Klassische Theoretische Physik I

(Theoretische Physik A)

—Einführung in die Mechanik—

Prof. Dr. Ulrich Nierste

Ilias-Seite der Vorlesung:

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2215325&client_id=produktiv

Literatur

1. W. Nolting: Grundkurs Theor. Physik, Bd. 1, Klass. Mechanik, Springer.
2. F. Scheck: Mechanik, Springer.
3. S. Brandt, H. Dahmen: Physik Bd. 1, Mechanik, Springer.
4. T. Fließbach: Mechanik, BI Hochschultaschenbuch.
5. J. Honerkamp, H. Römer: Klass. Theor. Physik, SPringer.
6. H. Goldstein: Klass. Mechanik, Wiley-VCH.
7. L. D. Landau, E. Lifshitz: Lehrbuch der Theor. Physik, Bd. 1, Mechanik.
8. K. Kirchgessner, M. Schreck: Lern- und Übungsbuch zur Theor. Physik 1, Klass. Mechanik, Oldenbourg.

Inhalt

1 Grundlagen

1.1 Grundbegriffe

Theoretische Physik beschäftigt sich mit der Beschreibung physikalischer Gesetzmäßigkeiten in einem mathematischen Gebäude, der physikalischen Theorie.

Eine wissenschaftliche Theorie muss deskriptiv und prädiktiv sein.

Deskriptiv: Experimentelle Daten müssen korrekt beschrieben werden.

Prädiktiv: Eine Theorie muss Vorhersagen über die Ergebnisse künftiger Experimente machen. Insbesondere muss sie falsifizierbar sein (experimentum crucis) (Philosophen Francis Bacon und Karl Popper).

Naturwissenschaftliche Theorien werden erraten. Sie sind unbeweisbar.

Ockhams Messer = Sparsamkeitsprinzip der Wissenschaft:

Unter mehreren Theorien, die die Daten korrekt beschreiben, ist die einfachste vorzuziehen.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Wiliam of}\\ \text{Wilhelm von}\end{array}\right\}\text{Ockham} \quad {}^*1285\ (\text{Ockham}) \quad {}^\dagger 1349\ (\text{München})$$

Naturwissenschaftiche Theorien müssen schließlich allgemeingültig sein, also immer und überall gelten.

Klassische Mechanik ist die Physik bewegter makroskopischer Körper unter dem Einfluss von Kräften.

Kinematik: Bewegungslehre

Dynamik: Lehre von den Kräften

- Bewegung von Körpern in Kraftfeldern
- Klassifizierung von Kräften (z.B. ob sie die Energie erhalten oder nicht)
- Beschreibung der Gravitation (Schwerkraft), Himmelsmechanik (Planetenbewegung)

1.2 Mathematische Grundlagen

1.2.1 Ableitung

Ableitung einer reellen Funktion $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) \quad = \quad \underbrace{\frac{d\,f}{d\,x} = \frac{d}{d\,x} f}_{\text{Leibniz-Schreibweise}} \quad = \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ist das Argument der Funktion die Zeit t, so schreibt man:

$$\dot{f}(t) = \frac{d\,f}{d\,t} \qquad \text{Newton-Schreibweise}$$

Höhere Ableitungen:

$$f''(x) = \frac{d^2\,f}{d\,x^2} = \frac{d}{d\,x}\left(\frac{d\,f}{d\,x}\right)$$

$$\ddot{f}(t) = \frac{d^2\,f}{d\,t^2}, \qquad \text{usw.}$$

Ableitungsregeln:

- Produktregel:

$$\frac{d}{d\,t}\left[f(t)g(t)\right] = \dot{f}(t)g(t) + f(t)\dot{g}(t) \tag{1}$$

- Kettenregel:

$$\frac{d}{d\,t}f(g(t)) = \frac{d\,f(g(t))}{d\,g}\underbrace{\frac{d\,g(t)}{d\,t}}_{=\dot{g}(t)} \tag{2}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
& f(x) = \sin x, \qquad g(t) = \omega t \\
\Rightarrow \qquad & f(g(t)) = \sin(\omega t) \\
& \dot{f}(g(t)) = \frac{d\,f(g(t))}{d\,t} \quad = \quad \underbrace{\frac{d\,f}{d\,g}}_{\cos g(t)}\;\underbrace{\dot{g}(t)}_{\omega} \\
& \qquad\qquad = \omega\cos(\omega t)
\end{aligned}$$

1.2.2 Integral

Riemann'sches Integral:

Fläche A minus Fläche B:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \underbrace{\int_a^b dx\;f(x)}_{\text{Physiker*innen-Schreibweise}}$$

$$\int_b^a dx\; f(x) \;=\; -\int_a^b dx\; f(x)$$

<u>Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)</u>: $F(x) := \int_a^x dy f(y)$ ist <u>Stammfunktion</u> zu $f(x)$, d.h. $\frac{dF}{dx} = f(x)$.

