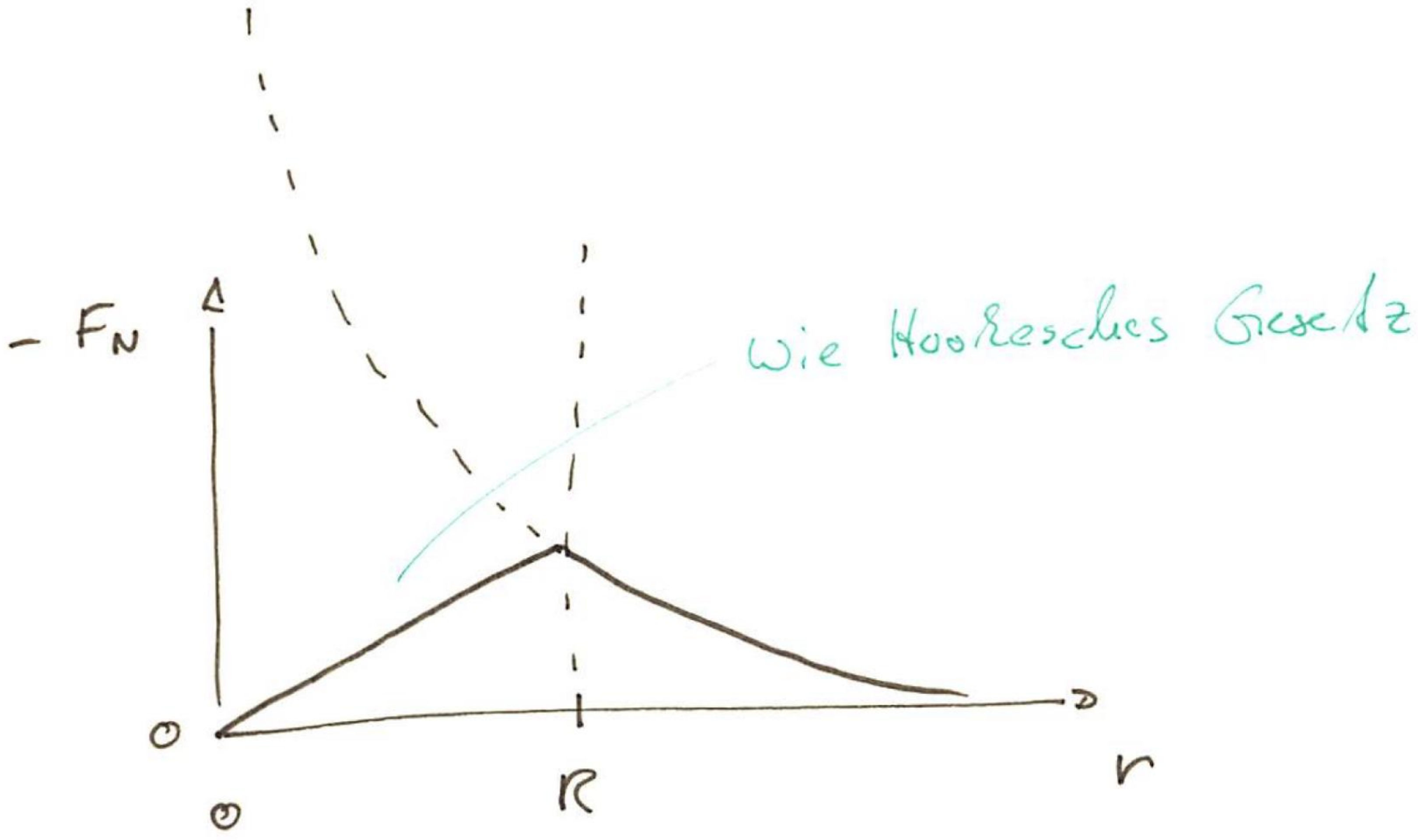
Zusammenfassend haben wir also:

$$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{N}}(r) = \begin{cases} -G\,\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\;; & r \geq R \\[2ex] -G\,\dfrac{m_1 m_2}{R^3}\,r\;; & r \leq R \end{cases}$$

Im Zentrum der Kugel ist die Kraft also gleich Null.

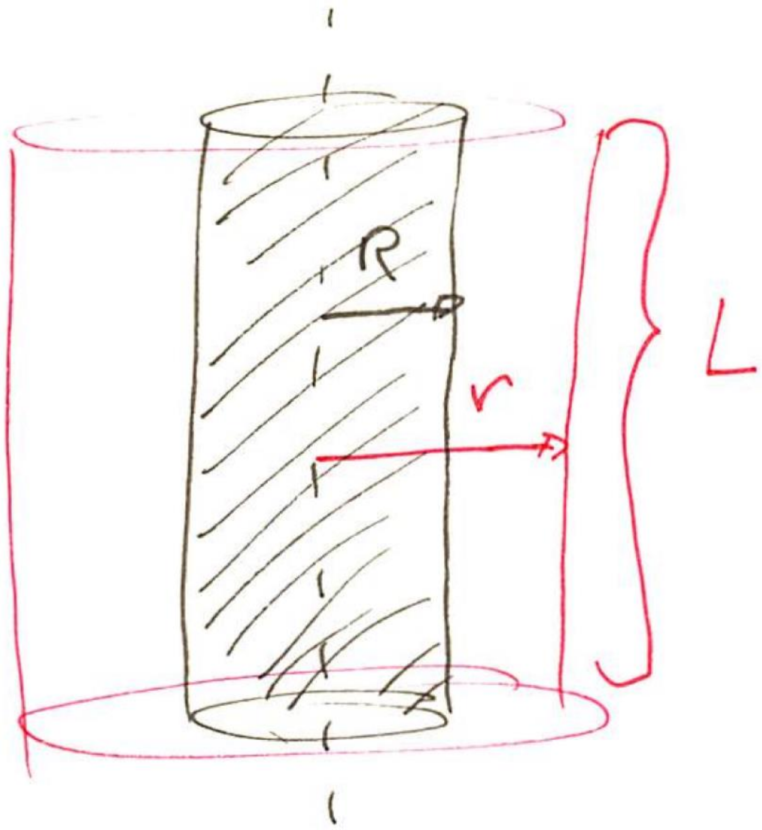
Im Inneren der Kugel ergibt sich eine Kraft genau wie bei einer Hookeschen Feder.

Graphisch:



Beispiel

Wir betrachten einen homogenen sehr langen Zylinder mit Masse m_2.



$$\rho = \frac{m_2}{\pi R^2\, L}$$

Als Integrationsfläche wählen wir die Oberfläche des Zylinders. Boden und Deckel vernachlässigen wir dabei näherungsweise im Limes $L \gg R$ („dünner Draht“).

$$\int_{(V)} \mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = -4\pi G \int_V \rho \, \mathrm{d}V$$

$$\Rightarrow g_N \; 2\pi r \, L \approx -4\pi G m_2$$

$$\Rightarrow g_N = -G \frac{2 m_1 m_2}{L} \cdot \frac{1}{r} \quad \Rightarrow F_N \propto \frac{1}{r} \neq \frac{1}{r^2}$$

Wir sehen also, dass die Potenz im Nenner von der Geometrie herrührt.