<u>Eigenschaften:</u>

- $\int_a^c dx\; f(x) = \int_a^b dx\; f(x) + \int_b^c dx\; f(x)$ Additivität
- Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:
  $\int_a^b dx\; (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \int_a^b dx\; f(x) \;+\; \mu \int_a^b dx\; g(x)$ Linearität

Kurzschreibweise: $[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$.

Das <u>Monom</u> $F(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$ hat die Stammfunktionen $F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$ mit beliebiger <u>Integrationskonstante</u> C.

$$\begin{aligned}
\int_a^b dx\; x^\alpha \;&=\; \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C\right]_a^b \\
&= \frac{1}{\alpha+1} b^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} a^{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Integriert man Gl. (1), so findet man die Regel der <u>partiellen Integration</u>:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} dt\; f(t)\dot{g}(t) \;&=\; -\int_{t_1}^{t_2} dt\; \dot{f}(t)g(t) \;+\; \int_{t_1}^{t_2} dt\; \frac{d}{dt}\,[f(t)g(t)] \\
&\overset{\text{HDI}}{=} \; [f(t)g(t)]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\; \dot{f}(t)g(t) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Integriert man Gl. (2), so findet man die <u>Substitutionsregel</u>:

$$\int_{g_1}^{g_2} dg\; f(g) \;=\; \int_{t_1}^{t_2} dt\; \dot{g}(t) f(g(t)) \qquad \text{mit} \qquad g_{1,2} := g(t_{1,2}), \qquad (4)$$

sofern g monoton und $\dot{g}$ stetig für $t \in [t_1, t_2]$ ist.

Merkregel: $dg \;=\; \frac{dg}{dt}\, dt$.

1.2.3 Logarithmus und Exponentialfunktion

Der <u>natürliche Logarithmus</u> ist für $x > 0$ definiert durch

$$\ln x \;:=\; \int_1^x \frac{dy}{y} \;:=\; \int_1^x dy\, \frac{1}{y} \qquad (5)$$

Also findet man $\ln 1 = 0$.

Eigenschaften (siehe Übungsblatt):

1. $$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \qquad \text{für } x, y > 0. \tag{6}$$

2. $$\ln x^\alpha = \alpha \ln x, \qquad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}, x > 0. \tag{7}$$

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ definieren wir als Funktion mit den Eigenschaften:

1. $$\frac{d\,\exp(x)}{d\,x} = \exp(x) \tag{8}$$

2. $$\exp(0) = 1 \tag{9}$$

$\Rightarrow$ $\exp(x)$ ist in einem Intervall $[a, \infty)$ mit $a < 0$ positiv und monoton wachsend.

$$\text{Gl. (8)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\exp(x)} \frac{d\,\exp(x)}{d\,x} = 1$$
$$\Rightarrow \quad \int_0^y dx \frac{1}{\exp(x)} \frac{d\,\exp(x)}{d\,x} = \int_0^y 1 dx = y \qquad \text{für } y > 0 \tag{10}$$

Substitution:

$$z = \exp(x) \qquad \Rightarrow \qquad dz = \frac{d\,\exp(x)}{d\,x}\, dx$$
$$\text{Gl. (10)} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int_1^{\exp(y)} dz \frac{1}{z}} = y$$
$$\text{Mit Gl. (5):} \qquad \overbrace{[\ln z]_1^{\exp(y)}} = y$$
$$\Rightarrow \quad \ln \exp(y) = y \tag{11}$$

$\Rightarrow$ exp ist die <u>Umkehrfunktion zu ln</u>!

Mit $y = \ln t$ folgt aus Gl. (11) $\ln \exp(\ln t) = \ln t$, wegen der strengen Monotonie von ln also auch $\exp(\ln t) = t$ für $t > 0$.

Aus Gl. (6) und (7) folgt mit $x = \exp t$, $y = \exp s$:

1.

$$
\begin{aligned}
&\ln[\exp(t)\exp(s)] = t + s \\
\Rightarrow \quad &\exp(t)\exp(s) = \exp(t+s) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

2.

$$
[\exp(t)]^\alpha = \exp(\alpha t) \qquad \text{für } t, s, \alpha \in \mathbb{R}. \qquad (13)
$$

Dies rechtfertigt die Schreibweise

$$
\exp(x) =: e^x,
$$

so dass Gl. (12) und (13) zu

$$
e^t e^s = e^{t+s} \qquad \text{und} \qquad \left(e^t\right)^\alpha = e^{t\alpha}
$$

werden. Euler'sche Zahl: $e := \exp(1) = 2,71828\ldots$.